UNIÓN INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

UIT-T

SECTOR DE NORMALIZACIÓN
DE LAS TELECOMUNICACIONES
DE LA UIT

Serie G
Suplemento 22
(10/1984)

SERIE G: SISTEMAS INTERNACIONALES ANALÓGICOS DE PORTADORAS

Características de los medios de transmisión

Modelos matemáticos de señales múltiplex

Recomendaciones UIT-T de la serie G – Suplemento 22

Originalmente publicado en el Libro Rojo (1984) - Fascículo III.2

NOTAS

1 El suplemento 22 a las Recomendaciones de la serie G se aprobó en Málaga-Torremolinos (1984) y se publicó en el fascículo III.2 del *Libro Rojo*. Este fichero es un extracto del *Libro Rojo*. Aunque la presentación y disposición del texto son ligeramente diferentes de la versión del *Libro Rojo*, el contenido del fichero es idéntico a la citada versión y los derechos de autor siguen siendo los mismos (Véase a continuación).

2 Por razones de concisión, el término «Administración» se utiliza en el presente Suplemento para designar a una administración de telecomunicaciones y a una empresa de explotación reconocida.

Suplemento N.º 22

MODELOS MATEMÁTICOS DE SEÑALES MÚLTIPLEX

(Ginebra, 1980; citado en la Recomendación G.223)

1 Introducción

Las señales que representan la carga múltiplex de un sistema MDF pueden definirse en términos de la distribución de las potencias a corto plazo o de las tensiones instantáneas. Los valores de estos parámetros dependen del tiempo y cabe esperar que experimenten una variación importante incluso durante los periodos cargados de días sucesivos. No obstante, un método para determinar una distribución «media» de sus valores en el periodo cargado sería de gran utilidad, pues aseguraría el mantenimiento de márgenes de planificación al alterarse la carga del sistema por la introducción de diferentes tipos de tráfico. Para que sea valedera, una estimación de la distribución de la carga del múltiplex debe basarse en datos primarios que puedan medirse directamente u obtenerse de fuentes seguras, a fin de que los efectos de cualesquiera cambios propuestos en los datos puedan incorporarse correctamente y la estimación debe hacerse de tal modo que pueda efectuarse una medición directa de la distribución real para comprobar su validez. A continuación se describen algunos métodos que responden a estas exigencias.

En el § 2 se describe en términos generales un proceso que puede utilizarse para calcular la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de las potencias a corto plazo de la carga de un múltiplex. En el § 3 se describe un proceso matemático basado en la obra de Holbrook y Dixon. Ahora se considera, sin embargo, que estos métodos son inexactos a los fines del modelado. El advenimiento de los computadores digitales de alta velocidad ha conducido al desarrollo del método descrito en el § 4, que resulta ser el más exacto para calcular la distribución de tensiones de la señal múltiplex.

Sin embargo, los métodos descritos en el § 4 no están todavía completos en el sentido de que suponen que la carga de un sistema MDF consiste totalmente en señales vocales. Prosiguen los estudios destinados a determinar las descripciones apropiadas para las distribuciones de tensiones instantáneas debidas a señalización, tonos de supervisión, datos, etc,.

2 Método 1 — Función de densidad de probabilidad de las potencias a corto plazo de la carga de un múltiplex

2.1 Los sucesos que se producen en un canal unidireccional de un circuito de tipo telefónico pueden clasificarse como sigue:

1) Conversaciones principales *(sm)*
2) Conversaciones secundarias o auxiliares *(sa)*
3) Señalización (señales numéricas) *(zn)*
4) Tonos de supervisión (señales de línea) *(zl)*
5) Varios (por ejemplo, datos, eco) *(md, me)*
6) Reposo *(i)*

Las mediciones de las señales de cada una de estas clases durante un número adecuado de periodos cargados proporcionan información a partir de la cual pueden obtenerse parámetros que definen las propiedades estadísticas de la carga del canal.

Estos parámetros son los siguientes:

1) Los distintos coeficientes globales de actividad media, $\bar{\tau}$ (es decir, $\bar{\tau}_{sm}$, $\bar{\tau}_{sa}$, $\bar{\tau}_{zn}$, etc.) que definen las fracciones de tiempo durante las cuales cada clase produce potencia activa en el periodo cargado medio.
2) Los distintos valores medios $\bar{y}$ (es decir, $\bar{y}_{sm}$, $\bar{y}_{sa}$, $\bar{y}_{zn}$, etc.) y las desviaciones típicas σ (esto es, σ_{ysm}, σ_{ysa}, σ_{yzn}, etc.) de las funciones de densidad de probabilidad (f.d.p.) de los niveles de la potencia activa para cada clase.

2.2 Se calcula para cada clase la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de los niveles de potencia activa a corto plazo (20 ms) que se producen durante un periodo cargado medio. Haciendo caso omiso de las posibilidades de ciertas condiciones de fallo, puede considerarse que estas f.d.p. se excluyen mutuamente. Por consiguiente, sumando las probabilidades de que se produzca una potencia dada en todas las clases se obtiene la probabilidad total de que se produzca esa potencia durante el periodo cargado medio. Esta f.d.p., $p(Z_{uc})$ da, desde el punto de vista estadístico, una descripción suficiente de la carga unidireccional del canal.

El valor de $p(Z_{uc})$ puede obtenerse también por medición directa. Pero no se puede determinar fácilmente el efecto de los cambios de una cualquiera de las clases sobre esta f.d.p. total.

2.3 Un grupo primario MDF está constituido, en cada sentido de transmisión, por 12 canales, cada uno de los cuales da una f.d.p. $p(Z_{uc})$. Si, como ocurre generalmente, las señales de cada canal provienen de fuentes estadísticamente similares, los tipos de tráfico transmitido por cada canal estarán en la misma relación y es, pues, suficiente en muchos casos suponer que cada una de las 12 f.d.p., $p(Z_{uc})$, puede representarse por la misma f.d.p., $p(Z_{tc})$, siendo este último término la f.d.p. de la potencia en el «canal típico» del grupo primario MDF

. Las series de f.d.p. $p(Z_{tc})$ no se excluyen mutuamente, claro es, y la carga del múltiplex debida a los 12 canales se obtiene por convolución de esta serie de f.d.p. para formar $p(Z_g)$. Si en la transmisión se utiliza la preacentuación, será necesario simplemente multiplicar la potencia de cada f.d.p. por el coeficiente apropiado de preacentuación, f_p, antes de la convolución.

Las potencias a corto plazo de la carga del múltiplex para grupos secundarios y conjuntos más importantes se obtienen por convolución de las f.d.p. de grupo.

2.4 Los efectos del tráfico debidos a canales distintos de los vocales y a canales telefónicos no convencionales se tienen en cuenta si procede. Si tal tráfico se introduce a nivel del canal, por ejemplo, en sistemas multicanales de frecuencias vocales, o sistemas TASI, las f.d.p., $p(Z_{uc})$ quedarán modificadas en consecuencia antes de la convolución. Si se introduce a nivel del grupo primario, o superior, como en la transmisión de datos en banda ancha, quedarán modificadas antes de la convolución una o más de las f.d.p., $p(Z_g)$ de la potencia de grupo. En caso necesario, pueden incorporarse los efectos de los limitadores de grupo primario y grupo secundario, así como de la inclusión de tonos de la señal piloto, etc.

La f.d.p. final obtenida corresponde a la potencia a corto plazo en un solo sentido del múltiplex, $p(Z_{um})$. Esta f.d.p. se aplica únicamente, claro es, al sistema particular y a los tipos especiales de señalización y de tráfico para los cuales se ha determinado. Para sistemas de menor capacidad, se presentan algunas variaciones importantes en los diferentes periodos cargados pero, para sistemas más importantes, es probable que la variación sea relativamente pequeña.

2.5 Los principios antes enunciados permiten estimar la distribución de potencia de la carga del múltiplex. Existe otro procedimiento que conduce a resultados equivalentes que se basa en estadísticas de tensión, más bien que de la potencia, de sucesos similares y que permiten obtener una estimación de la distribución de las amplitudes instantáneas de la carga del múltiplex. Esta estimación tiene gran importancia cuando se trata de evaluar la probabilidad de sobrecarga de tensión de los amplificadores de un sistema determinado (véase, por ejemplo, el § 4).

3 Método 2 – Modelo de la potencia de cresta equivalente basado en la teoría de evaluación de la carga de Holbrook y Dixon (Origen: Philips' Telecommunicatie Industrie BV)

Según la teoría de Holbrook y Dixon el nivel de potencia instantánea máxima de la señal multicanal se obtiene mediante la adición del nivel de potencia equivalente de la señal multicanal L_m (el valor eficaz rebasado con una probabilidad del 1% teniendo en cuenta la distribución de los niveles de potencia de la señal en el canal activo y la actividad de cada canal) y del coeficiente de cresta multicanal $(\mathrm{MPF})_n$.

3.1 *Número de canales activos n*

La probabilidad de que durante la hora cargada cualquier canal transmita una señal se denomina «coeficiente de actividad», τ.

La probabilidad de que de los N canales que comprende el sistema exactamente n canales estén simultáneamente en actividad viene dada por la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) binominal:

$$p(n) = \frac{N}{n!\,(N-n)!} \quad \tau^n (1-\tau)^{N-n}$$

Si N no es demasiado pequeño, esta f.d.p. binominal puede aproximarse por una f.d.p. de distribución normal caracterizada por una media $\overline{n}$ y una desviación típica σ_n donde:

$$\overline{n} = N\tau \text{ y } \sigma_n = \sqrt{N\tau(1-\tau)}$$

El número de canales activos que es rebasado con una probabilidad del 1% viene dado por:

$$n = N\tau + 2{,}33 \sqrt{N\tau(1-\tau)}$$

3.2 *Nivel de la potencia equivalente de la señal de n canales L_m*

Si el nivel de potencia de la señal de un solo canal activo $L_t = 10 \log_{10} W_t$ tiene una f.d.p. con una distribución normal representada por $G(\overline{L_t}, \sigma_t)$, entonces la potencia W_t tiene una f.d.p. log-normal con un valor medio $\overline{W_t}$ y una desviación típica σ_{wt} dada por:

$$\overline{W_t} = \exp \left[c\overline{L_t} + ½ (c\sigma_t)^2 \right] \qquad \text{y}$$

$$\sigma_{wt} = \overline{W_t} \sqrt{\exp (c\sigma_t)^2 - 1}$$

donde

$c = 0{,}1 \ln 10 = 0{,}230$

La potencia media a largo plazo se expresa por:

$$W_0 = \overline{W_t} \cdot \tau$$

y el nivel de la potencia media a largo plazo por:

$$L_0 = 10 \log_{10} W_0 = \overline{L_t} + 0{,}115\, \sigma_t^2 + 10 \log_{10} \tau.$$

Si n no es demasiado pequeño, la potencia W_n de la suma de n canales activos tiene una f.d.p. con distribución normal caracterizada por $G(\overline{W}_n, \sigma_{wn})$

donde

$$\overline{W}_n = n\overline{W}_t \text{ et } \sigma_{wn} = \sigma_{wt} \sqrt{n}$$

Por tanto, el nivel de la potencia W_n que es rebasado con una probabilidad del 1%, denominado «nivel de potencia equivalente de la señal en n canales, L_m» se expresa por:

$$L_m = 10 \log_{10} (\overline{W}_n + 2{,}33\ \sigma_{wn}) = L_0 - 10 \log_{10} \tau + 10 \log_{10} \left\{ n + 2{,}33 \sqrt{n[\exp (0{,}23\ \sigma_t)^2 - 1]} \right\}$$

3.3 *Coeficiente de cresta multicanal*

Holbrook y Dixon han definido el coeficiente de cresta multicanal $(\mathrm{MPF})_n$ como la relación:

$$(\mathrm{MPF})_n = 20 \log_{10} \frac{\text{Tensión instantánea máxima rebasada con una probabilidad } \varepsilon}{\text{tensión eficaz}}$$

para n canales activos a volumen constante. No se determinó exactamente el valor de probabilidad ε que ha de utilizarse para el diseño satisfactorio del equipo, pero fue del orden de 10^{-4} ó 10^{-5}. El $(\mathrm{MPF})_n$ se determinó empíricamente como función de n, y una buena aproximación para dicha función viene dada por la expresión

$$(\mathrm{MPF})_n = 12{,}9 + [6/(1 + 0{,}07n)] \qquad \text{dB.}$$

3.4 *Potencia de cresta equivalente P_{eq}*

La potencia de cresta equivalente se define como la potencia de una sinusoide cuya amplitud máxima equivale a la tensión instantánea máxima de la señal de n canales activos. Así:

$$P_{eq} = L_m + (\mathrm{MPF})_n - 3 \text{ dBm0} = L_0 - 10 \log_{10} \tau + 10 \log_{10} \left\{ n + 2{,}33 \sqrt{[n\,(2 \exp 0{,}23\ \sigma_t - 1)]} \right\} + 9{,}9 + 6/(1 + 0{,}07\ n) \qquad \text{dBm0}$$

donde

$$n = N\tau + 2{,}33 \sqrt{[N\tau\,(1 - \tau)]}.$$

Introduciendo los valores convencionales de los parámetros, se tiene:

$L_0 = -15$ dBm0

$\sigma_t = 5{,}8$ dB

$\tau = 0{,}25$

la expresión para P_{eq} se convierte en:

$$P_{eq} = 10 \log_{10} (n + 5{,}17 \sqrt{n}) + 0{,}9 + 6/(1 + 0{,}07\ n) \qquad \text{dBm0}$$

donde

$$n = 0{,}25\ N + \sqrt{N}$$

Esta fórmula puede expresarse también en la siguiente forma:

$$P_{eq} = -5{,}1 + 10 \log_{10} N + 10 \log_{10} \left\{ 1 + \frac{4 + 10{,}34 \sqrt{1 + 4/\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \right\} + \frac{6}{1 + 0{,}07\,(\sqrt{N} + N/4)} \qquad \text{dBm0}$$

en la cual puede verse que para valores grandes de N, la expresión P_{eq} se aproxima a la asíntota

$$\lim_{N \to \infty} P_{eq} = -5{,}1 + 10 \log_{10} N \qquad \text{dBm0}$$

4 Método 3 – Modelo de la distribución de las tensiones instantáneas de señales MDF(Origen: Bell-Northern Research y Philips' Telecommunicatie Industrie BV)

Este modelo trata de la distribución de las amplitudes de señales telefónicas instantáneas en sistemas MDF multicanales. Se basa en el conocimiento de las amplitudes de las señales telefónicas, los niveles de potencia de la señal en cada canal y el factor de actividad.

4.1 *Función de densidad de probabilidad de la amplitud de señales telefónicas vocales*

La función de distribución de probabilidad para la tensión de señales telefónicas vocales normalizada con respecto a la tensión eficaz aparece dada por la fórmula:

$$P(r) = \frac{s}{\Gamma(m)} (sr)^{m-1} \exp(-sr) \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty$$

donde

$$r = \frac{|\text{ tensión instantánea }|}{\text{tensión eficaz}} = \frac{v}{u}$$

$$s = \sqrt{m(m+1)}$$

4.2 *Niveles de potencia media en cada canal*

La distribución de los niveles de potencia media de la señal telefónica en actividad puede representarse por la fórmula siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

donde

$x = 20 \log_{10} u$

$\bar{x}$ es el valor medio de x y σ es la desviación típica.

La distribución de u es log-normal:

$$g(u) = \frac{1}{u\sigma c\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(\ln u - c\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}$$

donde

$$c = \frac{1}{20} \ln 10 = 0{,}115$$

4.3 *Función de densidad de probabilidad de la amplitud de la señal aleatoria del canal telefónico*

Las fórmulas dadas en los § 4.1 y 4.2 pueden combinarse por convolución para obtener la distribución de las amplitudes de tensión instantánea del canal activo:

$$h(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} P(r)\, g(u)\, dr$$

4.4 *Función de densidad de probabilidad de la amplitud de la señal aleatoria del canal telefónico*

La distribución dada por la anterior fórmula del § 4.3 debe modificarse en función del factor de actividad para obtener la distribución de las amplitudes de tensión instantánea en un canal aleatorio. En el supuesto de una actividad de canal τ, y utilizando una función delta de Dirac para modelar el factor de actividad, la distribución $h(v)$ del § 4.3 queda modificada del siguiente modo:

$$p(v) = \tau \cdot h(v) + (1 - \tau)\,\delta(v)$$

donde

$\delta(v) = 1$ para $v = 0$

$\delta(v) = 0$ para $v \neq 0$.

4.5 *Limitación*

Para tomar en consideración los efectos de la limitación asociada con el modulador de canal (véase el § 8 de la Recomendación G.232) debe modificarse la distribución del § 4.4. Puede suponerse que cualquier tensión de señal en exceso del nivel límite a la entrada del modulador de canal aparecerá a la salida del modulador de canal al nivel límite, de modo que puede considerarse que la probabilidad total de tensiones de señal que excedan el nivel límite es la probabilidad de tensiones que aparezcan al nivel límite.

4.6 *Señales distintas de las vocales*

La distribución obtenida según el § 4.5 puede modificarse, si es preciso, para incluir señales distintas de las vocales. Si se repiten los anteriores procesos de los § 4.1 a 4.5 con expresiones apropiadas para la distribución de la tensión instantánea, la distribución del nivel de potencia media, el factor de actividad, etc., se obtendrá una distribución de las tensiones instantáneas distinta de la correspondiente a las señales vocales. Siempre que las apariciones de las distintas señales en un canal sean mutuamente excluyentes, las distribuciones pueden combinarse por adición de los elementos apropiados para obtener la distribución de tensiones instantáneas debida a todas las señales de un canal aleatorio.

4.7 *Función de densidad de probabilidad de la amplitud multicanal*

Si se toman convoluciones repetidas de la distribución del § 4.6, puede obtenerse la función de densidad de probabilidad de la amplitud multicanal, que se representa con la fórmula:

$$p_N(v) = p(v) * p(v) * p(v) \, ... \, N \text{ veces}$$

donde

N representa el número de canales y

* significa un proceso de convolución.

Alternativamente puede realizarse la combinación empleando la función característica de $p(v)$.

4.8 *Ejemplo de cálculos*

Se ha utilizado el procedimiento antes descrito para calcular el nivel de potencia de cresta equivalente atribuyendo valores a los parámetros utilizados en las distintas expresiones. Los cálculos se hicieron utilizando las dos series de parámetros dadas en el cuadro 1.

CUADRO 1

Valores supuestos para los distintos parámetros

Parámetro	m	$\bar{x}$	σ	τ	Valor límite
Valor (a)	0,2	– 12,9	5,8	0,25	+ 10 dBm0
(b)	1	– 15,1	6,4	0,35	+ 10 dBm0

El nivel de potencia de cresta equivalente P_{eq} para una probabilidad de sobrecarga de $\varepsilon = 10^{-5}$ puede expresarse como función del número N de canales del sistema para las dos series de parámetros (a) y (b), según se indica en el cuadro 2.

CUADRO 2

N	1	2	12	24	36	48	60	120	300	600	900	1800	2700	10800
P_{eq}(a)	7,0	9,3	12,7	13,7	14,6	15,3	15,9	17,7	20,4	22,8	24,3	26,9	28,6	34,4
P_{eq}(b)	7,0	8,3	11,7	13,1	14,1	14,8	15,4	17,4	20,4	23,0	24,6	27,5	29,1	35,1

La diferencia $P_{eq}(a) - P_{eq}(b)$ varía de 1,0 dB ($N = 12$) a $-0,7$ dB ($N = 10\,800$). Expresiones analíticas pueden ajustarse a los valores del cuadro con un índice de correlación $r = 0,9999$ y $r = 0,9998$, respectivamente:

$$\text{Serie de parámetros (a): } P_{eq} = 13 \left[10^{-0,18 (\log_{10} N)^{1,8}} \right] -6,0 + 10 \log_{10} N \quad \text{dBm0}$$

$$\text{Serie de parámetros (b): } P_{eq} = 12,3 \left[10^{-0,264 (\log_{10} N)^{1,53}} \right] -5,3 + 10 \log_{10} N \quad \text{dBm0}$$

Los dos últimos términos de cada una de estas expresiones representan el valor límite de P_{eq} para $N \rightarrow \infty$.

Bibliografía

HOLBROOK (B. D.) y DIXON (J. T.): Load rating theory for multi-channel amplifiers, *Bell System Technical Journal*, Vol. 18, N.° 4, pp. 624-644, octubre de 1939.

JACOBSEN (B. B.): The effect of non-linear distortion in multi-channel amplifiers, *Electrical Communication*, Vol. 19, N.° 1, pp. 29-54, 1940.

McADOO (K. L.): Speech volumes on Bell message circuits, *Bell System Technical Journal*, Vol. 42, N.° 5, pp. 1999-2012, septiembre de 1963.

RICHARDS (D. L.): Telecommunications by Speech, pp. 56-69, *Butterworth*, 1973.

de BOER (J.) y HOOIJKAMP (C.): The required load capacity of FDM multi-channel amplifiers, if single-channel peak limiting is employed, *Philips Telecommunications Review*, Vol. 38, N.° 1, pp. 27-36, 1980.

Ginebra, 2004