



UNION INTERNATIONALE DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

**UIT-T**

SECTEUR DE LA NORMALISATION  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS  
DE L'UIT

**Série G**

**Supplément 22**  
(10/1984)

SÉRIE G: SYSTÈMES INTERNATIONAUX  
ANALOGIQUES À COURANTS PORTEURS  
Caractéristiques des moyens de transmission

---

**Modèles mathématiques de signaux multiplex**

Recommandations UIT-T de la série G – Supplément 22

Publié à l'origine dans le Livre rouge (1984) - Fascicule III.2

---

## NOTES

1 Le Supplément 22 aux Recommandations de la série G a été approuvé à Málaga-Torremolinos (1984) et publié dans le fascicule III.2 du *Livre rouge*. Ce fichier est un extrait du *Livre rouge*. La présentation peut en être légèrement différente, mais le contenu est identique à celui du *Livre rouge* et les conditions en matière de droits d'auteur restent inchangées (voir plus loin).

2 Dans le présent Supplément, le terme «Administration» désigne indifféremment une administration de télécommunication ou une exploitation reconnue.

MODÈLES MATHÉMATIQUES DE SIGNAUX MULTIPLEX

*(Genève, 1980; mentionné dans la Recommandation G.223)*

**1 Introduction**

On peut définir les signaux qui représentent la charge multiplex d'un système MRF au moyen de la distribution de la puissance à court terme ou de la tension instantanée. Les valeurs de ces grandeurs varient avec le temps et il y a lieu de s'attendre à ce qu'elles varient sensiblement même au cours des périodes chargées de journées consécutives. Néanmoins, il serait très utile de pouvoir disposer d'un moyen de déterminer ne serait-ce qu'une distribution «moyenne» des valeurs en question au cours de la période chargée afin de s'assurer que les marges de planification sont maintenues en cas de modification de la charge du système par l'introduction de types différents de trafic. Pour être utile, toute estimation de la distribution de la charge multiplex doit être fondée sur des données primaires directement mesurables, ou obtenues d'une source suffisamment précise, de sorte qu'il soit possible de tenir compte d'une manière appropriée des effets de toute modification proposée dans les données. D'autre part, l'évaluation doit se faire de telle manière qu'une mesure directe de la distribution réelle soit possible et puisse servir à vérifier la validité des évaluations. On trouvera ci-après l'exposé de méthodes d'estimation qui satisfont à ces exigences.

Le § 2 décrit en termes généraux une méthode qui peut être utilisée pour calculer la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) des puissances de la charge multiplex à court terme. Le § 3 décrit une méthode mathématique fondée sur les travaux de Holbrook et Dixon.

Cependant, ces méthodes sont actuellement considérées comme inexactes pour les besoins d'une simulation par modèle. La mise en service d'ordinateurs numériques à grande vitesse a permis d'établir la méthode décrite au § 4; cette méthode fournit la meilleure solution pour calculer la distribution de la tension instantanée du signal multiplex.

## 2 Méthode 1 – Fonction de densité de probabilité des puissances de la charge multiplex à court terme

2.1 Les événements qui se produisent dans une voie unidirectionnelle d'un circuit à largeur de bande téléphonique peuvent se classer de la manière suivante:

- 1) conversations principales (*sm*);
- 2) conversations secondaires (ou auxiliaires) (*sa*);
- 3) signalisation (signaux numériques) (*zn*);
- 4) tonalités de surveillance (signaux de ligne) (*zl*);
- 5) divers (par exemple, données, écho) (*md*, *me*);
- 6) repos (*i*).

Des mesures des signaux de chacune de ces catégories, effectuées pendant un nombre de périodes chargées adéquates, fournissent des renseignements dont il est possible de tirer des paramètres définissant les propriétés statistiques de la charge de la voie.

Ces paramètres sont les suivants:

- 1) les divers coefficients d'activité globaux moyens  $\bar{\tau}$  (par exemple:  $\bar{\tau}_{sm}$ ,  $\bar{\tau}_{sa}$ ,  $\bar{\tau}_{zn}$ , etc.), qui définissent les fractions du temps pendant lesquelles les signaux de chacune des catégories produisent une puissance active au cours de la période chargée moyenne;
- 2) les diverses valeurs moyennes  $\bar{y}$  (par exemple:  $\bar{y}_{sm}$ ,  $\bar{y}_{sa}$ ,  $\bar{y}_{zn}$ , etc.) et les écarts types  $\sigma$  (par exemple:  $\sigma_{ysm}$ ,  $\sigma_{ysa}$ ,  $\sigma_{yzn}$ , etc.) des fonctions de densité de probabilité (f.d.p.) des niveaux de puissance active pour chaque catégorie.

2.2 On a calculé, pour chaque catégorie, la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) des puissances actives à court terme (20 ms) produites au cours d'une période chargée moyenne. Si l'on néglige l'éventualité de certaines conditions défectueuses, ces f.d.p. peuvent être considérées comme s'excluant mutuellement. Si l'on fait la somme des probabilités d'occurrence d'une puissance donnée dans toutes les catégories, on obtient la probabilité totale d'occurrence de ladite puissance pendant la période chargée moyenne. Cette f.d.p., représentée par  $p(Z_{uc})$ , donne une description statistique suffisante de la charge de la voie dans un seul sens.

On peut encore déterminer  $p(Z_{uc})$  par mesure directe. Cependant, on ne peut pas alors déterminer de façon simple l'effet d'une modification apportée à l'une quelconque des catégories sur la f.d.p.  $p(Z_{uc})$  totale.

2.3 Dans chacun des sens de transmission, un groupe primaire MRF se compose de 12 voies unidirectionnelles, dont chacune est caractérisée par une f.d.p.,  $p(Z_{uc})$ . Si, comme c'est le cas habituellement, les signaux dans chaque voie sont engendrés par des sources statistiquement analogues, les types de trafic écoulés par chaque voie se trouveront dans le même rapport; il suffira alors, dans bien des cas, de supposer que chacune des 12 f.d.p.,  $p(Z_{uc})$ , est représentée par la même f.d.p.,  $p(Z_{ic})$ , qui est la f.d.p. de la puissance dans la «voie type» du groupe primaire MRF.

Les f.d.p.,  $p(Z_{ic})$ , ne s'excluent évidemment pas mutuellement et la charge multiplex due aux 12 voies découle de la convolution de cette série de f.d.p. formant ainsi  $p(Z_g)$ . Si l'on utilise la préaccentuation dans la transmission, il suffit de multiplier la gamme de puissance de chaque f.d.p. par le facteur de préaccentuation approprié,  $f_p$ , avant la convolution.

Les f.d.p. des puissances à court terme de la charge multiplex pour des groupes secondaires et pour des ensembles plus importants sont obtenues par de nouvelles convolutions des f.d.p. de groupe.

2.4 Les effets du trafic provenant de voies autres que les voies de conversation et de téléphonie de type spécial peuvent être pris en considération selon les besoins. Si ces trafics sont introduits à l'étage de la voie – par exemple, dans les systèmes multivoies à fréquences vocales, les systèmes TASI – les f.d.p.,  $p(Z_{uc})$ , seront modifiées en conséquence avant la convolution. S'ils sont introduits à l'étage du groupe primaire ou à un étage supérieur – par exemple, pour la transmission de données à large bande – une ou plusieurs des f.d.p.  $p(Z_g)$  de puissance de groupe seront modifiées avant la convolution. Selon les besoins, on peut tenir compte des effets des limiteurs de groupe primaire et de groupe secondaire, ainsi que de l'inclusion d'ondes pilotes, etc.

La f.d.p. finalement obtenue est celle de la puissance multiplex à court terme dans une seule direction  $p(Z_{um})$ . Cette f.d.p. n'est évidemment applicable qu'au système particulier et aux types particuliers de signalisation et de trafic pour lesquels elle a été déterminée. Pour des systèmes de petite capacité, on trouvera des variations significatives dans les f.d.p. pour les différentes périodes chargées, tandis que, pour des systèmes plus importants, on peut s'attendre à une variation relativement faible.

2.5 Les principes énoncés ci-dessus permettent d'estimer la distribution de la puissance de la charge multiplex. Il existe un autre procédé conduisant à des résultats équivalents à partir des statistiques de la tension plutôt que de la puissance des mêmes catégories d'événements et qui fournit une estimation de la distribution des amplitudes instantanées de la charge multiplex. Cette estimation est de grande importance lorsqu'il s'agit d'évaluer la probabilité de surcharge de tension des amplificateurs d'un système donné (voir, par exemple, le § 4).

### 3 Méthode 2 – Modèle de puissance de crête équivalente fondé sur la théorie de la valeur nominale de la charge de Holbrook et Dixon (Origine: Philips' Telecommunicatie Industrie BV)

Dans la théorie de Holbrook et Dixon, on obtient la valeur maximale instantanée du niveau de puissance du signal multivoie en additionnant un niveau de puissance équivalent multivoie  $L_m$  (valeur quadratique moyenne dépassée avec une probabilité de 1%, compte tenu de la distribution des niveaux de puissance du signal actif et de l'activité de la voie) et un facteur de crête multivoie  $(FCM)_n$ .

#### 3.1 Nombre de voies actives, $n$

On désigne par l'expression «facteur d'activité»,  $\tau$ , la probabilité pour qu'une voie quelconque transmette un signal pendant l'heure chargée.

La probabilité pour que, dans un système à  $N$  voies,  $n$  voies exactement soient actives simultanément est donnée par la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) binomiale:

$$p(n) = \frac{N}{n! (N - n)!} \tau^n (1 - \tau)^{N - n}$$

Si  $N$  n'est pas trop petit, cette f.d.p. binomiale peut être exprimée en première approximation par une f.d.p. normale de moyenne  $\bar{n}$  et d'écart type  $\sigma_n$ , avec:

$$\bar{n} = N\tau \text{ et } \sigma_n = \sqrt{N\tau(1 - \tau)}$$

Le nombre des voies actives qui est dépassé par une probabilité de 1% est donné par:

$$n = N\tau + 2,33 \sqrt{N\tau(1 - \tau)}$$

#### 3.2 Le niveau de puissance du signal équivalent à $n$ voies, $L_m$

Supposons que le niveau de puissance du signal actif pour une seule voie ( $L_t = 10 \log_{10} W_t$ ) a une f.d.p. normale représentée par  $G(\bar{L}_t, \sigma_t)$ . Alors, la puissance  $W_t$  a une f.d.p. logarithmique normale de moyenne  $\bar{W}_t$  et d'écart type  $\sigma_{w_t}$ , donnée par:

$$\bar{W}_t = \exp \left[ c \bar{L}_t + \frac{1}{2} (c\sigma_t)^2 \right] \quad \text{et}$$

$$\sigma_{w_t} = \bar{W}_t \sqrt{\exp (c\sigma_t)^2 - 1}$$

où

$$c = 0,1 \ln 10 = 0,230.$$

La puissance moyenne à long terme est donnée par:

$$W_0 = \bar{W}_t \cdot \tau$$

et le niveau de la puissance moyenne à long terme est donné par:

$$L_0 = 10 \log_{10} W_0 = \bar{L}_t + 0,115 \sigma_t^2 + 10 \log_{10} \tau.$$

Si  $n$  n'est pas trop petit, la puissance  $W_n$  de l'ensemble de  $n$  voies actives a une f.d.p. normale représentée par  $G(\overline{W}_n, \sigma_{wn})$

où

$$\overline{W}_n = n\overline{W}_t \text{ et } \sigma_{wn} = \sigma_{wt} \sqrt{n}$$

Par conséquent, le niveau de la puissance  $W_n$  qui est dépassé avec une probabilité de 1% (appelé «niveau de puissance du signal équivalent à  $n$  voies,  $L_m$ »), est donné par:

$$L_m = 10 \log_{10} (\overline{W}_n + 2,33 \sigma_{wn}) = L_0 - 10 \log_{10} \tau + 10 \log_{10} \left\{ n + 2,33 \sqrt{n[\exp(0,23 \sigma_t)^2 - 1]} \right\}$$

### 3.3 Facteur de crête multivoie

Le facteur de crête multivoie (FCM) $_n$  a été défini comme suit par Holbrook et Dixon:

$$(\text{FCM})_n = 20 \log_{10} \frac{\text{tension instantanée maximale dépassée avec une probabilité } \varepsilon}{\text{tension quadratique moyenne}}$$

pour  $n$  voies actives à volume constant. On n'a pas déterminé rigoureusement la valeur de la probabilité  $\varepsilon$  à utiliser pour des équipements de bonne qualité, etc., mais on a trouvé que cette valeur est de l'ordre de  $10^{-4}$  ou  $10^{-5}$ . Le (FCM) $_n$  a été déterminé empiriquement comme une fonction de  $n$ ; l'expression suivante constitue une bonne approximation de cette fonction:

$$(\text{FCM})_n = 12,9 + [6/(1 + 0,07 n)] \quad \text{dB.}$$

### 3.4 Puissance de crête équivalente $P_{eq}$

La puissance de crête équivalente se définit comme la puissance d'un signal sinusoïdal dont l'amplitude maximale est égale à la tension instantanée maximale du signal fourni par  $n$  voies actives. On a donc:

$$\begin{aligned} P_{eq} &= L_m + (\text{FCM})_n - 3 \text{ dBm0} \\ &= L_0 - 10 \log_{10} \tau + 10 \log_{10} \left\{ n + 2,33 \sqrt{[n(2 \exp 0,23 \sigma_t - 1)]} \right\} + 9,9 + 6/(1 + 0,07 n) \quad \text{dBm0} \end{aligned}$$

où

$$n = N \tau + 2,33 \sqrt{[N \tau (1 - \tau)]}.$$

En portant dans cette expression les valeurs habituelles des paramètres:

$$L_0 = -15 \text{ dBm0}$$

$$\sigma_t = 5,8 \text{ dB}$$

$$\tau = 0,25$$

l'expression de  $P_{eq}$  devient:

$$P_{eq} = 10 \log_{10} (n + 5,17 \sqrt{n}) + 0,9 + 6/(1 + 0,07 n) \quad \text{dBm0}$$

où

$$n = 0,25 N + \sqrt{N}$$

Cette expression peut aussi s'écrire:

$$P_{eq} = -5,1 + 10 \log_{10} N + 10 \log_{10} \left\{ 1 + \frac{4 + 10,34 \sqrt{1 + 4/\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \right\} + \frac{6}{1 + 0,07 (\sqrt{N} + N/4)} \quad \text{dBm0}$$

et l'on voit que, pour des grandes valeurs de  $N$ , l'expression de  $P_{eq}$  tend vers une asymptote:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{eq} = -5,1 + 10 \log_{10} N \quad \text{dBm0}$$

#### 4 Méthode 3 — Modèle de distribution de la tension instantanée des signaux à multiplexage par répartition en fréquence (MRF) (Origine: Bell-Northern Research et Philips' Telecommunicatie Industrie BV)

Le modèle ci-dessous concerne la distribution des amplitudes instantanées des signaux téléphoniques dans les systèmes MRF. Il est fondé sur la connaissance de l'amplitude du signal téléphonique, des niveaux de puissance du signal sur chaque voie et du coefficient d'activité.

##### 4.1 Densité de probabilité de l'amplitude des signaux téléphoniques

La fonction de distribution de la probabilité pour la tension des signaux vocaux, normalisée par rapport à la tension efficace est donnée par la formule:

$$P(r) = \frac{s}{\Gamma(m)} (sr)^{m-1} \exp(-sr) \quad 0 \leq r \leq \infty$$

dans laquelle

$$r = \frac{|\text{tension instantanée}|}{\text{tension efficace}} = \frac{v}{u}$$

$$s = \sqrt{m(m+1)}$$

##### 4.2 Niveau de puissance moyenne du signal monovoie

La distribution des niveaux de puissance moyenne du signal téléphonique actif peut être représentée par l'expression:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{-(x - \bar{x})^2}{2 \sigma^2} \right]$$

dans laquelle

$$x = 20 \log_{10} u$$

$\bar{x}$  est la valeur moyenne de  $x$  et  $\sigma$  est l'écart type.

La distribution de  $u$  est une distribution logarithmique normale.

$$g(u) = \frac{1}{u\sigma c \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-(1nu - c\bar{x})^2}{2 \sigma^2} \right\}$$

où

$$c = \frac{1}{20} \ln 10 = 0,115$$

##### 4.3 Densité de probabilité d'amplitude sur une voie prise au hasard

Les expressions mentionnées aux § 4.1 et 4.2 peuvent être combinées par convolution afin de fournir la distribution des amplitudes de tension instantanée sur les voies actives:

$$h(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} P(r) g(u) dr$$

#### 4.4 Densité de probabilité d'amplitude sur une voie prise au hasard

La distribution donnée au § 4.3 doit être modifiée par le coefficient d'activité, afin d'obtenir la distribution des amplitudes de tension instantanée sur une voie prise au hasard. En supposant une activité de voie  $\tau$  et en utilisant une fonction Delta de Dirac pour établir un modèle du coefficient d'activité, la distribution  $h(v)$  est, par rapport à celle du § 4.3, modifiée ainsi:

$$p(v) = \tau \cdot h(v) + (1 - \tau) \delta(v)$$

où

$$\delta(v) = 1 \text{ pour } v = 0$$

$$\delta(v) = 0 \text{ pour } v \neq 0.$$

#### 4.5 Limitation

Afin de tenir compte des effets de la limitation associée au modulateur de voie (le § 8 de la Recommandation G.232), la distribution mentionnée au § 4.4 doit être modifiée. On peut admettre que toute tension de signal supérieure au niveau limite à l'entrée du modulateur de voie se traduira par le niveau limite à la sortie du modulateur de voie. Ainsi, la probabilité globale que la tension des signaux dépasse le niveau limite peut être considérée comme étant la probabilité des tensions qui se produisent au niveau limite.

#### 4.6 Signaux non téléphoniques

On peut modifier la distribution produite au § 4.5, si nécessaire, pour y inclure les signaux autres que téléphoniques. En répétant les opérations des § 4.1 à 4.5 avec des expressions appropriées pour la distribution de tension instantanée, la distribution du niveau de puissance moyenne, le coefficient d'activité, etc., on obtient la distribution des tensions instantanées autres que téléphoniques. A condition que les divers signaux s'excluent mutuellement sur une voie, les distributions peuvent être combinées par addition des éléments appropriés, afin d'obtenir la distribution des tensions instantanées dues à tous les signaux d'une voie prise au hasard.

#### 4.7 Densité de probabilité d'amplitude du signal multivoie

Par convolutions répétées de la distribution du § 4.6, la densité de probabilité d'amplitude du signal multivoie peut être obtenue. Cela peut être représenté par l'expression:

$$p_N(v) = p(v) * p(v) * p(v) \dots N \text{ fois}$$

dans laquelle

$N$  représente le nombre de voies et

\* le processus de convolution.

On peut aussi réaliser la combinaison à l'aide de la fonction caractéristique de  $p(v)$ .

#### 4.8 Exemple de calculs

La procédure décrite ci-dessus a été utilisée pour calculer le niveau de puissance équivalente de crête, en supposant des valeurs pour les paramètres utilisés dans les différentes expressions. Ces calculs ont été faits à l'aide des deux jeux de paramètres du tableau 1.

TABLEAU 1

Paramètre	m	$\bar{x}$	$\sigma$	$\tau$	Niveau limite
Valeur (a)	0,2	- 12,9	5,8	0,25	+ 10 dBm0
(b)	1	- 15,1	6,4	0,35	+ 10 dBm0

Le niveau de puissance équivalente de crête  $P_{eq}$  pour une probabilité de surcharge de  $\varepsilon = 10^{-5}$  peut s'exprimer comme une fonction du nombre de voies  $N$  du système pour les deux jeux (a) et (b) de paramètres indiqués au tableau 2.

TABLEAU 2

$N$	1	2	12	24	36	48	60	120	300	600	900	1800	2700	10800
$P_{eq}$ (a)	7,0	9,3	12,7	13,7	14,6	15,3	15,9	17,7	20,4	22,8	24,3	26,9	28,6	34,4
$P_{eq}$ (b)	7,0	8,3	11,7	13,1	14,1	14,8	15,4	17,4	20,4	23,0	24,6	27,5	29,1	35,1

La différence  $P_{eq}(a) - P_{eq}(b)$  varie de 1,0 dB ( $N = 12$ ) à -0,7 dB ( $N = 10\ 800$ ). Des expressions analytiques peuvent être adaptées aux valeurs du tableau avec une corrélation respective de  $r = 0,9999$  et  $r = 0,9998$ :

$$\text{Jeu de paramètres (a): } P_{eq} = 13 \left[ 10^{-0,18 (\log_{10} N)^{1,8}} \right] - 6,0 + 10 \log_{10} N \quad \text{dBm0}$$

$$\text{Jeu de paramètres (b): } P_{eq} = 12,3 \left[ 10^{-0,264 (\log_{10} N)^{1,53}} \right] - 5,3 + 10 \log_{10} N \quad \text{dBm0}$$

Les deux derniers termes de chaque expression représentent la valeur limite de  $P_{eq}$  pour  $N \rightarrow \infty$ .

### Bibliographie

HOLBROOK (B. D.) et DIXON (J. T.): Load rating theory for multichannel amplifiers, *Bell System Technical Journal*, Vol. 18, N° 4, pp. 624 à 644, octobre, 1939.

JACOBSEN (B. B.): The effect of non-linear distortion in multi-channel amplifiers, *Electrical Communication*, Vol. 19, N° 1, pp. 29 à 54, 1940.

McADOO (K. L.): Speech volumes on Bell message circuits, *Bell System Technical Journal*, Vol. 42, N° 5, pp. 1999 à 2012, septembre 1963.

RICHARDS (D. L.): Telecommunications by Speech, pp. 56 à 69, *Butterworth*, 1973.

de BOER (J.) et HOOJKAMP (C.): The required load capacity of FDM multichannel amplifiers if single-channel peak limiting is employed, *Philips Telecommunications Review*, Vol. 38, N° 1, pp. 27 à 36, 1980.

### Supplément n° 23

#### NOTES EXPLICATIVES À L'INTENTION DES INGÉNIEURS QUI ONT À FAIRE LE PROJET D'UN SYSTÈME MOBILE MARITIME À SATELLITES

(Genève, 1980; mentionné dans la Recommandation G.473)<sup>1)</sup>

## 1 Répartition des affaiblissements dans le système maritime

### 1.1 Respect des Recommandations

1.1.1 La figure 1 précise la terminologie adoptée dans ce supplément et illustre les dispositions relatives à une installation de navire commutée en deux fils.

<sup>1)</sup> Note du Secrétariat – On a adopté une révision des Recommandations G.111 [1] et G.121 [2] pour introduire la notion nouvelle d'équivalents de référence corrigés. Les valeurs des équivalents de référence sont maintenues dans le présent texte pour donner aux responsables des projets le temps de se familiariser avec la nouvelle notion.





