Groupe à Accessibilité Totale,

Système avec perte

(Solution de l'exercice)

De TETRAPRO, édité par Mr. H. Leijon, ITU

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

A = trafic offert = $\lambda \cdot \tau$ erl. où λ = Taux d'appel = Nombre espéré d'appels par unité de temps; τ = Temps moyen de prise exprimé de la même unité de temps.	TXA 1
λ = 1000 appels /heure τ = 90 sec. $A = \frac{1000 \cdot 90}{3600} = \underline{\underline{25 \text{ erl.}}}$	a
λ = 1200 appels /heure τ = 2 min. $\mathbf{A} = \frac{1200 \cdot 2}{60} = \underline{\underline{40 \text{ erl.}}}$	b
λ = 4 appels/sec. τ = 1.6 min. $A = 4 \cdot 1.6 \cdot 60 = \underline{\underline{384 \text{ erl.}}}$	c
A = 35 erl. τ = 140 sec. $\lambda = \frac{35}{140}$ appels/sec. $= \frac{35 \cdot 3600}{140} = \underline{\underline{900 \text{ appels / heure}}}$	TXA 2
A = 33 erl. λ = 1100 appels/heure $\tau = \frac{33 \cdot 3600}{1100} = \underline{\underline{108 \text{ sec.}}}$	TXA 3

TXA 4
a

n = Nombre de circuits = 10.

p = Nombre de circuits occupés.

t_p = Temps total durant la période avec exactement p circuits occupés.

T = Période totale. $\sum_{p=0}^{n} t_p = T$

A^1 = Trafic écoulé par le groupe durant la période.

$A^1 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{p=0}^{n} p \cdot t_p = \sum_{p=0}^{n} p \cdot \frac{t_p}{T}$

No. de circuits occupés P	Proportion du temps total avec exactement P équipements occupé t_p/T	$p \cdot \frac{t_p}{T}$
0	—	—
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—
5	0.10	0.50
6	0.20	1.20
7	0.25	1.75
8	0.15	1.20
9	0.20	1.80
10	0.10	1.00
Somme	$\sum \frac{t_p}{T} = 1.00$	$\sum p \cdot \frac{t_p}{T} = 7.45$

A^1 = 7.45 erl.

E = Temps de congestion durant la période = Proportion du temps, quand tous les circuits sont occupés

= $\frac{t_n}{T} = \frac{t_{10}}{T} = 0.10$

cont.

cont:
TXA 4
b

No. d'observation	Nombre de circuits occupés
1	8
2	8
3	**10**
4	**10**
5	9
6	7
7	7
8	6
9	5
10	5
Somme	**75**

A^1 = Trafic écoulé $\approx \frac{75}{10} = \underline{\underline{7.5 \text{ erl.}}}$

E = Temps de congestion $\approx \frac{2}{10} = \underline{\underline{0.20}}$

Distribution d'Erlang

TXA 5

λ = Taux d'appels

τ = Temps moyen de prise

A = Trafic offert = $\lambda \cdot \tau$

E = Temps de congestion = Congestion d'appel = B =

$$= \quad E_n(A) = \frac{A^n}{n!} \Big/ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A^\nu}{\nu!}$$

Où n = Nombre de circuits.
n = 10

Utilisant la table d'Erlang, on trouve:

A erl.	E_{10} (A)
1	0.0000
3	0.0008
5	0.0184
10	0.2146
15	0.4103
25	0.6224
50	0.8047
100	0.9011
200	0.9503
300	0.9668

Distribution d'Erlang — TXA 6

Voir exemple TXA 5

A = 10 erl.

Utilisant la table d'Erlang on trouve:

n	E_n (10)
1	0.9091
2	0.8197
3	0.7321
5	0.5640
7	0.4090
10	0.2146
15	0.0365
20	0.0019
25	0.0000
30	0.0000

Distribution d'Erlang — TXA 7

E_{20} (A) = 0.005

Utilisant la partie de la table d'Erlang où E est un paramètre d'entrée, on trouve:

A = 11.092 erl.

Distribution d'Erlang On veut chercher la plus petite valeur de n, nombre de circuits, pour lesquels $E_n(48) \leq 0.002$ Utilisant la partie de la table d'erlang où E est un paramètre d'entrée , on trouve $E_{66}(47.51) = 0.002$ $E_{67}(48.38) = 0.002$ On conclue que: n = 67 circuits L'autre partie de la table peut bien évidemment être utilisée parfaitement, mais dans ce cas l'interpolation devrait être faite.	TXA 8
Distribution d'Erlang n = Nombre de circuits = 18 λ = Taux d'appels = 480 appels/heure τ = Temps moyen de prise = 105 sec. A = Trafic offert = $\lambda \cdot \tau$ = = $\frac{480 \cdot 105}{3600} = 14$ erl. E = Temps de congestion B = Congestion d'appel E = B = $E_{18}(14)$ = 0.0628 (à partir de la table d'Erlang)	TXA 9 cont.

A^1 = Trafic écoulé = $A \cdot [1 - E_n(A)] =$

= $14 \cdot [1 - E_{18}(14)] = 14 \cdot [1 - 0.0628] = \underline{13.12 \text{ erl}}$

cont: TXA 9

a = Trafic moyen écoulé par circuit =

$$= \frac{A \cdot (1 - E_n(A))}{n} = \frac{A^1}{n} = \frac{13.12}{18} = \underline{0.729 \text{ erl.}}$$

Trafic rejeté = $A \cdot E_n(A)$

$= 14 \cdot E_{18}(14) = 14 \cdot 0.0628 = \underline{0.88 \text{ erl.}}$

Le nombre espéré d'appels rejetés par heure =

$= \lambda \cdot E_n(A) = 480 \cdot E_{18}(14) = 480 \cdot 0.0628 = \underline{30.1 \text{ appels / heure}}$

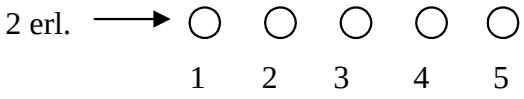
TXA 10

Distribution d'Erlang

n = 5 circuits

A = 2 erl.

a_v = Trafic écoulé par le v-ème circuit
(v = 1, 2, 3, 4, 5)



Recherche aléatoire :

$$\alpha_v = \frac{A \cdot (1 - E_n(A))}{n} = \frac{2 \cdot (1 - E_5(2))}{5} =$$

$$= \frac{2 \cdot (1 - 0.0367)}{5} = \underline{0.385 \text{ erl.} \quad (v = 1,2,3,4,5)}$$

cont.

Recherche séquentielle

cont:
TXA
10

$$a_\nu = A \cdot \left[E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)\right]$$

(ν = 1,2,3,4,5; E_0 (A) = 1 if A > 0)

Utilisant la table d'Erlang, on trouve

(E_0 (2) = 1)
E_1 (2) = 0.6667
E_2 (2) = 0.4000
E_3 (2) = 0.2105
E_4 (2) = 0.0952
E_5 (2) = 0.0367

$a_1 = 2 \cdot \left[E_0(2) - E_1(2)\right] = 2 \cdot \left[1 - 0.6667\right] = \underline{0.667 \text{ erl.}}$

$a_2 = \cdot 2 \cdot \left[E_1(2) - E_2(2)\right] = 2 \cdot \left[0.6667 - 0.4000\right] = \underline{0.533 \text{ erl.}}$

etc.

Résultat :

$a_1 = \underline{0.667 \text{ erl.}}$ $a_2 = \underline{0.533 \text{ erl.}}$ $a_3 = \underline{0.379 \text{ erl.}}$

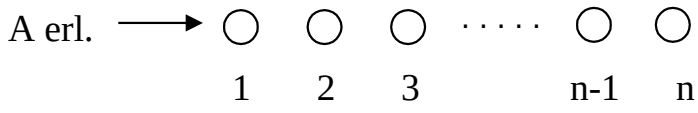
$a_4 = \underline{0.231 \text{ erl.}}$ $a_5 = \underline{0.117 \text{ erl.}}$

Noter que $\frac{1}{5} \cdot \sum_{\nu=1}^{5} a_\nu = \frac{1}{5} \cdot 1.927 = \underline{0.385 \text{ erl.}}$

On conclu que la valeur moyenne du trafic écoulé par circuit est le même pour la recherche séquentielle et celle aléatoire.

Distribution d'Erlang

TXA 11



(recherche séquentielle)

a_ν = Trafic écoulé par le v-ème circuit

$a_\nu = \cdot A \cdot \left[E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)\right]$

(ν = 1,2, ...n; $E_0(A) = 1$ if $A > 0$)

Soit a = Le trafic moyen écoulé par les différents circuits =

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} A \cdot \left[E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot A \cdot \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu(A) - \sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu(A) - E_n(A)\right] =$$

$$= \frac{A \cdot \left[1 - E_n(A)\right]}{n} =$$

= Le trafic écoulé par circuit dans un groupe avec recherche aléatoire, n circuits et trafic offert = A erl.

Distribution d'Erlang

TXA 12

E_{10} (A) = 0.005 donne A = 3.961 erl.
E_{100} (A) = 0.005 donne A = 80.91 erl.

(selon la table d'Erlang)

	n = 10	n = 100
A	3.961 erl.	80.91 erl.
E_n (A)	0.005	0.005
$A_1 = 1.1 \cdot A$	4.36 erl.	89.00 erl.
E_n (A_1)	0.009	0.024
$A_2 = 1.2 \cdot A$	4.75 erl.	97.09 erl
E_n (A_2)	0.014	0.059

Si "a" dénote le trafic écoulé par circuit, on trouve:

	n = 10	n = 100
A	a = 0.394	a = 0.805
$A_1 = 1.1 \cdot A$	a = 0.432	a = 0.869
$A_2 = 1.2 \cdot A$	a = 0.469	a = 0.914

Soit T la longueur de l'intervalle. La fonction de distribution F(x) est par définition: $F(x) = P\{T \le x\}$ Calculer la fonction de distribution complémentaire: $1 - F(x) = P\{T > x\}$	TXA 13
$0 < j < n$:	a
L'intervalle peut finir par un appel ou une terminaison. Alors T > x si 1) No appels dans (0, x) et 2) No terminaisons dans (0, x). La probabilité de 1) est $e^{-\lambda \cdot x}$ La probabilité de 2) est $e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}}$ Par conséquent, $1 - F(x) = e^{-\lambda \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}} = e^{-\frac{A+j}{\tau} \cdot x}$ $F(x) = 1 - e^{-\frac{A+j}{\tau} \cdot x}$ c. à .d. une distribution exponentielle avec le paramètre $\frac{A+j}{\tau}$	
La moyenne d'une variable aléatoire d'une distribution exponentielle est égale à l'inverse du paramètre c'est à dire $\frac{\tau}{A+j}$	b cont.

L'état fini par une transition à (j+1) si le premier événement est un appel.

cont: TXA 13 c

La probabilité conditionnelle pour que le premier événement est un appel qui se présente dans (x, x+dx) est

$$P\{\text{le premier événement est un appel} / \text{un appel arrive dans } (x, x+dx)\} =$$

$$P\{\text{pas de term. dans}(o,x), \text{pas d'appels dans}(o,x), \text{un appel dans}(x, x+dx)\} =$$

$$e^{-j\cdot\frac{x}{\tau}} \cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \lambda \cdot dx$$

Laissons à part la condition, par le théorème de la probabilité totale, la probabilité demandée p est

$$p = \int_0^\infty e^{-j\cdot\frac{x}{\tau}} \cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \lambda \cdot dx = \frac{\lambda}{\frac{A+j}{\tau}} = \underline{\underline{\frac{A}{A+j}}}$$

La probabilité pour que l'état fini par une transition à (j-1) est 1-p c'est à dire

$$1 - \frac{A}{A+j} = \underline{\underline{\frac{j}{A+j}}}$$

$\underline{\underline{j=0:}}$

$1 - F(x) = P\{\text{pas dappels dans } (o,x)\} = e^{-\lambda\cdot x}$ a

$F(x) = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda\cdot x}}}$

La valeur moyenne est l'inverse du paramètre = b

$$\underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

cont.

$P\{\text{état } (j=0) \rightarrow \text{état } (j=1)\} = \underline{\underline{1}}$ $P\{\text{état } (j=0) \rightarrow \text{état } (j=-1)\} = \underline{\underline{0}}$ $\underline{\underline{j=n}}$:	cont: TXA 13 c
$1-F(x) = P\{\text{pas de terminaison dans } (o,x)\} = e^{-n\cdot\frac{x}{\tau}}$ $F(x) = \underline{\underline{1-e^{-\frac{n\cdot x}{\tau}}}}$	a
Valeur moyenne = $\frac{\tau}{\underline{\underline{n}}}$	b
$P\{\text{état } (j=n) \rightarrow \text{état } (j=n+1)\} = \underline{\underline{0}}$ $P\{\text{état } (j=n) \rightarrow \text{état } (j=n-1)\} = \underline{\underline{1}}$	c
Dénotons la longueur de l'appel par X. $\underline{\text{Exactement 2 pulses si } 3 \le x < 6}$: $P\{3 \le x \le 6\} = F(6) - F(3) =$ $= \left(1-e^{-\frac{6}{3}}\right) - \left(1-e^{-\frac{3}{3}}\right) =$ $= e^{-1} - e^{-2} = 0.3679 - 0.1353 = \underline{\underline{0.2326}}$	TXA 14 a
$\underline{< 2 \text{ pulses si } x < 3}$: $P\{x < 3\} = 1-e^{-\frac{3}{3}} = 1-e^{-1} = \underline{\underline{0.6321}}$	b
$\underline{> 2 \text{ pulses si } x \ge 6}$: $P\{x \ge 6\} = e^{-\frac{6}{3}} = e^{-2} = \underline{\underline{0.1353}}$	c cont.

≥ 2 pulses si $x \geq 3$: $P\{x \geq 3\} = e^{-\frac{3}{3}} = e^{-1} = \underline{\underline{0.3679}}$ ≤ 2 pulses si $x < 6$: $P\{x < 6\} = 1 - e^{-\frac{6}{3}} = 1 - e^{-2} = \underline{\underline{0.8647}}$	cont: TXA 14 d e
Dénotons le nombre de pulses par K. $E\{K\} = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(e^{-\frac{(j-1)\cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j\cdot m}{\tau}} \right) =$ $= \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}}\right) + 2 \cdot \left(e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}}\right) + 3 \cdot \left(e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}}\right) + \ldots$ $= 1 - e^{-\frac{m}{\tau}} + 2 \cdot e^{-\frac{m}{\tau}} - 2 \cdot e^{-\frac{2m}{\tau}} + 3 \cdot e^{-\frac{2m}{\tau}} - 3 \cdot e^{-\frac{3m}{\tau}} + \ldots$ $= 1 + e^{-\frac{m}{\tau}} + e^{-\frac{2m}{\tau}} + e^{-\frac{3m}{\tau}} + \ldots$ = une série géométrique avec un quotient $e^{-\frac{m}{\tau}}$, alors la somme est $\frac{1}{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}} = \frac{e^{m/\tau}}{e^{m/\tau} - 1}$	TXA 15

K	Probabilité
1	$1 - e^{-\frac{m}{\tau}}$
2	$e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}}$
3	$e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}}$
⋮	⋮
j	$e^{-\frac{(j-1)\cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j\cdot m}{\tau}}$
⋮	⋮

Dénotons la longueur de conversation par X. $P\{x > 6\,\text{min.}\} = P\{x > 6 \text{ et } A \to B\} +$ $= P\{x > 6 \text{ et } B \to A\} +$ $= P_{A\to B} \cdot P\{x > 6/A \to B\} + P_{B\to A} \cdot P\{x > 6/B \to A\} =$ $= 0.55 \cdot e^{-\frac{6}{4}} + 0.45 \cdot e^{-\frac{6}{3}} = 0.55 \cdot e^{-1.5} + 0.45 \cdot e^{-2} =$ $= 0.55 \cdot 0.2231 + 0.45 \cdot 0.1353 = \underline{\underline{0.184}}$	TXA 16
Prenons une des conversations. La probabilité pour qu'il reste en progrès après une minute est $e^{-\frac{1}{3}}$ La probabilité pour qu'il finisse avant une minute est $1 - e^{-\frac{1}{3}}$ Les cinq conversations sont indépendantes les uns des autres. Alors le problème est similaire à la situation où on met 5 essais indépendants dans lesquels la probabilité de succès est constante. Dans cet exemple succès = conversation en progrès, alors par la distribution binomiale, la probabilité demandée est $\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^{5-2} =$ $= 10 \cdot 0.7165^2 \cdot 0.2835^3 = \underline{\underline{0.117}}$	TXA 17

$a_9 = \underline{\underline{A\left(E_8(A) - E_9(A)\right)}}$	TXA 18 a
$P_9 = \frac{A^9}{9!} \Big/ \sum_{j=0}^{10} \frac{A^j}{j!} = \underline{\underline{\frac{10}{A} \cdot E_{10}(A)}}$	b
$\underline{\underline{E_9(A)}}$	c
$P\{9 \text{ premiers circuits occupés}\} =$	d
$= P\{9 \text{ premiers occupés } \underline{\text{et}} \text{ le 10ème libre}\} +$	
$+ P\{9 \text{ premiers occupés } \underline{\text{et}} \text{ 10ème occupé}\}$	
Le côté gauche $= E_9(A)$.	
Le dernier terme sur RHS = $P\{\text{toutes les 10 occupées}\} = E_{10}(A)$.	
Par conséquent:	
$E_9(A) = P\{9 \text{ premiers occ. et le 10ème libre}\} + E_{10}(A)$	
et	
$P\{9 \text{ premiers occup. et le 10ème libre}\} = E_9(A) - E_{10}(A)$	

Comme le nombre de circuits est le même que le nombre de sources, il n'y a pas d'interférence entres les appels à partir des différentes sources. Le trafic offert devrait être écoulé. Alors le problème est similaire à une série de 6 expériences où la probabilité de succès dans chaque expérience est égale à la probabilité de trouver une source être occupée = 0.5 (comme chaque source offre 0.5 erl.)

TXA 19

$\underline{\text{Trafic offert}} = 6 \cdot 0.5 = \underline{3 \text{ erl.}}$

$\underline{\text{Temps de congestion}} = P\{\text{tous les 6 circuits sont occupés}\} =$

$= P\{\text{toutes les 6 sources sont occupées}\} = 0.5^6 = \underline{0.016}$

$\underline{\text{Congestion d'appel}} = 0$ comme il n'y a pas d'appels qui arrive quand tous les circuits sont occupés.

N = Nombre de sources. n= Nombre de circuits.

TXA 20

$\underline{N >> n \Rightarrow \text{Distribution d'Erlang:}}$

A = 3 erl.

$\underline{\text{Temps de congestion} = \text{Congestion d'appel} =}$

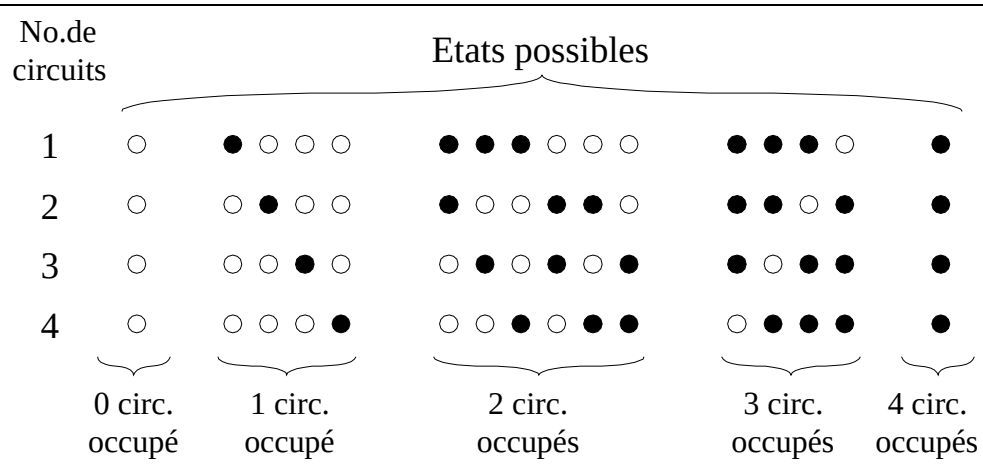
$= E_n(A) = E_6(3) = \underline{0.052}$

TXA 21

No. de sources N	No. de circuits n	Distribution	Trafic offert par source erl.	Trafic offert erl.	Conges-tion d'appel B	Conges-tion de temps E
6	6	BERNOULLI	0.5	3	0	0.016
∞	6	ERLANG	0	3	0.052	0.052

TXA 22

a



b

Nombre d'états avec exactement 0 circuit occupés = 1

-"- -"- -"- -"- -"- 1 -"- -"- = 4

-"- -"- -"- -"- -"- 2 -"- -"- = 6

-"- -"- -"- -"- -"- 3 -"- -"- = 4

-"- -"- -"- -"- -"- 4 -"- -"- = 1

c

Nombre total des différents états =

= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

d

Nombres d'états, quand le circuit no. 1 et no. 3 sont occupés = 4

TXA 23

1 2 3 4 5 n-1 n

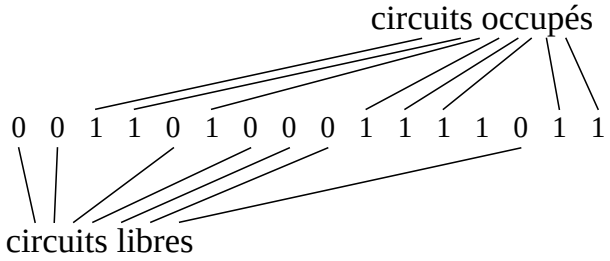
○ ○ ○ ○ ○----------○ ○

Les différents états sont (0), (1), (2) ..., (n), où (p) dénote p circuits occupés (p = 0,1,...n). a

Le nombre de différents états est alors $= n+1$.

On peut considérer une séquence de symboles, chacun d'eux est soit 0 ou 1, où 0 dénote un circuit libre et 1 un circuit occupé. b

Exemple:



On a deux possibilités pour chaque circuit, 0 ou 1.

Cependant il y a $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n facteurs}} = 2^n$ différentes séquences

et donc 2^n différents états.

Le nombre de différents états avec exactement p circuits engagés est le même que le nombre de combinaisons de **p** de **n** éléments. c

Ainsi, le nombre de différents états avec exactement p circuits engagés est

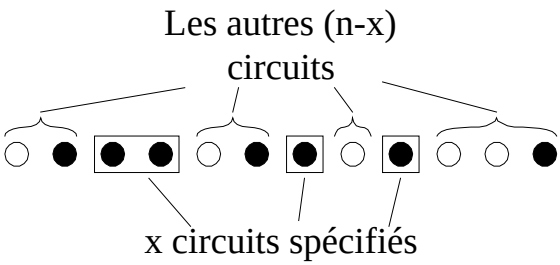
$$\binom{n}{p} \qquad (p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

Note:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n \text{(en comparaison avec b)}$$

cont.

cont:
TXA
23
d



Dans tous les p circuits engagés, quand $p \geq x$. Parmi les (n-x) circuits, il y a donc (p-x) circuits engagés. Analogiquement à c) on peu dons statuer:

Le nombre de différents états avec X circuits spécifiques engagés et, simultanément, p circuits engagés est

$$\binom{n-x}{p-x}$$

$$(p = x, x+1, \ldots, n; \quad x = 0,1,\ldots,n)$$

$[p] = P\{\text{exactement tout p circuits sont engagés}\}.$ e

$(p = 0,1,\ldots,n).$

Un état spécifique avec exactement p circuits engagés a la probabilité

$$\frac{[p]}{\binom{n}{p}}$$

Si on a la recherche séquentielle, comme il y a dans tous les $\binom{n}{p}$ états différents avec exactement p circuits engagés selon c) et comme tous ces différents états devraient avoir une et la même probabilité.

cont.

Dans le but de chercher

$$h(x,p) = P\{x \text{ circuits spécifiés engagés, et, simultanément, exactement p circuits engagés}\}$$

on devrait donc ajouter un certain nombre de probabilités égales,

nomées $\frac{[p]}{\binom{n}{p}}$; ce nombre est selon d), $\binom{n-x}{p-x}$.

Cependant,

$$h(x,p) = \binom{n-x}{p-x} \cdot \frac{[p]}{\binom{n}{p}} \qquad (p = x, x+1, \ldots, n)$$

Maintenant, on a que

$$H(x) = P\{x \text{ circuits spécifiques engagés}\}$$

devraient être égaux à

$$H(x) = \sum_{p=x}^{n} h(x,p)$$

alors le résultat est:

$$H(x) = \sum_{p=x}^{n} \binom{n-x}{p-x} \cdot \frac{[p]}{\binom{n}{p}}$$

cont: TXA 23 e

La probabilité que 3 circuits spécifiés sont engagés = la probabilité que 3 sources spécifiées sont engagées = la probabilité de succès dans trois essais de 6 expériences indépendantes où la probabilité de succès = 0,5 dans chaque essai, c'est à dire $\underline{\underline{0.5^3}} = 0.125$	TXA 24
<u>Distribution d'Erlang:</u> $H(x) = \frac{E_n(A)}{E_{n-x}(A)}$ n = 6 ; A = 3 erl; x = 3 $H(3) = \frac{E_6(3)}{E_3(3)} = \frac{0.052157}{0.346154} = \underline{\underline{0.151}}$	TXA 25