

Международный союз электросвязи

МСЭ-R
Сектор радиосвязи МСЭ

Рекомендация МСЭ-R TF.538-4
(07/2017)

**Меры случайных нестабильностей
частоты и времени (фазы)**

Серия TF
Передача сигналов времени и эталонных частот



Международный
союз
электросвязи

Предисловие

Роль Сектора радиосвязи заключается в обеспечении рационального, справедливого, эффективного и экономичного использования радиочастотного спектра всеми службами радиосвязи, включая спутниковые службы, и проведении в неограниченном частотном диапазоне исследований, на основании которых принимаются Рекомендации.

Всемирные и региональные конференции радиосвязи и ассамблеи радиосвязи при поддержке исследовательских комиссий выполняют регламентарную и политическую функции Сектора радиосвязи.

Политика в области прав интеллектуальной собственности (ПИС)

Политика МСЭ-R в области ПИС излагается в общей патентной политике МСЭ-T/МСЭ-R/ИСО/МЭК, упоминаемой в Приложении 1 к Резолюции МСЭ-R 1. Формы, которые владельцам патентов следует использовать для представления патентных заявлений и деклараций о лицензировании, представлены по адресу: <http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en>, где также содержатся Руководящие принципы по выполнению общей патентной политики МСЭ-T/МСЭ-R/ИСО/МЭК и база данных патентной информации МСЭ-R.

Серии Рекомендаций МСЭ-R

(Представлены также в онлайн-форме по адресу: <http://www.itu.int/publ/R-REC/en>.)

Серия	Название
BO	Спутниковое радиовещание
BR	Запись для производства, архивирования и воспроизведения; пленки для телевидения
BS	Радиовещательная служба (звуковая)
BT	Радиовещательная служба (телевизионная)
F	Фиксированная служба
M	Подвижные службы, служба радиоопределения, любительская служба и относящиеся к ним спутниковые службы
P	Распространение радиоволн
RA	Радиоастрономия
RS	Системы дистанционного зондирования
S	Фиксированная спутниковая служба
SA	Космические применения и метеорология
SF	Совместное использование частот и координация между системами фиксированной спутниковой службы и фиксированной службы
SM	Управление использованием спектра
SNG	Спутниковый сбор новостей
TF	Передача сигналов времени и эталонных частот
V	Словарь и связанные с ним вопросы

Примечание. – Настоящая Рекомендация МСЭ-R утверждена на английском языке в соответствии с процедурой, изложенной в Резолюции МСЭ-R 1.

Электронная публикация
Женева, 2018 г.

© ITU 2018

Все права сохранены. Ни одна из частей данной публикации не может быть воспроизведена с помощью каких бы то ни было средств без предварительного письменного разрешения МСЭ.

РЕКОМЕНДАЦИЯ МСЭ-R TF.538-4

Меры случайных нестабильностей частоты и времени (фазы)

(1978-1990-1992-1994-2017)

Сфера применения

Нестабильности частоты и фазы можно описать в виде случайных процессов, представимых статистически в частотной области (спектр Фурье) или временной области. В настоящей Рекомендации представлены различные методы и приемы их описания.

Ключевые слова

Случайные нестабильности, дисперсия Аллана, временные измерения, статистические меры, фаза, частота

Ассамблея радиосвязи МСЭ,

учитывая,

- a) что существует потребность в надлежащих способах описания характеристик нестабильности стандартных источников частоты и времени, а также систем измерения;
- b) что классическая дисперсия не сходится применительно к некоторым видам случайных нестабильностей частоты и времени;
- c) что крупные лаборатории, обсерватории, отрасли и обычные пользователи уже внедрили некоторые Рекомендации Технического комитета по частоте и времени Общества приборостроения и измерений IEEE и что существует стандарт IEEE 1139-2008 Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology – Random instabilities (Стандартные определения IEEE физических величин, подлежащие применению в фундаментальной метрологии для частотных и временных измерений. Случайные нестабильности);
- d) что меры нестабильности частоты и времени должны иметь под собой прочную теоретическую основу, быть удобными в использовании и пригодными для непосредственного толкования;
- e) что желательно иметь такие меры нестабильности частоты и времени, которые можно получить с помощью простых измерительных приборов.

рекомендует

1 описывать случайные нестабильности стандартных сигналов времени и частоты с помощью статистических мер $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ или $S_x(f)$ в частотной области, а также $\sigma_y(\tau)$, Mod. $\sigma_y(\tau)$, $\sigma_x(\tau)$, $\sigma_y(t, \tau)$ и TheoBR во временной области, как определено ниже:

1.1 в качестве меры нормированных нестабильностей частоты $y(t)$ в частотной области принимается $S_y(f)$ – односторонняя спектральная плотность ($0 < f < \infty$) нормированных нестабильностей частоты $y(t) = (\nu(t) - \nu_0)/\nu_0$, где $\nu(t)$ – мгновенное значение несущей частоты, а ν_0 – номинальное значение частоты;

1.2 в качестве меры нестабильностей фазы $\phi(t)$ в частотной области принимается $S_\phi(f)$ – односторонняя спектральная плотность ($0 < f < \infty$) нестабильностей фазы $\phi(t)$ на частоте Фурье f ;

1.3 в качестве меры нестабильностей фазы $x(t)$, выраженной во временных (фазовременных) единицах, в частотной области принимается $S_x(f)$ – односторонняя спектральная плотность ($0 < f < \infty$) фазовременных нестабильностей $x(t)$, где $x(t) = \phi(t)/2\pi\nu_0$; а $x(t)$ и $y(t)$ связаны соотношением $y(t) = dx(t)/dt$;

1.4 указанные выше спектральные плотности связаны между собой следующим соотношением:

$$\text{Error!} \quad (1)$$

(размерность $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ и $S_x(f)$ соответственно $\Gamma\text{ц}^{-1}$, $\text{рад}^2\Gamma\text{ц}^{-1}$ и $\text{с}^2\Gamma\text{ц}^{-1}$);

1.5 в качестве меры нормированных нестабильностей частоты $y(t)$ во временной области принимается двухвыборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma_y(\tau)$, модифицированное двухвыборочное среднеквадратическое отклонение Mod. $\sigma_y(\tau)$ и дисперсия TheoBR, как определено в Приложении 1;

1.6 в качестве меры временной нестабильности во временной области принимается $\sigma_x(\tau)$, как определено в Приложении 1;

1.7 в качестве меры вариации нормированной нестабильности частоты $y(t)$ во временной области принимается двухвыборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma_y(t, \tau)$, как определено в Приложении 1;

2 при заявлении статистических мер нестабильности частоты и времени учитывать неслучайные эффекты, например:

2.1 сообщать о временной зависимости статистических мер, если таковая наблюдается;

2.2 указывать метод измерения систематических погрешностей (например, сообщать, что оценка линейного дрейфа частоты была получена из коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов по M измеренным значениям частоты, указав для каждого значения время усреднения или выборки τ и полосу пропускания f_h);

2.3 сообщать о чувствительности к внешним факторам (например, о зависимости частоты и/или фазы от температуры, напряженности магнитного поля, барометрического давления и т. д.);

3 при заявлении той или иной меры нестабильности частоты и времени указывать все представляющие интерес параметры измерения, как-то:

3.1 метод измерения;

3.2 характеристики эталонного сигнала;

3.3 номинальное значение частоты сигнала ν_0 ;

3.4 полосу пропускания измерительной системы f_h и АЧХ соответствующего фильтра нижних частот;

3.5 полное время измерения или число измерений M ;

3.6 методы выполнения расчетов (например, сведения о корреляционных окнах, использовавшихся при оценке спектральной плотности мощности по данным во временной области, или предположение о влиянии интервала нечувствительности на оценку двухвыборочного среднеквадратического отклонения $\sigma_y(\tau)$);

3.7 доверительный интервал оценки;

4 приводить графики или аналитические выражения для мер нестабильностей частоты и времени с указанием доверительных интервалов, когда это уместно (например, зависимость $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ и $S_x(f)$ от f , зависимость $\sigma_y(\tau)$, Mod. $\sigma_y(\tau)$ и $\sigma_x(\tau)$ от τ и/или зависимость $\sigma_y(t, \tau)$ от t и τ).

Приложение 1

Описание частотного и фазового шума

1 Определение терминов

Нестабильности частоты и фазы можно описать в виде случайных процессов, представимых статистически в частотной области (спектр Фурье) или временной области. Нормированное мгновенное отклонение частоты $y(t)$ от номинального значения частоты ν_0 связано с мгновенным отклонением фазы $\varphi(t)$ от номинального значения фазы $2\pi\nu_0 t$ соотношением

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0}, \quad (2)$$

где $x(t)$ – вариация фазы, выраженная во временных единицах.

2 Частотная область (спектр Фурье)

В частотной области нестабильность частоты можно выразить через несколько односторонних (определенных на диапазоне Фурье-частот от 0 до ∞) спектральных плотностей:

$$S_y(f) \text{ от } y(t), S_{\varphi}(f) \text{ от } \varphi(t), S_{x,\varphi}(f) \text{ от } x(t), S_x(f) \text{ от } x(t) \text{ и т. д.}$$

Эти спектральные плотности связаны между собой следующими соотношениями:

$$S_{x,\varphi}(f) = S_{\varphi}(f) \quad (3)$$

$$S_{x,\varphi}(f) = (2\pi f)^2 S_{\varphi}(f); \quad (4)$$

$$S_x(f) = S_{x,\varphi}(f) \quad (5)$$

Степенные функции спектральной плотности мощности часто используются в качестве приемлемой модели случайных флуктуаций в прецизионных генераторах. На практике установлено, что для многих генераторов эти случайные флуктуации представляют собой сумму пяти независимых шумовых процессов, и с некоторыми оговорками справедлива следующая формула:

$$S_{x,\varphi}(f) = \sum_{\alpha=1}^5 h_{\alpha} f^{-\alpha} \quad (6)$$

где h_{α} – константы, α – целые числа, а f_h – частота среза фильтра нижних частот. Формулы (3), (4) и (5) справедливы и непротиворечивы для стационарных шумов, включая фазовый шум. Отклонения на высоких частотах устраняются путем наложения ограничений на f в формуле (6). Пять шумовых процессов, о которых идет речь выше, перечислены и характеризованы в таблице 1, а также проиллюстрированы на рисунке 1. На практике двух или трех шумовых процессов обычно оказывается достаточно для описания случайных флуктуаций частоты в конкретном генераторе, а остальными процессами можно пренебречь.

3 Временная область

Случайную нестабильность частоты во временной области можно описать несколькими видами выборочной дисперсии. Квадратный корень из выборочной дисперсии называется отклонением, и именно его обычно сообщают в качестве статистической характеристики.

А Аллановское отклонение $\sigma_y(\tau)$

Мерой случайной нестабильности частоты служит двухвыборочное среднеквадратическое отклонение, равное корню квадратному из двухвыборочной дисперсии $\sigma_y^2(\tau)$ с нулевым интервалом нечувствительности, которая определяется следующим образом:

$$\sigma^{2,y}(\tau) = 1/2 \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle, \quad (7)$$

где:

Error! и $t_{k+1} = t_k + \tau$ (соседние выборки).

Символами $\langle \rangle$ обозначается усреднение за бесконечное время. Меру, выраженную формулой (7), часто называют дисперсией Аллана (AVAR). За x_k и x_{k+1} обозначены оставшиеся после вычитания измеренные значения времени, полученные в моменты t_k и $t_{k+1} = t_k + \tau$, $k = 1, 2, \dots$, а $1/\tau$ – фиксированная частота выборки, дающая нулевой интервал нечувствительности между измерениями частоты. Слова "оставшиеся после вычитания" подразумевают, что известные систематические эффекты устранены.

Если начальная частота выборки задана как $1/\tau_0$, то обычно можно получить более эффективную оценку $\sigma_y(\tau)$, используя так называемую перекрывающуюся оценку с помощью уравнения (8):

Error! (8)

где N – число исходных измеренных значений временного отклонения, полученных с интервалом τ_0 ($N = M + 1$, где M – число исходных измеренных значений частоты с временем выборки τ_0) и $\tau = n\tau_0$.

Показано, что если между соседними измерениями отклонения частоты существует интервал нечувствительности и им пренебрегают при вычислениях по формуле (7), то результирующие значения нестабильности, уже не являющиеся в таком случае аллановской дисперсией, будут смещены (кроме случая белого частотного шума) в результате перегруппировки измеренных значений частоты для оценки нестабильности на промежутке $n\tau_0$ ($n > 1$). Это смещение изучено, и опубликован ряд таблиц поправок для его учета.

Если интервал нечувствительности отсутствует, то из исходных значений \bar{y}_i можно скомбинировать набор \bar{y}_k :

Error!

ТАБЛИЦА 1

Функциональные характеристики пяти независимых шумовых процессов, используемых для оценки нестабильности частоты генераторов

Вид шумового процесса	Параметры крутизны билогарифмического графика				
	Частотная область		Временная область		
	$S_y(f)$	$S_\phi(f)$ или $S_x(f)$	$\sigma^{2,y}(\tau)$	Mod. $\sigma^{2,y}(\tau)$	$\sigma^{2,x}(\tau)$
	α	$\beta \equiv \alpha - 2$	μ	μ'	η
Случайный уход частоты	-2	-4	1	1	3
Частотный фликер-шум	-1	-3	0	0	2
Частотный белый шум	0	-2	-1	-1	1
Фазовый фликер-шум	1	-1	-2	-2	0
Фазовый белый шум	2	0	-2	-3	-1

$$S_y(f) = h_\alpha f^\alpha \quad \alpha = -\mu - 1, \quad -2 \leq \mu < 2 \quad \sigma^{2,y}(\tau) \sim |\tau|^\mu;$$

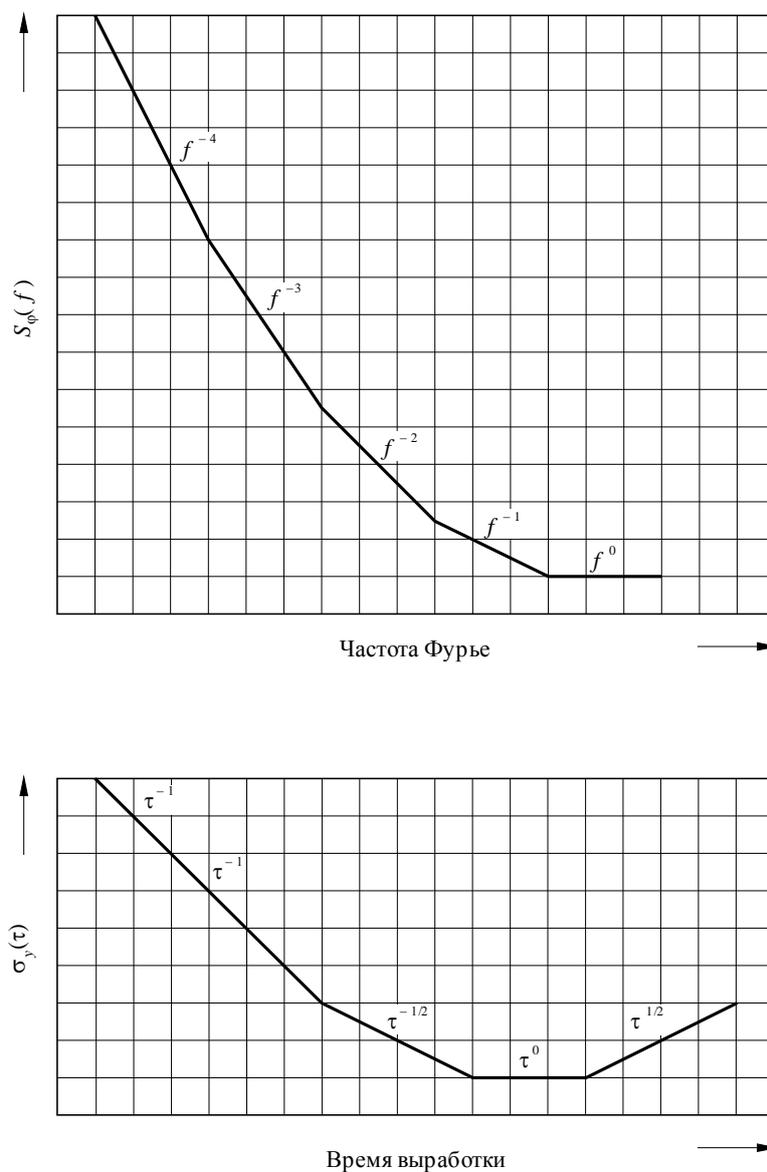
$$S_\phi(f) = v^{2,0} h_\alpha f^{\alpha-2} = v^{2,0} h_\alpha f^\beta \quad \beta \equiv \alpha - 2; \quad \eta \equiv \mu' + 2$$

$$\text{Mod. } \sigma^{2,y}(\tau) \sim |\tau|^{\mu'}$$

$$S_x(f) = \text{Error!} \quad \alpha = -\mu' - 1 \quad \text{Error!}(\tau) \sim \text{Error!}$$

РИСУНОК 1

Характеристики наклона кривых пяти независимых шумовых процессов
(билогарифмическая шкала)



ТФ.0538-01

Отсюда можно получить перекрывающуюся оценку $\sigma_y(\tau)$:

$$\text{Error!} \quad (9)$$

Таким образом можно очень простым способом установить зависимость $\sigma_y(\tau)$ от τ по одному набору данных.

График зависимости $\sigma_y(\tau)$ от τ для эталона частоты состоит, как правило, из нескольких характерных элементов, показанных на рисунке 1. Первая его часть с $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1/2}$ (частотный белый шум) и/или $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$ (фазовый белый или фликер-шум) отражает фундаментальные шумовые характеристики эталона. В случае когда $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$, на практике не представляется возможным определить, какой из видов фазового шума – белый шум или фликер-шум – воздействует на генератор.

Ниже рекомендуются другие варианты действий. Это ограничивает информативность $\sigma_y(\tau)$, когда стоит задача изучить характер имеющихся источников шума в генераторе. На частотах Фурье выше 1 Гц обычно более адекватные результаты дает анализ в частотной области. Пропорциональность τ^{-1} и/или $\tau^{-1/2}$ сохраняется с увеличением времени усреднения, пока не будет достигнут так называемый

пороговый уровень фликер-шума, когда $\sigma_y(\tau)$ перестает зависеть от времени усреднения τ . Такой эффект наблюдается почти во всех эталонах частоты и зависит от особенностей конкретного эталона; физические его основы не до конца изучены. Примеры факторов, которые могут определять пороговый уровень фликер-шума – флуктуации напряжения электропитания и магнитного поля, изменение параметров электронных компонентов эталона, а также изменение мощности в диапазоне СВЧ. Наконец, кривая демонстрирует снижение стабильности с увеличением времени усреднения. Это происходит, как правило, на интервалах от нескольких часов до нескольких дней, в зависимости от конкретного вида эталона.

В Модифицированное аллановское отклонение Mod. $\sigma_y(\tau)$

Так называемая модифицированная дисперсия Аллана (MVAR) Mod. $\sigma^{2,y}(\tau)$ отличается тем, что дает разную зависимость от τ для фазового белого и фликер-шума. Модифицированное аллановское отклонение (MDEV) $\sigma_y(\tau)$ для этих видов шума пропорционально $\tau^{-3/2}$ и τ^{-1} соответственно. Mod. $\sigma_y(\tau)$ оценивается как квадратный корень из выражения в правой части следующей формулы:

$$\text{Error!} \quad (10)$$

где:

- N – исходное число измерений временного отклонения, выполненных с интервалом τ_0 ;
- τ – $n\tau_0$ – заданное время выборки.

Свойства и надежность этой оценки рассматриваются в технической литературе. Разработаны способы оценивания $\sigma_y(\tau)$ методом максимального правдоподобия для конкретных моделей белого шума и случайного ухода частоты. Показана пригодность этих двух моделей при времени выборки, превышающем несколько секунд, для оценки нестабильности цезиевых эталонов.

С Временное отклонение $\sigma_x(\tau)$

Временную нестабильность во временной области, обусловленную пятью независимыми шумовыми процессами (рисунок 1), можно измерить с помощью конечной разности второго порядка соседних усредненных по времени значений. Эта мера также связана с Mod. $\sigma^{2,y}(\tau)$:

$$\sigma^{2,x}(\tau) = (\tau^2 \text{Mod. } \sigma^{2,y}(\tau)) / 3; \quad (11)$$

$$\sigma^{2,x}(\tau) = (1/6) \langle [\bar{x}_{k+2n} - 2\bar{x}_{k+n} + \bar{x}_k]^2 \rangle, \quad (12)$$

где $(dx/dt) = y$ и $\tau = n\tau_0$. Таким образом, $\sigma_x(\tau)$ – это временное отклонение (TDEV). Символами $\langle \rangle$ обозначается усреднение за бесконечное время, а верхней чертой над x – усреднение по интервалу времени τ . Во втором разностном уравнении берется три соседних средних значения, поэтому при заданном значении k они занимают промежутки в 3τ .

Для спектральной плотности и временной дисперсии действуют следующие соотношения:

$$S_x(f) \sim f^\beta;$$

$$\sigma^{2,x}(\tau) \sim \tau^\eta; \quad (13)$$

$$\beta = -\eta - 1.$$

Поскольку присутствующие обычно типы измерительного шума сосредоточены вокруг $\eta = 0$, TVAR дает практически нулевую зависимость от τ (что желательно для хорошей меры). Другие полезные характеристики этой меры:

- она совпадает с обычновенным среднеквадратическим отклонением измеренных значений разности времен при $\tau = \tau_0$ в случае фазовой модуляции белым шумом (WPM);
- она совпадает со среднеквадратическим отклонением выборочного среднего измеренных значений разности времени при $\tau = N\tau_0$ (длина данных) в случае фазовой модуляции белым шумом (WPM);
- она конвергентна и характеризуется регулярным поведением применительно к случайным процессам, с которыми обычно приходится иметь дело при измерениях времени и частоты;
- зависимость от τ указывает на модельную степенную функцию спектральной плотности, подходящую для имеющихся данных;
- амплитуда $\sigma_x(\tau)$ при конкретном значении τ в предположении одной из пяти моделей на базе степенной функции спектральной плотности ($\beta = -4, -3, -2, -1, 0$) предоставляет достаточно информации для оценки соответствующего уровня в частотной области для любой эталонной меры, основанной на функции спектральной плотности.

В ходе исследования задачи оценки стабильности отдельных тактовых генераторов по данным сравнительных измерений была предложена общая внутренне согласованная модель обработки результатов разностных измерений сигнала, не содержащая априорных предположений об отсутствии корреляции между генераторами.

D **Динамическое аллановское отклонение $\sigma_y(t, \tau)$**

Динамическое аллановское отклонение (DADEV) – мера вариации случайной нестабильности частоты во временной области, равная корню квадратному из динамической аллановской дисперсии (DAVAR), которая определена следующим образом:

$$\sigma_y^2(t, \tau) = \frac{1}{2(T_w - 2\tau)} \int_{t - \frac{T_w + \tau}{2}}^{t + \frac{T_w - \tau}{2}} \mathcal{E} \left[(\bar{y}(t' + \tau) - \bar{y}(t'))^2 \right] dt', \quad (14)$$

где \mathcal{E} – математическое ожидание, полученное усреднением по бесконечному ансамблю реализаций, а T_w – ширина окна анализа. Оценку DAVAR можно получить по следующей формуле:

$$\sigma_y^2(n, k) = \frac{1}{2k^2 \tau_0^2 (N_w - 2k)} \sum_{m=n - \frac{N_w}{2}}^{m=n + \frac{N_w}{2} - 2k - 1} (x_{m+2k} - 2x_{m+k} + x_m)^2, \quad (15)$$

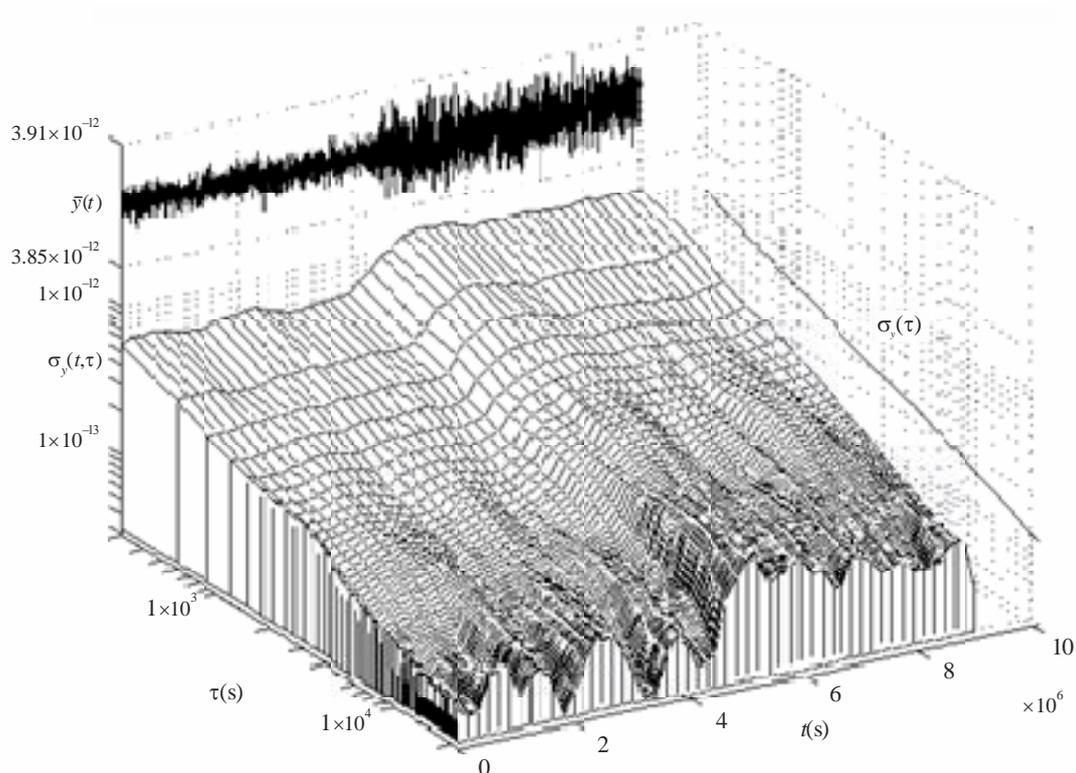
где $t = n\tau_0$, $\tau = k\tau_0$, $T_w = N_w\tau_0$ и N_w предполагается четным.

Данные экспериментов показывают, что нестабильность генераторов, эталонной мерой для которых служит аллановская дисперсия, может меняться со временем под влиянием ряда факторов, таких как температура, влажность, вибрация, гравитационные явления и излучения. Динамическая аллановская дисперсия (DAVAR) количественно характеризует такие изменения временем нестабильности генератора.

На рисунке 2 приведен график среднего отклонения частоты $\bar{y}(t)$, у которого наблюдается внезапный рост дисперсии. Динамическая аллановская дисперсия $\sigma_y(t, \tau)$, корень квадратный из которой показан на трехмерном сетчатом графике, позволяет выявить изменение дисперсии шума, тогда как аллановская дисперсия $\sigma_y(\tau)$, корень квадратный из которой показан на двумерном боковом графике, не дает увидеть изменение дисперсии из-за усреднения.

РИСУНОК 2

DAVAR- изменения дисперсии (сетчатый график)



TF.0538-02

Е Долгосрочная оценка TheoBR

Долгосрочной оценкой аллановской дисперсии (AVAR) служит теоретическая дисперсия №1 (Theo1) и ее модификация с устраненным небольшим смещением относительно выборочной AVAR – дисперсия TheoBR. Theo1 предусматривает усреднение всех допустимых значений квадрата второй разности временных ошибок x_i в заданной последовательности данных N_x и выдает стабильность частоты на интервале, превышающем на 50% наибольший интервал τ для AVAR. Таким образом, Theo1 и TheoBR относятся к новому виду описательных статистических характеристик, который отличается значительно большим эквивалентным числом степеней свободы, чем у перекрывающейся модификации выборочной аллановской дисперсии.

Определение Theo1

$$Theo1(m, \tau_0, N_x) := \frac{1}{0,75(N_x - m)(m\tau_0)^2} \times \sum_{i=1}^{N_x - m} \sum_{\delta=0}^{\frac{m}{2} - 1} \frac{1}{\left(\frac{m}{2} - \delta\right)} \left[\left(x_i - x_{i - \delta + \frac{m}{2}} \right) + \left(x_{i+m} - x_{i + \delta + \frac{m}{2}} \right) \right]^2 \quad (16)$$

для четных m , $10 \leq m \leq N_x$, $\tau = 0,75m\tau_0$.

Отклонение Theo1 (Theo1-dev) – несмещенная оценка аллановского отклонения белого ЧМ-шума. Для других типов шума Theo1-dev характеризуется небольшим смещением. Это смещение можно автоматически устранить с помощью алгоритма, который вычисляет среднее смещение Theo1 относительно аллановской дисперсии в области значений τ , где эти две оценки перекрываются, и использует результат как поправку к Theo1. Таким образом:

$$TheoBR = \frac{E[*AVAR]}{E[*Theo1]} \times Theo1, \quad (17)$$

где *AVAR и *Theo1 вычисляются для диапазона значений, в котором перекрываются выборочные AVAR и Theo1, и выбираются таким образом, чтобы представлять смещение относительно AVAR

скорее при больших значениях τ , чем при малых τ . Поправка для устранения смещения – константа, не зависящая от τ .

Определение TheoBR

$$TheoBR(m, \tau_0, N_x) := \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{AVAR(m=9+3i, \tau_0, N_x)}{Theo1(m=12+4i, \tau_0, N_x)} \right] \times Theo1(m, \tau_0, N_x), \quad (18)$$

где $n = \left\lfloor \frac{0,5N_x}{3} - 3 \right\rfloor$.

Определение TheoH

Гибридная теоретическая дисперсия (TheoH) – это гибридная статистическая характеристика (отсюда "H" – первая буква английского слова "hybrid"), сочетающая в себе значения перекрывающейся модификации AVAR для оценки краткосрочной стабильности, и TheoBR для оценки долгосрочной стабильности на интервале до 3/4 от длины последовательности данных N_x , которая, как отмечалось выше, на 50% больше максимально применимой для AVAR:

$$TheoH(m, \tau_0, N_x) := \begin{cases} AVAR(m, \tau_0, N_x), & \text{при } 1 \leq m \leq \frac{k}{\tau_0}; \\ TheoBR(m, \tau_0, N_x), & \text{при } \frac{k}{0,75\tau_0} \leq m \leq N_x - 1 \text{ при четных } m, \end{cases} \quad (19)$$

где k есть $\tau \leq 0,2T$, а $AVAR(m, \tau_0, N_x)$ имеет достаточный доверительный интервал.

Обычное верхнее предельное значение τ для AVAR составляет 20% от длительности последовательности данных T . Поскольку TheoBR требует большего количества вычислительных ресурсов, чем AVAR, в приведенное выше определение включены только большие значения m , а не все множество значений m . Как правило, нет необходимости вычислять все значения m ; для характеристики случайного шума достаточно октавного или декадного интервала значений m . Для отделения значений AVAR и TheoBR друг от друга небольшой промежуток $\frac{0,2T}{\tau_0} < m < \frac{0,8T}{3\tau_0}$ намеренно оставлен пустым, но его можно заполнить, если требуется вычислить больше значений m или все эти значения.

Корень квадратный из дисперсии TheoH есть отклонение TheoH (TheoH-dev).

4 Переход между частотной и временной областями

В целом, если известна спектральная плотность нормированных флуктуаций частоты $S_y(f)$, двухвыборочную дисперсию можно вычислить следующим образом:

$$\text{Error!} \quad (20)$$

$$\text{Error!} \quad (21)$$

и

$$\text{Error!} \quad (22)$$

В частности, для степенной модели, заданной формулой (6), мера во временной области также является степенной функцией, как следует из формул (6) и (11):

$$\text{Error!} \quad (23)$$

Значения h_α характеризуют частотный шум генератора. Можно заметить, что для целочисленных значений (которые наиболее часто встречаются)

$$\mu = -\alpha - 1 \quad \text{при } -3 \leq \alpha \leq 1;$$

$$\mu \sim -2 \quad \text{при } \alpha \geq 1,$$

где:

$$\sigma^{2,y}(\tau) \sim \tau^\mu.$$

Эти преобразования проверены экспериментально и расчетным путем. В таблице 2 даны коэффициенты для пересчета между мерами нестабильности частоты из временной в частотную область и обратно.

ТАБЛИЦА 2

Перевод мер частотной нестабильности из спектральной плотности мощности в частотной области к дисперсии во временной области и наоборот (при $2\pi f_h \tau \gg 1$)

Вид шумового процесса	$\sigma_{2,y}^2(\tau) =$	$S_y(f) =$	$S_\phi(f) =$	$S_x(f) =$
Случайный уход частоты	$A[f^2 S_y(f)] \tau^1$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-2}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-4}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,x(\tau)}^2] f^{-4}$
Частотный фликер-шум	$B[f S_y(f)] \tau^0$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-1}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-3}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,x(\tau)}^2] f^{-3}$
Частотный белый шум	$C[f^0 S_y(f)] \tau^{-1}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^0$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-2}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,x(\tau)}^2] f^{-2}$
Фазовый фликер-шум	$D[f^{-1} S_y(f)] \tau^{-2}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^1$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^{-1}$	$0.89 [\tau^0 \sigma_{2,x(\tau)}^2] f^{-1}$
Фазовый белый шум	$E[f^{-2} S_y(f)] \tau^{-2}$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^2$	Error! [τ Error!] $\sigma_{2,y(\tau)}^2] f^0$	Error! [τ Error!] f^0

Error!**Error!** $B = 2 \log_e 2$ **Error!** $C = 1/2$

Характеристики наклона кривых пяти независимых шумовых процессов для частотной и временной областей приведены на рисунке 1 (в билогарифмическом масштабе).

5 Границы доверительного интервала для измерений во временной области

Для оценки доверительного интервала (планки погрешностей) гауссовского шума с конкретным значением $\sigma_y(\tau)$, полученным на конечном числе выборок, можно воспользоваться следующей формулой (для неперекрывающихся оценок):

$$\text{Confidence Interval } I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} \quad \text{при } M > 10, \quad (24)$$

где:

 M : общее число точек данных, по которым производится оценка; α : согласно определению из предыдущего раздела; $\kappa_2 = \kappa_1 = 0,99$; $\kappa_0 = 0,87$; $\kappa_{-1} = 0,77$; $\kappa_{-2} = 0,75$.

Пример гауссовской модели с $M = 100$, $\alpha = -1$ (частотный фликер-шум) и $\sigma_y(\tau = 1 \text{ с}) = 10^{-12}$ можно записать так:

$$I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,77) \cdot (100)^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,077), \quad (25)$$

откуда

$$\sigma_y(\tau = 1 \text{ с}) = (1 \pm 0,08) \times 10^{-12}. \quad (26)$$

Разработана также модифицированная методика оценки интервала нечувствительности между парами измерений, выявляющая влияние автокорреляции флуктуаций частоты.

Указанные выше доверительные интервалы действительны для неперекрывающихся оценок. В случае перекрывающихся оценок доверительный интервал оказывается более узким, и его можно вычислить.

Определено смещение из-за применения двухвыборочной дисперсии к интервалам времени, полученным путем связывания нескольких последовательно идущих мер с интервалом нечувствительности; это смещение зависит от типа шума и может быть значительным.

Определено влияние характера аналоговой фильтрации, ограничивающей мощность шума в окрестности номинальной частоты, а именно для случая фильтра нижних частот, используемого вместо полосового фильтра со средней частотой, равной номинальной частоте.

Рассчитано число степеней свободы (d.f.) для перекрывающихся оценок. Оно выведено теоретически и приведено на графике для степенных спектров в целях оценки доверительного интервала двухвыборочного среднеквадратического отклонения. Доверительный интервал двухвыборочного среднеквадратического отклонения $\sigma_y(\tau)$ определяется следующим образом:

$$\text{Error!} \quad (27)$$

где:

χ_{P_1} и χ_{P_2} : значения процентилей распределения;

$\hat{\sigma}_y$: оценка или результат измерения двухвыборочной дисперсии по конечному множеству.

При $\alpha = +2$ приращение числа степеней свободы оказывается почти в n больше, чем применительно к неперекрывающейся оценке. Значительное приращение достигается также при $\alpha = +1$. При $\alpha = 0$ отношение числа степеней свободы равняется 2, при $\alpha = -1$ оно составляет 1,3, а при $\alpha = -2$ равняется 1,04.

6 Потенциально некорректные применения статистических мер

Здесь описан ряд статистических мер, которые предназначены для определенных целей и могут быть непригодны для других целей.

Аллановское отклонение, модифицированное аллановское отклонение и временное отклонение основаны на вторых разностях значений $x(t)$ и поэтому нечувствительны к полиномам первого порядка. Однако удаление полинома второго или более высокого порядка может привести к занижению значений при больших τ ($\tau > 0,2 T$).

Поэтому если есть необходимость удалить такой полином перед вычислением статистической характеристики, настоятельно рекомендуется применять такие статистические меры, которые нечувствительны к удалению кривых – например, основанные на разностях значений $x(t)$ более высоких порядков. Класс статистических мер, основанных на разностях второго или более высоких порядков, нечувствителен к линейным вариациям в данных.

Меры, определенные в частотной и временной области, могут давать неверные результаты в присутствии беспорядочно расположенных данных. В целом пробелы в данных – это недостающая информация. В одних методах пробелы заполняются путем интерполяции, в других недостающие данные замещаются нулями, и все это может приводить к искажениям. Следует понимать, как используемое программное обеспечение обрабатывает беспорядочно расположенные данные.

7 Заключение

Как правило, статистических методов описания нестабильности частоты и фазы вкупе с соответствующими степенными модельными функциями спектральной плотности достаточно для характеристики нестабильности генератора. В текущей версии Рекомендации вводятся дополнительные методы, которые позволяют работать с зависящими от времени нестабильностями

во временной области, а расчет нестабильности во временной области распространяется на интервалы, составляющие больший процент длины последовательности данных.

Описанные здесь методы не распространяются на неслучайные (детерминированные, систематические) вариации, которые могут быть периодическими или монотонными. Для периодических вариаций следует применять известные методы гармонического анализа, а монотонные вариации описывать дрейфовыми членами первого или более высокого порядка.
