

Caracterización de las fuentes y formación de escalas de tiempo

RECOMENDACIÓN UIT-R TF.538-3

MEDICIONES DE LA INESTABILIDAD DE FRECUENCIA Y EN EL TIEMPO (FASE)

(Cuestión UIT-R 104/7)

(1978-1990-1992-1994)

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

- a) que conviene utilizar un lenguaje apropiado para expresar las características de inestabilidad de los generadores de frecuencias patrón y señales horarias y los sistemas de medida;
- b) que la medida de la varianza clásica no converge en algunos tipos de inestabilidades aleatorias de las señales horarias y la frecuencia;
- c) que los principales laboratorios, observatorios, industrias y usuarios han adoptado ya determinadas Recomendaciones del Subcomité sobre estabilidad de frecuencias del Comité Técnico sobre frecuencia y señales horarias del IEEE respecto a instrumentación y medición, y la existencia de la Norma N.º 1139-1988 del IEEE sobre «Definiciones fundamentales normalizadas por el IEEE de cantidades físicas para la metrología de la frecuencia y del tiempo»;
- d) que las mediciones de inestabilidad de frecuencia deben basarse en principios teóricos sólidos, fáciles de aplicar y de interpretar;
- e) que es conveniente disponer de medidas de estabilidad que puedan obtenerse con equipos sencillos;
- f) que no hay una medida aceptada y adecuada para la inestabilidad en el dominio del tiempo en relojes y en los sistemas de medición, comparación y difusión;
- g) que se ha encontrado una medida de la inestabilidad temporal para variaciones aleatorias que resuelve los inconvenientes encontrados tanto en la industria de las telecomunicaciones como en los sistemas de medición, comparación y difusión de frecuencias patrón y señales horarias, así como en relojes,

recomienda

1. que las inestabilidades aleatorias de las frecuencias patrón y señales horarias se caractericen por las medidas estadísticas $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ o $S_x(f)$, en el dominio de la frecuencia, y por $\sigma_y(\tau)$, Mod. $\sigma_y(\tau)$ y $\sigma_x(\tau)$ en el dominio del tiempo, que se definen a continuación:

1.1 la medida de las inestabilidades de frecuencia normalizadas $y(t)$ en el dominio de la frecuencia es $S_y(f)$, es decir, la densidad espectral unilateral ($0 < f < \infty$) de las inestabilidades de frecuencia normalizadas $y(t) = (v(t) - v_0)/v_0$; $v(t)$ es la frecuencia portadora instantánea y v_0 la frecuencia nominal;

1.2 la medida de las inestabilidades de fase $\phi(t)$ en el dominio de la frecuencia es $S_\phi(f)$, es decir, la densidad espectral unilateral ($0 < f < \infty$) de las inestabilidades de fase $\phi(t)$ para una frecuencia de Fourier f ;

1.3 la medida de las inestabilidades de fase expresadas en unidades de tiempo $x(t)$ en el dominio de la frecuencia es $S_x(f)$; es decir, la densidad espectral unilateral ($0 < f < \infty$) de las inestabilidades de fase expresadas en unidades de tiempo $x(t)$, donde $x(t) = \phi(t)/2\pi v_0$; $x(t)$ están relacionadas mediante la expresión $y(t) = dx(t)/dt$;

1.4 las relaciones entre estas densidades espectrales se dan a continuación:

$$S_y(f) = \frac{f^2}{v_0} S_\phi(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f) \quad (1)$$

Las dimensiones de $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ y $S_x(f)$ son respectivamente: Hz^{-1} , $\text{Rad}^2 \text{Hz}^{-1}$ y $\text{s}^2 \text{Hz}^{-1}$;

1.5 la medida de las inestabilidades de frecuencia normalizadas $y(t)$ en el dominio del tiempo es la desviación típica de dos muestras, $\sigma_y(\tau)$, y la desviación típica modificada de dos muestras Mod. $\sigma_y(\tau)$ definidas en el anexo 1;

1.6 la medida de las inestabilidades de las señales horarias en el dominio del tiempo es $\sigma_x(\tau)$ que se define en el anexo 1;

2. que, al establecer las medidas estadísticas de inestabilidad de frecuencia y señales horarias deben reconocerse los fenómenos no aleatorios, por ejemplo:
- 2.1 debe consignarse toda dependencia del tiempo observada en las mediciones estadísticas;
- 2.2 debe especificarse el método de medición de las variaciones sistemáticas (por ejemplo: se ha obtenido una evaluación de la deriva de frecuencia lineal a partir de los coeficientes de una regresión lineal según el método de mínimos cuadrados, con M mediciones de frecuencia, efectuándose cada una durante el intervalo τ y con una anchura de banda f_h);
- 2.3 deben indicarse las sensibilidades frente a las condiciones ambientales (por ejemplo: la variación de la frecuencia y/o de la fase en función de la temperatura, del campo magnético, de la presión atmosférica, etc.);
3. que, al presentar las mediciones de inestabilidad de frecuencia y señales horarias deben especificarse todos los parámetros pertinentes:
- 3.1 método de medición;
- 3.2 características de la señal de referencia;
- 3.3 frecuencia nominal ν_0 de la señal;
- 3.4 anchura de banda f_h del sistema de medición y la correspondiente respuesta del filtro de paso bajo;
- 3.5 duración total de la medición o el número de mediciones M ;
- 3.6 técnicas de cálculo (por ejemplo, detalles sobre las ventanas de retardo para los cálculos de las densidades espectrales de potencia a partir de los datos en el dominio del tiempo, o la estimación del efecto del tiempo muerto en la evaluación de la desviación típica de dos muestras $\sigma_y(\tau)$);
- 3.7 la confianza de las estimaciones;
4. que se proporcione una ilustración gráfica o una expresión analítica de las medidas de las inestabilidades de frecuencia y se incluyan los intervalos de confianza (es decir, $S_y(f)$, $S_\phi(f)$ y $S_x(f)$ en función de f y/o $\sigma_y(\tau)$, Mod. $\sigma_y(\tau)$ y $\sigma_x(\tau)$ en función de τ).

ANEXO 1*

Caracterización del ruido de frecuencia y de fase**1. Definición de términos**

Las inestabilidades de frecuencia pueden caracterizarse por procesos que pueden representarse estadísticamente en el dominio de la frecuencia, mediante el desarrollo de Fourier, o en el dominio del tiempo. La desviación instantánea normalizada de frecuencia $y(t)$ respecto de la frecuencia nominal ν_0 está relacionada con la fluctuación instantánea de fase $\phi(t)$ en torno a la fase nominal $2\pi\nu_0 t$ por:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad (2)$$

$$x(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0}$$

donde $x(t)$ es la variación de la fase expresada en unidades de tiempo.

* Nota del Director de la Oficina de Radiocomunicaciones – El Informe UIT-R TF.580 (Informe 580 del ex CCIR (Düsseldorf, 1990)) contiene información adicional relativa a la deducción de las ecuaciones y precedentes históricos de este anexo.

2. Dominio de la frecuencia (desarrollo de Fourier)

En un desarrollo de Fourier en el dominio de la frecuencia, la estabilidad de frecuencia puede definirse por varias densidades espectrales unilaterales (la frecuencia de Fourier varía de 0 a ∞) tales como:

$$S_y(f) \text{ de } y(t), S_\varphi(f) \text{ de } \varphi(t), S_{\dot{\varphi}}(f) \text{ de } \dot{\varphi}(t), S_x(f) \text{ de } x(t), \text{ etc.}$$

Estas densidades espectrales se relacionan entre sí mediante las ecuaciones:

$$S_y(f) = \frac{f^2}{v_0^2} S_\varphi(f) \tag{3}$$

$$S_{\dot{\varphi}}(f) = (2\pi f)^2 S_\varphi(f) \tag{4}$$

$$S_x(f) = \frac{1}{(2\pi v_0)^2} S_\varphi(f) \tag{5}$$

Como modelos razonables de fluctuaciones aleatorias en osciladores de precisión suelen emplearse densidades espectrales cuya suma se efectúa según una ley exponencial. En la práctica se ha observado que en el caso de muchos osciladores estas fluctuaciones están constituidas por la suma de cinco procesos de ruido independientes y, con algunas limitaciones, la siguiente ecuación es válida:

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_\alpha f^\alpha & \text{para } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{para } f > f_h \end{cases} \tag{6}$$

donde los h_α son constantes, los α son enteros, y f_h es la frecuencia de corte de un filtro de paso bajo. Las ecuaciones (3), (4) y (5) son correctas y consecuentes en caso de ruidos estacionarios, incluido el ruido de fase. La divergencia en alta frecuencia se suprime por los límites introducidos en la ecuación (6). Los cinco procesos de ruido están caracterizados en el cuadro 1 y se representan en la fig. 1. En la práctica, solamente dos o tres procesos de ruido suelen ser suficientes para describir las fluctuaciones aleatorias de frecuencia de un oscilador determinado, los otros pueden despreciarse.

3. Dominio del tiempo

La inestabilidad aleatoria de frecuencia en el dominio del tiempo puede definirse a través de la varianza de las muestras. La medida recomendada es la desviación típica de dos muestras que es la raíz cuadrada de la varianza de dos muestras cuando el tiempo entre mediciones sucesivas es cero $\sigma_y^2(\tau)$. La varianza de dos muestras se define por:

$$\sigma_y^2(\tau) = 1/2 \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \tag{7}$$

donde:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} \quad \text{y} \quad t_{k+1} = t_k + \tau \quad (\text{muestras adyacentes})$$

$\langle \rangle$ denota un promedio tomado en un intervalo infinito. La medición escrita en la ecuación (7) se denomina a menudo la varianza de Allan. x_k y x_{k+1} son los valores de las mediciones residuales de tiempo realizadas en los tiempos t_k y $t_{k+1} = t_k + \tau$, con $k = 1, 2, \dots$, y siendo $1/\tau$ la frecuencia de muestreo fijada que asegura un tiempo muerto nulo entre las mediciones de frecuencia. Por mediciones «residuales» se entiende que se han eliminado los efectos sistemáticos conocidos.

Si la frecuencia de muestreo inicial se especifica como $1/\tau_0$, entonces se ha demostrado que en general se puede obtener una estimación más eficaz de $\sigma_y(\tau)$ utilizando lo que se denomina «estimaciones con solape». Esta estimación se obtiene utilizando la ecuación (8).

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N - 2n) \tau^2} \sum_{i=1}^{N-2n} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2 \tag{8}$$

donde N es el número de mediciones de los comienzos de las señales de tiempo espaciadas τ_0 ($N = M + 1$, donde M es el número de mediciones de frecuencia correspondientes al tiempo de muestreo τ_0) y $\tau = n \tau_0$.

Si existe un tiempo muerto entre las mediciones de comienzo de las diferentes frecuencias y éste se ignora al calcular la ecuación (7) se ha demostrado que los valores de estabilidad resultante (que ya no serán las varianzas de Allan), presentarán una desviación sistemática (excepto para el ruido blanco de frecuencia) puesto que las mediciones de la frecuencia se reagrupan para calcular la estabilidad para $n \tau_0$ ($n > 1$). Esta desviación se ha estudiado y se han publicado algunas tablas para su corrección.

Si no existe un tiempo muerto, entonces los \bar{y}_i' originales pueden combinarse para crear un conjunto de \bar{y}_k' :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} \bar{y}_i$$

CUADRO 1

Características funcionales de cinco procesos de ruido independientes para inestabilidad de frecuencia de los osciladores

Descripción del proceso de ruido	Características de pendiente de la curva log log				
	En el dominio de la frecuencia		En el dominio del tiempo		
	$S_y(f)$	$S_\phi(f)$ ó $S_x(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$	Mod. $\sigma_y^2(\tau)$	$\sigma_x^2(\tau)$
	α	$\beta \equiv \alpha - 2$	μ	μ'	η
Ruido de frecuencia de marcha aleatoria	-2	-4	1	1	3
Ruido de centelleo de frecuencia	-1	-3	0	0	2
Ruido blanco de frecuencia	0	-2	-1	-1	1
Ruido de centelleo de fase	1	-1	-2	-2	0
Ruido blanco de fase	2	0	-2	-3	-1

$$S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$$

$$\alpha = -\mu - 1, -2 \leq \mu < 2$$

$$\sigma_y^2(\tau) \sim |\tau|^\mu$$

$$S_\phi(f) = v_0^2 h_\alpha f^{\alpha-2} = v_0^2 h_\alpha f^\beta$$

$$\beta \equiv \alpha - 2; \eta \equiv \mu' + 2$$

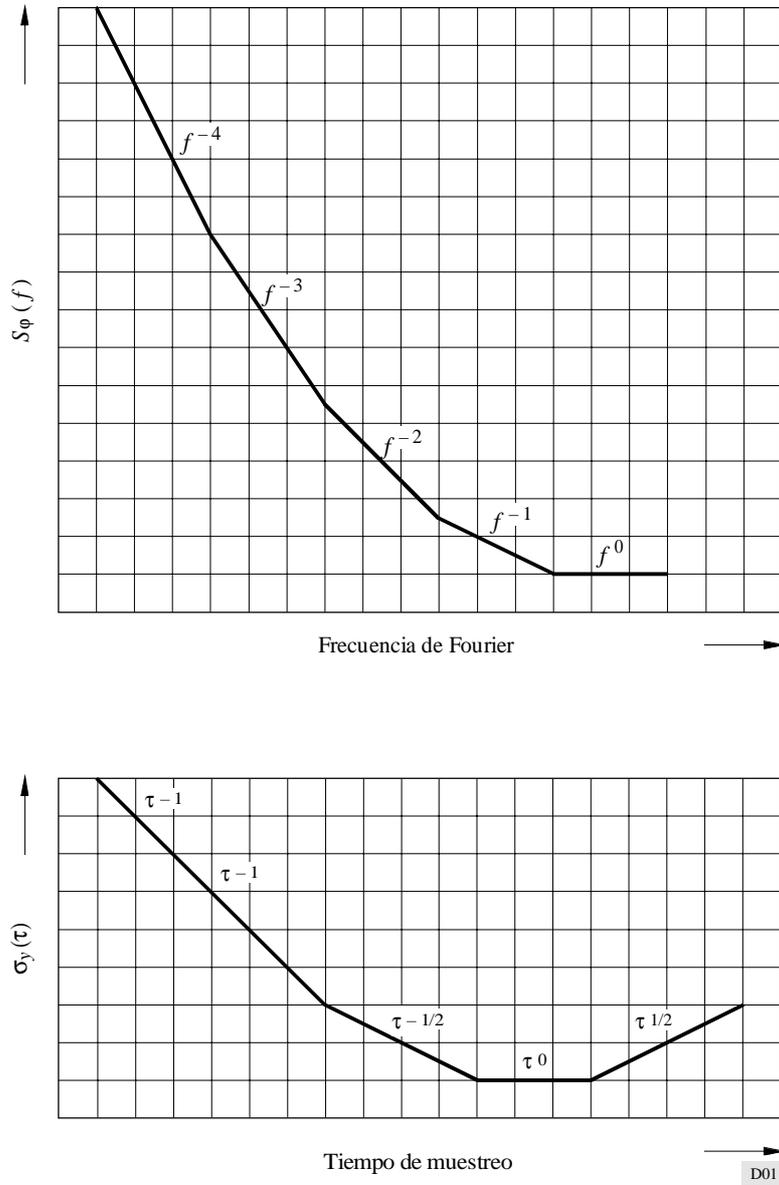
$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) \sim |\tau|^{\mu'}$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4\pi^2} h_\alpha f^{\alpha-2} = \frac{1}{4\pi^2} h_\alpha f^\beta$$

$$\alpha = -\mu' - 1$$

$$\sigma_x^2(\tau) \sim |\tau|^\eta$$

FIGURA 1
 Características de pendiente de los cinco procesos independientes de ruido
 (Escala logarítmica)



Así puede obtenerse una «estimación con solape» de $\sigma_y(\tau)$:

$$\sigma_y(\tau) = \left| \frac{1}{2(M - 2n + 1)} \sum_{k=1}^{M-2n+1} (\bar{y}_{k+n} - \bar{y}_k)^2 \right|^{1/2} \quad (9)$$

Así pues, es muy simple determinar la dependencia de $\sigma_y(\tau)$ como función de τ a partir de un solo conjunto de datos.

Una curva de $\sigma_y(\tau)$ en función de τ para un patrón de frecuencia, típicamente presentaría la forma indicada en la fig. 1. La primera componente, en que $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1/2}$ (ruido de frecuencia «blanco») y/o $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$ (ruido de fase «blanco» o de «parpadeo») reflejan las características de ruido fundamentales del patrón de frecuencia. En el caso en que $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$, no resulta práctico decidir si el oscilador es perturbado por el ruido de fase blanco o por el ruido de parpadeo. Se sugieren algunas técnicas alternativas más abajo. Esto impone una limitación en la utilidad de $\sigma_y(\tau)$ para el

estudio de la naturaleza de las fuentes de ruido existentes en el oscilador. Un análisis en el dominio de la frecuencia es más adecuado cuando se trata de frecuencias de Fourier mayores que 1 Hz. Esta ley τ^{-1} y/o $\tau^{-1/2}$ continúa, a medida que se aumenta el tiempo de promediación, hasta que se alcanza el denominado «nivel de parpadeo» (flicker «floor»), donde $\sigma_y(\tau)$ es independiente del tiempo de promediación τ . Este comportamiento se observa en casi todos los patrones de frecuencia; dicho comportamiento depende del patrón de frecuencia de que se trate, y su significado físico no es plenamente comprendido. Ejemplos de causas probables para el «nivel» de parpadeo son las fluctuaciones de la fuente de alimentación, las fluctuaciones del campo magnético, los cambios en los componentes del generador de la frecuencia patrón, y variaciones en la potencia de microondas. Por último, la curva muestra una degradación de la estabilidad con el aumento del tiempo de promediación. Esto ocurre típicamente para tiempos de horas o días, según la clase particular del patrón de frecuencia.

Se ha desarrollado una «varianza de Allan modificada», Mod. $\sigma_y^2(\tau)$, que tiene la propiedad de establecer una dependencia diferente de τ para el ruido blanco de fase y para el ruido de parpadeo de fase. La dependencia para Mod. $\sigma_y(\tau)$ es $\tau^{-3/2}$ y τ^{-1} respectivamente. El valor de Mod. $\sigma_y(\tau)$ se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \tau^2 n^2 (N - 3n + 1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[\sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right]^2 \quad (10)$$

donde:

N : número original de mediciones de variación de tiempo separadas por τ_0 , y

$\tau = n \tau_0$, tiempo de muestreo elegido.

En otros textos técnicos se analizan las propiedades y la confianza de la estimación. Se han desarrollado métodos de máxima verosimilitud para la estimación de $\sigma_y(\tau)$ para los modelos específicos del ruido blanco de frecuencia y el ruido aleatorio de frecuencia. Se ha demostrado que ambos modelos son útiles para tiempos de muestreo superiores a algunos segundos para los patrones de frecuencia de haz de cesio.

La inestabilidad horaria en el dominio del tiempo para los espectros de ley exponencial anteriores puede medirse utilizando la segunda diferencia de los promedios de las horas adyacentes. Esta medida se relaciona también con Mod. $\sigma_x^2(\tau)$.

$$\sigma_x^2(\tau) = (\tau^2 \text{Mod. } \sigma_y^2(\tau)) / 3 \quad (11)$$

$$\sigma_x^2(\tau) = (1/6) \langle [\bar{x}_{k+2n} - 2\bar{x}_{k+n} + \bar{x}_k]^2 \rangle \quad (12)$$

siendo $(dx/dt) = y$, y $\tau = n \tau_0$. Por tanto, x es la desviación temporal; los corchetes « $\langle \rangle$ » indican un promedio temporal infinito. La barra « $\bar{}$ » sobre la x indica un promedio a lo largo de un intervalo τ . Así pues, x es una estimación óptima de la desviación temporal en el intervalo τ , si las desviaciones tienen un espectro blanco. Los tres promedios utilizados en la ecuación de la segunda diferencia son adyacentes. Por tanto, para un valor determinado de k en la segunda diferencia, estos promedios ocupan un espacio de 3τ .

Las relaciones de la densidad espectral y el dominio del tiempo son las siguientes:

$$S_x(f) \sim f^\beta$$

$$\sigma_x^2(\tau) \sim \tau^\eta \quad (13)$$

$$\beta = -\eta - 1$$

Como los tipos habituales de ruido medido se centran alrededor de $\eta = 0$, se obtiene una dependencia casi nula de τ (un hecho deseable para una buena medida). Otras características útiles de esta medida son:

- es igual a la clásica desviación típica de las mediciones de diferencia de tiempo para $\tau = \tau_0$, para ruido blanco PM;
- es igual a la desviación típica de la media de las mediciones de diferencia de tiempo para $\tau = N \tau_0$ (la longitud de los datos), para ruido blanco PM;

- es convergente y muestra un buen comportamiento para los procesos aleatorios que se producen generalmente en la metrología horaria y de frecuencias patrón;
- la dependencia de τ indica que el modelo de densidad de potencia espectral exponencial es adecuado para los datos;
- la amplitud de $\sigma_x(\tau)$ a un valor particular de τ , con la hipótesis de uno de los modelos de densidad espectral en quinta potencia ($\beta = -4, -3, -2, -1, 0$), ofrece información suficiente para estimar el nivel correspondiente en el dominio de frecuencias para cualquiera de las mediciones de densidad espectral normales recomendadas por el IEEE.

Se ha estudiado el problema constituido por la estimación de la estabilidad de distintos relojes, basándose en la comparación de mediciones, y se ha propuesto un modelo general y coherente para trabajar con mediciones de diferencia de señales, sin necesidad de suponer a priori una ausencia de correlación entre los relojes.

4. Conversión entre los dominios de la frecuencia y del tiempo

En general, si se conoce la densidad espectral de la fluctuación de la frecuencia normalizada $S_y(f)$ puede calcularse la varianza de dos muestras como sigue:

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\text{sen}^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (14)$$

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\text{sen}^6(\pi f \tau)}{(n \pi f \tau)^2 \text{sen}^2(\pi f \tau_0)} df \quad (15)$$

y:

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{8}{3} \int_0^{f_h} S_x(f) \frac{\text{sen}^6(\pi f \tau)}{n^2 \text{sen}^2(\pi f \tau_0)} df \quad (16)$$

Concretamente, para el modelo de ley exponencial dado para la ecuación (6), la medida en el dominio del tiempo sigue también esta ley exponencial derivada de las ecuaciones (6) y (11).

$$\sigma_y^2(\tau) = h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} \tau + h_{-1} 2 \log_e 2 + h_0 \frac{1}{2\tau} + h_1 \frac{1,038 + 3 \log_e(2\pi f_h \tau)}{(2\pi)^2 \tau^2} + h_2 \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2} \quad (17)$$

Los valores de h_α son característicos de la inestabilidad de frecuencia del oscilador. Se puede señalar que, para valores enteros (lo que, según parece, es el caso más frecuente),

$$\mu = -\alpha - 1 \quad \text{para} \quad -3 \leq \alpha \leq 1$$

$$\mu \sim -2 \quad \text{para} \quad \alpha \geq 1$$

donde:

$$\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\mu$$

Esas conversiones han sido verificadas experimentalmente así como por cálculo. En el cuadro 2 figuran los coeficientes de la conversión entre mediciones de estabilidad de frecuencia en el dominio del tiempo a mediciones en el dominio de la frecuencia e inversamente.

CUADRO 2

Conversión de medidas de estabilidad de frecuencia expresadas en densidades espectrales en el dominio de la frecuencia a su varianza en el dominio del tiempo y viceversa (para $2\pi f_h \tau \gg 1$)

Descripción del proceso de ruido	$\sigma_y^2(\tau) =$	$S_y(f) =$	$S_\phi(f) =$	$S_x(f) =$
Ruido de frecuencia de marcha aleatoria	$A[f^2 S_y(f)] \tau^1$	$\frac{1}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{v_0^2}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-4}$	$\frac{3,636}{A} [\tau^{-3} \sigma_x^2(\tau)] f^{-4}$
Ruido de centelleo de frecuencia	$B[f S_y(f)] \tau^0$	$\frac{1}{B} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$\frac{v_0^2}{B} [\tau^0 \sigma_y^2(\tau)] f^{-3}$	$\frac{0,741}{AB} [\tau^{-2} \sigma_x^2(\tau)] f^{-3}$
Ruido blanco de frecuencia	$C[f^0 S_y(f)] \tau^{-1}$	$\frac{1}{C} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{v_0^2}{C} [\tau^1 \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{1}{AC} [\tau^{-1} \sigma_x^2(\tau)] f^{-2}$
Ruido de centelleo de fase	$D[f^{-1} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^1$	$\frac{v_0^2}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$0,89 [\tau^0 \sigma_x^2(\tau)] f^{-1}$
Ruido blanco de fase	$E[f^{-2} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^2$	$\frac{v_0^2}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{1}{\tau_0 f_h} [\tau \sigma_x^2(\tau)] f^0$

$$A = \frac{4\pi^2}{6}$$

$$B = 2 \log_e 2$$

$$C = 1/2$$

$$D = \frac{1,038 + 3 \log_e (2\pi f_h \tau)}{4\pi^2}$$

$$E = \frac{3f_h}{4\pi^2}$$

En la fig. 1 (escalas logarítmicas para ambas coordenadas) se indican las características de pendiente de los cinco procesos de ruido independientes.

5. Límites de confianza de mediciones en el dominio del tiempo

Para un ruido de tipo gaussiano, el intervalo de confianza (o límite de error) de un valor determinado de $\sigma_y(\tau)$ obtenido a partir de un número finito de muestras, puede estimarse mediante la ecuación siguiente:

$$\text{Intervalo de confianza } I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} \quad \text{para } M > 10 \quad (18)$$

donde:

M : número total de mediciones utilizadas en el cálculo

α : definida en el punto anterior

$$\kappa_2 = \kappa_1 = 0,99$$

$$\kappa_0 = 0,87$$

$$\kappa_{-1} = 0,77$$

$$\kappa_{-2} = 0,75.$$

Como ejemplo, para un modelo gaussiano con $M = 100$, $\alpha = -1$ (ruido de frecuencia de centelleo) y $\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = 10^{-12}$, puede expresarse:

$$I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,77) \cdot (100)^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,077) \quad (19)$$

que da:

$$\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = (1 \pm 0,08) \times 10^{-12} \quad (20)$$

Se ha definido también otro procedimiento de estimación que incluye el establecimiento de un límite entre pares de mediciones y que muestra la influencia de la autocorrelación de las fluctuaciones de frecuencias.

Los intervalos de confianza mencionados se aplican a las estimaciones sin solape. En el caso de las estimaciones con solape el intervalo de confianza es menor y puede calcularse.

El desvío que resulta de la aplicación de la varianza a dos muestras en intervalos de tiempo obtenidos por concatenación de varias mediciones sucesivas con tiempo muerto, se ha determinado en función del tipo de ruido. Este desvío puede ser significativo.

Se ha determinado el efecto de la naturaleza del filtrado analógico que limita la potencia de ruido de la señal estudiada en torno a su frecuencia nominal, en particular en relación con el empleo de un filtro paso bajo en lugar de un filtro paso banda centrado en la frecuencia nominal.

Se han calculado los grados de libertad (d.f.) para «estimaciones con solape», derivados teóricamente y representados en espectros de ley exponencial para la estimación del intervalo de confianza de la desviación típica de dos muestras. El intervalo de confianza para la desviación típica de dos muestras $\sigma_y(\tau)$ es:

$$\frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_1}} < \sigma_y(\tau) < \frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_2}} \quad (21)$$

donde:

χ_{P_1} y χ_{P_2} : valores de percentilos para la distribución de χ^2

el signo «^» : varianza de dos muestras estimada o medida de un conjunto finito.

Para $\alpha = +2$, la mejora de d.f. es aproximadamente n veces superior que la obtenida en la estimación sin solape. También se obtiene una mejora significativa para $\alpha = +1$. Para $\alpha = 0$, la relación de los grados de libertad es 2; para $\alpha = -1$ es 1,3 y para $\alpha = -2$ es 1,04.

6. Conclusiones

Los métodos estadísticos para describir la inestabilidad de frecuencia y de fase y el correspondiente modelo de densidad espectral de ley exponencial son suficientes para describir la inestabilidad a corto plazo de los osciladores. Las ecuaciones (14) a (16) muestran que la densidad espectral puede transformarse unívocamente en una medición en el dominio del tiempo. La formulación inversa no es cierta en todos los casos, aunque sí lo es para los espectros de ley exponencial que se utilizan a menudo para establecer modelos de los osciladores de precisión.

Las variaciones no aleatorias no están cubiertas por el modelo descrito. Estas pueden ser periódicas o monótonas. Las variaciones periódicas deberán analizarse mediante métodos conocidos de análisis armónico. Las variaciones monótonas se describen en términos de derivas lineales o de orden superior.