

## Caractérisation des sources et de la formation des échelles de temps

## RECOMMANDATION UIT-R TF.538-3

## MESURES DE L'INSTABILITÉ ALÉATOIRE DE FRÉQUENCE ET DE TEMPS (PHASE)

(Question UIT-R 104/7)

(1978-1990-1992-1994)

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

*considérant*

- a) qu'il convient d'utiliser des paramètres appropriés pour représenter les caractéristiques d'instabilité des sources de fréquences étalon et de temps ainsi que des systèmes de mesure;
- b) que le calcul classique de variance ne converge pas pour certaines catégories d'instabilités aléatoires de temps et de fréquence;
- c) que les principaux laboratoires, observatoires, industriels et utilisateurs ont déjà adopté certaines Recommandations du Sous-Comité sur la stabilité de fréquence du Comité technique sur la fréquence et le temps de la Société IEEE sur l'instrumentation et la mesure, et qu'il existe la Norme N° 1139-1988 de l'IEEE: «Définitions normalisées de l'IEEE, Grandeurs physiques pour la métrologie fondamentale des fréquences et du temps»;
- d) que les mesures d'instabilité de fréquence doivent reposer sur des principes théoriques solides, commodes à appliquer et faciles à interpréter directement;
- e) qu'il est souhaitable d'avoir des mesures d'instabilité qui puissent être obtenues avec une instrumentation simple;
- f) qu'il n'existe pas de critère de mesure accepté et approprié de l'instabilité temporelle de la grandeur temps dans les horloges et dans les systèmes de mesure de comparaison et de diffusion;
- g) qu'un critère de mesure de l'instabilité du temps, pour des variations aléatoires, a été découvert qui permet de remédier à l'inadéquation existante tant pour l'industrie des télécommunications que pour les systèmes de mesure, de comparaison et de diffusion du temps et des fréquences ainsi que les horloges,

*recommande*

**1.** que les instabilités aléatoires des signaux de fréquences étalon et des signaux horaires soient caractérisées par les mesures statistiques  $S_y(f)$ ,  $S_\phi(f)$  ou  $S_x(f)$  dans le domaine fréquentiel, et  $\sigma_y(\tau)$ , Mod.  $\sigma_y(\tau)$  et  $\sigma_x(\tau)$  dans le domaine temporel, définies ci-après:

**1.1** dans le domaine fréquentiel, la mesure des instabilités de fréquence normées  $y(t)$  est  $S_y(f)$ ; c'est-à-dire la densité spectrale unilatérale ( $0 < f < \infty$ ) des instabilités de fréquence normées  $y(t) = (v(t) - v_0) / v_0$  où  $v(t)$  est la fréquence porteuse instantanée et  $v_0$  sa valeur nominale;

**1.2** dans le domaine fréquentiel, la mesure des instabilités de phase  $\phi(t)$  est  $S_\phi(f)$ , c'est-à-dire la densité spectrale unilatérale ( $0 < f < \infty$ ) des instabilités de phase  $\phi(t)$  à une fréquence de Fourier  $f$ ;

**1.3** dans le domaine fréquentiel, la mesure des instabilités de phase exprimées en unités de temps (phase-temps)  $x(t)$  est  $S_x(f)$ ; c'est-à-dire la densité spectrale unilatérale ( $0 < f < \infty$ ) des instabilités de phase-temps  $x(t)$ , où  $x(t) = \phi(t) / 2\pi v_0$ ;  $x(t)$  étant lié à  $y(t)$  par  $y(t) = dx(t) / dt$ ;

**1.4** les relations entre ces densités spectrales sont données ci-dessous:

$$S_y(f) = \frac{f^2}{v_0} S_\phi(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f) \quad (1)$$

Les unités de  $S_y(f)$ ,  $S_\phi(f)$  et  $S_x(f)$  sont respectivement:  $\text{Hz}^{-1}$ ,  $\text{Rad}^2 \text{Hz}^{-1}$  et  $\text{s}^2 \text{Hz}^{-1}$ ;

**1.5** dans le domaine temporel, la mesure des instabilités de fréquence normées  $y(t)$  est l'écart type à deux échantillons  $\sigma_y(\tau)$  et l'écart type à deux échantillons modifié Mod.  $\sigma_y(\tau)$  définis dans l'Annexe 1;

**1.6** dans le domaine temporel, la mesure des instabilités de temps est  $\sigma_x(\tau)$  défini dans l'Annexe 1;

2. que, en présentant des mesures statistiques d'instabilité de fréquence et de temps, les phénomènes non aléatoires doivent être reconnus, par exemple:
- 2.1 toute dépendance temporelle observée dans les mesures statistiques doit être explicitée;
- 2.2 la méthode de mesure des variations systématiques doit être spécifiée (par exemple: une évaluation de la dérive de fréquence linéaire a été obtenue à partir des coefficients d'une régression linéaire selon la méthode des moindres carrés, avec  $M$  mesures de fréquence, chacune étant effectuée pendant une durée  $\tau$  et avec une largeur de bande  $f_h$  spécifiée);
- 2.3 les sensibilités aux conditions ambiantes doivent être explicitées (par exemple: la dépendance de la fréquence et/ou de la phase en fonction de la température, du champ magnétique, de la pression atmosphérique, etc.);
3. que, en présentant toute mesure d'instabilité de fréquence et de temps, tous les paramètres pertinents doivent être spécifiés:
- 3.1 méthode de mesure;
- 3.2 caractéristiques du signal de référence;
- 3.3 fréquence nominale  $\nu_0$  du signal;
- 3.4 largeur de bande  $f_h$  du système de mesure ainsi que la forme de la réponse du filtre passe-bas correspondant;
- 3.5 durée totale de mesure ou le nombre de mesures  $M$ ;
- 3.6 techniques de calcul (par exemple, détails sur les fenêtres de retards pour les estimations de densités spectrales à partir des données temporelles, ou l'estimation de l'effet du temps mort dans l'évaluation de l'écart type à deux échantillons  $\sigma_y(\tau)$ );
- 3.7 intervalle de confiance des estimations;
4. qu'une illustration graphique ou une expression analytique des mesures d'instabilité de fréquence et de temps comprenant des intervalles de confiance, doivent être fournies (par exemple  $S_y(f)$ ,  $S_\phi(f)$  et  $S_x(f)$  en fonction de  $f$ , et/ou  $\sigma_y(\tau)$ , Mod.  $\sigma_y(\tau)$  et  $\sigma_x(\tau)$  en fonction de  $\tau$ ).

## ANNEXE 1\*

**Caractérisation du bruit de fréquence et de phase****1. Définitions de termes**

Les instabilités de fréquence et de phase peuvent être caractérisées par des processus aléatoires qui peuvent être représentés sous forme statistique soit dans le domaine fréquentiel de Fourier, soit dans le domaine temporel. On a les relations suivantes entre l'écart de fréquence normé instantané  $y(t)$  par rapport à la fréquence nominale  $\nu_0$  et la fluctuation de la phase instantanée  $\phi(t)$  autour de la phase nominale  $2\pi \nu_0 t$ :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi \nu_0} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi \nu_0} \quad (2)$$

$$x(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi \nu_0}$$

où  $x(t)$  est la variation de phase exprimée en unités de temps.

\* *Note du Directeur du Bureau des radiocommunications* – Pour plus de détails et une liste complète de références, voir le Rapport UIT-R TF.580 (Rapport 580 de l'ex-CCIR (Düsseldorf, 1990)).

## 2. Domaine fréquentiel de Fourier

Dans le domaine fréquentiel de Fourier, la stabilité de fréquence peut être définie par plusieurs densités spectrales unilatérales (la fréquence de Fourier va de 0 à ∞) telles que:

$$S_y(f) \text{ de } y(t), S_\varphi(f) \text{ de } \varphi(t), S_{\dot{\varphi}}(f) \text{ de } \dot{\varphi}(t), S_x(f) \text{ de } x(t), \text{ etc.}$$

Il existe entre ces densités spectrales les relations suivantes:

$$S_y(f) = \frac{f^2}{v_0} S_\varphi(f) \quad (3)$$

$$S_{\dot{\varphi}}(f) = (2\pi f)^2 S_\varphi(f) \quad (4)$$

$$S_x(f) = \frac{1}{(2\pi v_0)^2} S_\varphi(f) \quad (5)$$

Les densités spectrales à loi de puissance constituent souvent des modèles utiles pour décrire les fluctuations aléatoires dans les oscillateurs de précision. Dans la pratique, on a observé que pour de nombreux oscillateurs, les fluctuations aléatoires sont la somme de cinq processus de bruit indépendants et, avec quelques restrictions, l'expression suivante est caractéristique:

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_\alpha f^\alpha & \text{pour } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{pour } f > f_h \end{cases} \quad (6)$$

où les valeurs de  $h_\alpha$  sont des constantes, celles de  $\alpha$  sont des nombres entiers et  $f_h$  est la fréquence de coupure supérieure d'un filtre passe-bas. Les formules (3), (4) et (5) sont correctes et cohérentes pour les bruits stationnaires, y compris le bruit de phase. On élimine la divergence pour les hautes fréquences par le filtrage introduit dans la formule (6). L'identification et la caractérisation des cinq processus de bruit sont indiquées dans le Tableau 1 et représentées sur la Fig. 1. En pratique, deux ou trois processus de bruit seulement suffisent habituellement à décrire les fluctuations de fréquence aléatoires d'un oscillateur donné; les autres peuvent être négligés.

## 3. Domaine temporel

L'instabilité aléatoire de fréquence dans le domaine temporel peut être définie par des variances d'échantillon. La mesure recommandée est l'écart type à deux échantillons, qui est la racine carrée de la variance à deux échantillons à temps mort nul  $\sigma_y^2(\tau)$ :

$$\sigma_y^2(\tau) = 1/2 \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \quad (7)$$

où:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} \quad \text{et} \quad t_{k+1} = t_k + \tau \quad (\text{échantillons adjacents})$$

$\langle \rangle$  indique une moyenne calculée sur un temps infini. L'expression (7) est souvent appelée la variance d'Allan.  $x_k$  et  $x_{k+1}$  sont des mesures résiduelles de temps effectuées aux instants  $t_k$  et  $t_{k+1} = t_k + \tau$ , avec  $k = 1, 2, \dots$  et  $1/\tau$  étant le taux d'échantillonnage fixe qui donne un temps mort nul entre les mesures de fréquence. Par le terme «résiduelles», on entend que les effets systématiques connus sont éliminés.

Si l'on définit le taux d'échantillonnage initial par  $1/\tau_0$ , en général on peut obtenir une meilleure évaluation de  $\sigma_y(\tau)$  en utilisant ce qu'on appelle une évaluation de recouvrement. Cette évaluation est obtenue au moyen de l'expression (8):

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N - 2n) \tau^2} \sum_{i=1}^{N-2n} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2 \quad (8)$$

où  $N$  est le nombre de mesures des écarts de temps espacées de  $\tau_0$  ( $N = M + 1$  où  $M$  est le nombre de mesures de fréquence de durée d'échantillon  $\tau_0$ ) et  $\tau = n \tau_0$ .

S'il existe un temps mort entre les mesures d'écart de fréquence et si on ne tient pas compte de ce fait lors du calcul de l'expression (7), on a montré que les valeurs de stabilité qu'on a déterminées (qui ne sont plus des variances d'Allan), seront biaisées (sauf pour le bruit blanc de fréquence) étant donné que les mesures de fréquence ont été regroupées pour évaluer la stabilité pour  $n \tau_0$  ( $n > 1$ ). Ce biais a été étudié et des tables pour sa correction, publiées.

S'il n'existe pas de temps mort, on peut utiliser les termes  $\bar{y}_i$  pour créer un ensemble de  $\bar{y}_k$ :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} \bar{y}_i$$

TABLEAU 1

**Caractéristiques fonctionnelles des cinq processus de bruit indépendants pour l'instabilité de fréquence des oscillateurs**

Description du processus de bruit	Caractéristiques de pentes de la courbe log log				
	Domaine fréquentiel		Domaine temporel		
	$S_y(f)$	$S_\varphi(f)$ ou $S_x(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$	Mod. $\sigma_y^2(\tau)$	$\sigma_x^2(\tau)$
	$\alpha$	$\beta \equiv \alpha - 2$	$\mu$	$\mu'$	$\eta$
Bruit de fréquence à marche aléatoire	-2	-4	1	1	3
Bruit de scintillation de fréquence	-1	-3	0	0	2
Bruit blanc de fréquence	0	-2	-1	-1	1
Bruit de scintillation de phase	1	-1	-2	-2	0
Bruit blanc de phase	2	0	-2	-3	-1

$$S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$$

$$\alpha = -\mu - 1, -2 \leq \mu < 2$$

$$\sigma_y^2(\tau) \sim |\tau|^\mu$$

$$S_\varphi(f) = v_0^2 h_\alpha f^{\alpha-2} = v_0^2 h_\alpha f^\beta$$

$$\beta \equiv \alpha - 2; \eta \equiv \mu' + 2$$

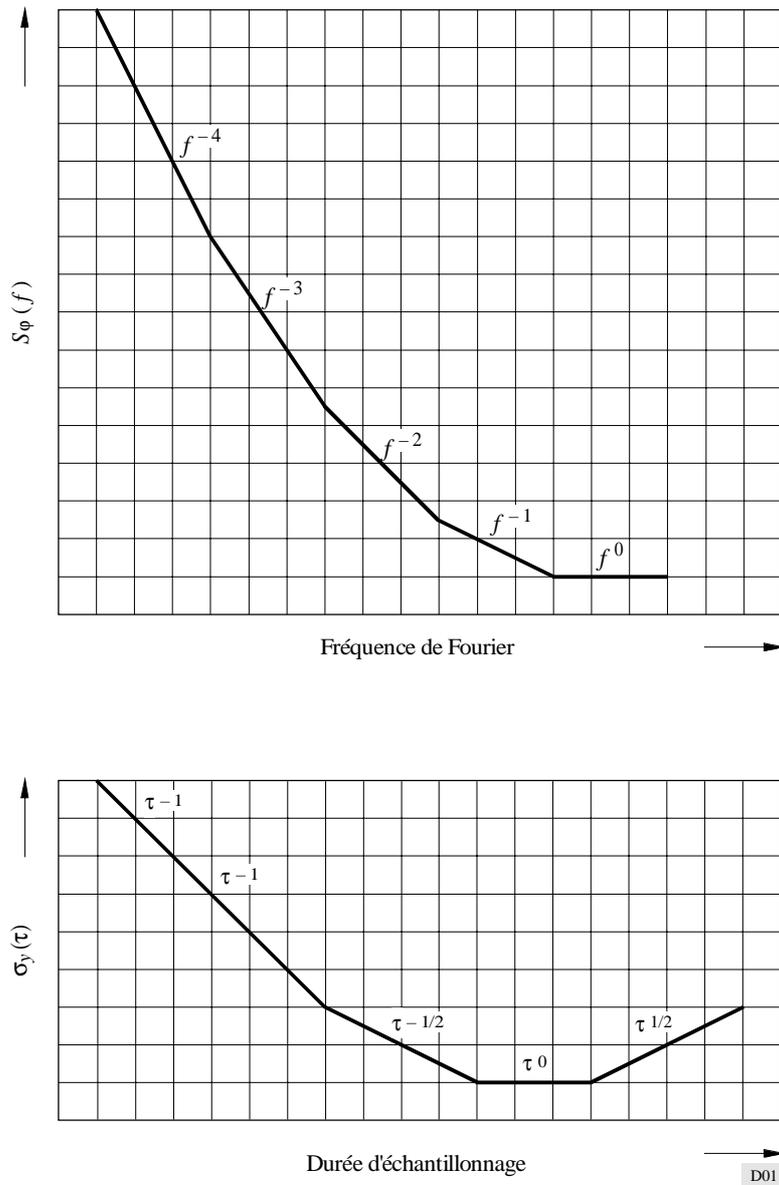
$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) \sim |\tau|^{\mu'}$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4\pi^2} h_\alpha f^{\alpha-2} = \frac{1}{4\pi^2} h_\alpha f^\beta$$

$$\alpha = -\mu' - 1$$

$$\sigma_x^2(\tau) \sim |\tau|^\eta$$

FIGURE 1  
 Caractéristiques de pente des cinq processus de bruit indépendants  
 à densités spectrales en lois de puissance  
 (échelles logarithmiques)



Une «estimation avec recouvrement» de  $\sigma_y(\tau)$  peut alors être obtenue:

$$\sigma_y(\tau) = \left| \frac{1}{2(M - 2n + 1)} \sum_{k=1}^{M-2n+1} (\bar{y}_{k+n} - \bar{y}_k)^2 \right|^{1/2} \quad (9)$$

On peut donc vérifier la dépendance de  $\sigma_y(\tau)$  comme étant une fonction de  $\tau$  à partir d'un seul ensemble de données de manière très simple.

Si l'on représente  $\sigma_y(\tau)$  en fonction de  $\tau$  pour un étalon de fréquence, on obtient les éléments représentés schématiquement sur la Fig. 1. La première composante avec  $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1/2}$  (bruit blanc de fréquence) et/ou  $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$  (bruit blanc de phase ou bruit de scintillation de phase) représente les caractéristiques fondamentales de bruit de l'étalon. Dans le cas où  $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$ , il n'est pas commode de déterminer de façon pratique si l'oscillateur est perturbé par du bruit blanc de phase ou du bruit de scintillation de phase. D'autres techniques sont proposées ci-dessous. Il s'agit là d'une limitation de l'utilité de  $\sigma_y(\tau)$  lorsque l'on cherche à étudier la nature des sources de bruit présentes dans l'oscillateur.

Une analyse dans le domaine fréquentiel est plus appropriée pour les fréquences de Fourier supérieures à environ 1 Hz. Cette loi en  $\tau^{-1}$  et/ou  $\tau^{-1/2}$  continue lorsque la durée d'intégration augmente, jusqu'à ce que le «palier» de scintillation soit atteint, où  $\sigma_y(\tau)$  est indépendant du temps moyen  $\tau$ . Ce comportement est observé pour presque tous les étalons de fréquence; il dépend de l'étalon de fréquence donné mais on ne connaît pas encore bien les origines physiques de ce phénomène. Parmi les causes probables de ce «palier» de scintillation, on peut citer les fluctuations de tension d'alimentation, les fluctuations du champ magnétique, les changements dans les composants de l'étalon et les modifications dans la puissance hyperfréquence. Finalement, on voit d'après la courbe que la stabilité se dégrade lorsque la durée d'intégration augmente. Cela se produit en règle générale pour des durées allant de quelques heures à plusieurs jours, selon le type de l'étalon.

On a mis au point une «variance d'Allan modifiée», Mod.  $\sigma_y^2(\tau)$  qui a la propriété de donner des fonctions de  $\tau$  différentes pour du bruit blanc de phase et du bruit de scintillation de phase. Les fonctions Mod.  $\sigma_y(\tau)$  sont respectivement  $\tau^{-3/2}$  et  $\tau^{-1}$ . Mod.  $\sigma_y(\tau)$  est évalué en utilisant l'expression suivante:

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \tau^2 n^2 (N - 3n + 1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[ \sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right]^2 \quad (10)$$

où:

$N$ : nombre de mesures de variation de temps espacé de  $\tau_0$

$\tau = n \tau_0$ : durée d'échantillonnage.

Les propriétés de l'évaluation et la confiance qu'on peut avoir en elle sont examinées dans la littérature technique. Des méthodes pour approcher au maximum la réalité de l'évaluation de  $\sigma_y(\tau)$  pour des modèles particuliers de bruit blanc de fréquence et de bruit de fréquence à marche aléatoire ont été développées. On a montré que ces deux modèles sont utiles pour les durées d'échantillonnage supérieures à quelques secondes dans le cas des étalons à jet de césium.

L'instabilité de temps dans le domaine temporel pour les cinq spectres du type lois de puissance peut se mesurer en utilisant la différence du second ordre entre moyennes temporelles adjacentes. Cette mesure concerne aussi la variance Mod.  $\sigma_y^2(\tau)$ .

$$\sigma_x^2(\tau) = (\tau^2 \text{Mod. } \sigma_y^2(\tau)) / 3 \quad (11)$$

$$\sigma_x^2(\tau) = (1/6) \langle [\bar{x}_{k+2n} - 2\bar{x}_{k+n} + \bar{x}_k]^2 \rangle \quad (12)$$

où  $(dx/dt) = y$  et  $\tau = n \tau_0$ . Par conséquent,  $x$  est l'écart temporel; les crochets  $\langle \rangle$  indiquent une moyenne calculée sur un temps infini. La barre surmontant  $x$  indique une moyenne calculée sur un intervalle  $\tau$ .  $x$  est donc une estimation optimale de l'écart de temps sur l'intervalle  $\tau$  en supposant que les écarts ont un spectre blanc. Les trois moyennes utilisées dans l'équation aux différences du second ordre sont adjacentes. Par conséquent, pour une valeur donnée de  $k$  dans l'équation aux différences du second ordre, ces moyennes couvrent un intervalle de temps de  $3\tau$ .

Les relations entre la densité spectrale et le domaine temporel sont les suivantes:

$$\begin{aligned} S_x(f) &\sim f^\beta \\ \sigma_x^2(\tau) &\sim \tau^\eta \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta = -\eta - 1$$

Etant donné que les types habituels de bruit de mesure sont centrés autour de  $\eta = 0$ , on obtient une dépendance proche de zéro vis-à-vis de  $\tau$  (caractéristique souhaitable pour une bonne mesure). Il existe d'autres caractéristiques utiles de cette mesure:

- elle est égale à l'écart type classique des mesures de différence de temps pour  $\tau = \tau_0$ , pour le processus de bruit dit bruit blanc de phase;
- elle est égale à l'écart type de la moyenne des mesures de différence de temps pour  $\tau = N \tau_0$  (longueur des données) pour le processus de bruit dit bruit blanc de phase;

- elle est convergente et conduit à de bons résultats pour les processus aléatoires que l'on rencontre couramment en métrologie temporelle et fréquentielle;
- la dépendance vis-à-vis de  $\tau$  indique le modèle de densité spectrale de loi de puissance adapté aux données;
- l'amplitude de  $\sigma_x(\tau)$ , pour une valeur particulière de  $\tau$  et en prenant pour hypothèse l'un des cinq modèles de densité spectrale de loi de puissance ( $\beta = -4, -3, -2, -1, 0$ ), permet d'obtenir suffisamment d'éléments d'information pour évaluer le niveau correspondant dans le domaine fréquentiel de n'importe quelle mesure normalisée de densité spectrale recommandée par l'IEEE.

Le problème de l'estimation de la stabilité d'une horloge à partir de mesures comparatives a été étudié. On propose un modèle général et cohérent relatif aux mesures de différence de signaux sans supposer *a priori* qu'il n'y a pas de corrélation entre les horloges.

#### 4. Conversion entre les domaines fréquentiel et temporel

En règle générale, si la densité spectrale de la fluctuation de la fréquence normée  $S_y(f)$  est connue, on peut calculer la variance à deux échantillons en utilisant les expressions suivantes:

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (14)$$

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\sin^6(\pi f \tau)}{(n \pi f \tau)^2 \sin^2(\pi f \tau_0)} df \quad (15)$$

et:

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{8}{3} \int_0^{f_h} S_x(f) \frac{\sin^6(\pi f \tau)}{n^2 \sin^2(\pi f \tau_0)} df \quad (16)$$

Plus précisément, en ce qui concerne le modèle en loi de puissance donné par l'expression (6), la mesure dans le domaine temporel suit également une loi de puissance à partir des expressions (6) et (11):

$$\sigma_y^2(\tau) = h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} \tau + h_{-1} 2 \log_e 2 + h_0 \frac{1}{2\tau} + h_1 \frac{1,038 + 3 \log_e(2\pi f_h \tau)}{(2\pi)^2 \tau^2} + h_2 \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2} \quad (17)$$

Les valeurs de  $h_\alpha$  sont des caractéristiques du bruit de fréquence de l'oscillateur. On remarquera que pour les valeurs entières de  $\alpha$  (comme c'est semble-t-il souvent le cas), on a

$$\mu = -\alpha - 1 \quad \text{pour} \quad -3 \leq \alpha \leq 1$$

$$\mu \sim -2 \quad \text{pour} \quad \alpha \geq 1$$

avec:

$$\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\mu$$

Ces relations de conversion ont été vérifiées expérimentalement et par le calcul. Le Tableau 2 donne les coefficients de la conversion entre les mesures de la stabilité de fréquence, du domaine temporel au domaine fréquentiel et du domaine fréquentiel au domaine temporel.

TABLEAU 2

Conversion des mesures de stabilité de fréquence entre les densités spectrales dans le domaine fréquentiel et la variance dans le domaine temporel et vice versa (pour  $2\pi f_h \tau \gg 1$ )

Description du processus de bruit	$\sigma_y^2(\tau) =$	$S_y(f) =$	$S_\phi(f) =$	$S_x(f) =$
Bruit de fréquence à marche aléatoire	$A[f^2 S_y(f)] \tau^1$	$\frac{1}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{v_0^2}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-4}$	$\frac{3,636}{A} [\tau^{-3} \sigma_x^2(\tau)] f^{-4}$
Bruit de scintillation de fréquence	$B[f S_y(f)] \tau^0$	$\frac{1}{B} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$\frac{v_0^2}{B} [\tau^0 \sigma_y^2(\tau)] f^{-3}$	$\frac{0,741}{AB} [\tau^{-2} \sigma_x^2(\tau)] f^{-3}$
Bruit blanc de fréquence	$C[f^0 S_y(f)] \tau^{-1}$	$\frac{1}{C} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{v_0^2}{C} [\tau^1 \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{1}{AC} [\tau^{-1} \sigma_x^2(\tau)] f^{-2}$
Bruit de scintillation de phase	$D[f^{-1} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^1$	$\frac{v_0^2}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$0,89 [\tau^0 \sigma_x^2(\tau)] f^{-1}$
Bruit blanc de phase	$E[f^{-2} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^2$	$\frac{v_0^2}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{1}{\tau_0 f_h} [\tau \sigma_x^2(\tau)] f^0$

$$A = \frac{4\pi^2}{6}$$

$$B = 2 \log_e 2$$

$$C = 1/2$$

$$D = \frac{1,038 + 3 \log_e (2\pi f_h \tau)}{4\pi^2}$$

$$E = \frac{3f_h}{4\pi^2}$$

Les caractéristiques de pente des cinq processus de bruit indépendants sont représentées dans les domaines fréquentiel et temporel sur la Fig. 1 (échelles logarithmiques).

## 5. Limites de confiance des mesures dans le domaine temporel

Pour un bruit de type gaussien, l'intervalle de confiance (ou la limite d'erreur) d'une valeur particulière de  $\sigma_y(\tau)$  obtenue à partir d'un nombre fini d'échantillons est donné par l'expression ci-dessous (les estimations ne se recouvrent pas):

$$\text{Intervalle de confiance } I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} \quad \text{pour } M > 10 \quad (18)$$

où:

$M$ : nombre total de mesures utilisées pour l'estimation

$\alpha$ : valeur définie dans le paragraphe précédent

$$\kappa_2 = \kappa_1 = 0,99$$

$$\kappa_0 = 0,87$$

$$\kappa_{-1} = 0,77$$

$$\kappa_{-2} = 0,75.$$

A titre d'exemple, pour un modèle gaussien avec  $M = 100$ ,  $\alpha = -1$  (bruit de scintillation de fréquence) et  $\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = 10^{-12}$ , on peut écrire:

$$I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,77) \cdot (100)^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0,077) \quad (19)$$

ce qui donne:

$$\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = (1 \pm 0,08) \times 10^{-12} \quad (20)$$

Une autre méthode d'estimation incluant notamment le temps mort entre paires de mesures a également été mise au point. Elle fait apparaître l'influence de l'autocorrélation des fluctuations de fréquence.

Les intervalles de confiance ci-dessus s'appliquent à des estimations «sans recouvrement». Dans le cas d'estimations «avec recouvrement», l'intervalle de confiance est plus petit et peut être calculé.

Le biais qui résulte de l'application de la variance à deux échantillons à des intervalles de temps obtenus par concaténation de plusieurs mesures successives avec temps mort a été déterminé en fonction du type de bruit. Ce biais peut être important.

L'effet de la nature du filtrage analogique qui limite la puissance de bruit du signal étudié autour de sa fréquence nominale a été déterminé, en particulier en ce qui concerne l'utilisation d'un filtre passe-bas au lieu du filtre passe-bande centré sur la fréquence nominale.

Les degrés de liberté (*d.f.*) pour les «estimations avec recouvrement» sont théoriquement calculés et font l'objet de courbes pour des spectres du type lois de puissance pour estimer l'intervalle de confiance de l'écart-type à deux échantillons. L'intervalle de confiance pour l'écart type à deux échantillons,  $\sigma_y(\tau)$  est:

$$\frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_1}} < \sigma_y(\tau) < \frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_2}} \quad (21)$$

où:

$\chi_{P_1}, \chi_{P_2}$  : valeurs en percentile pour la distribution  $\chi^2$

signe « $\hat{\sigma}$ » : variance à deux échantillons estimée ou mesurée pour un ensemble fini.

Pour  $\alpha = +2$ , l'amélioration du degré de liberté est presque  $n$  fois meilleure que pour le cas de l'estimation sans chevauchement. On obtient aussi une amélioration importante pour  $\alpha = +1$ . Pour  $\alpha = 0$ , le rapport pour les degrés de liberté est de 2; pour  $\alpha = -1$ , il est de 1,3 et pour  $\alpha = -2$ , il est de 1,04.

## 6. Conclusion

Les méthodes statistiques qui permettent de décrire l'instabilité de fréquence et de phase ainsi que le modèle correspondant de densité spectrale en loi de puissance suffisent à décrire l'instabilité à court terme de l'oscillateur. Les expressions (14) à (16) montrent que la densité spectrale peut être convertie, sans introduire aucune ambiguïté en une mesure temporelle. Toutefois, l'inverse n'est pas vrai dans tous les cas, mais il est vrai pour les spectres à loi de puissance souvent utilisés pour établir des modèles d'oscillateurs de précision.

Le modèle décrit ne traite pas les variations non aléatoires. Elles peuvent être soit périodiques, soit systématiques. Les variations périodiques devront être analysées grâce aux méthodes connues d'analyse harmonique. Quant aux variations systématiques, elles sont décrites par une dérive linéaire ou d'un ordre supérieur.