Unión Internacional de Telecomunicaciones

UIT-R

Sector de Radiocomunicaciones de la UIT

Recomendación UIT-R TF.2118-0

(12/2018)

Transferencia de tiempo relativista

Serie TF

Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias

Unión Internacional de Telecomunicaciones

Prólogo

El Sector de Radiocomunicaciones tiene como cometido garantizar la utilización racional, equitativa, eficaz y económica del espectro de frecuencias radioeléctricas por todos los servicios de radiocomunicaciones, incluidos los servicios por satélite, y realizar, sin limitación de gamas de frecuencias, estudios que sirvan de base para la adopción de las Recomendaciones UIT-R.

Las Conferencias Mundiales y Regionales de Radiocomunicaciones y las Asambleas de Radiocomunicaciones, con la colaboración de las Comisiones de Estudio, cumplen las funciones reglamentarias y políticas del Sector de Radiocomunicaciones.

Política sobre Derechos de Propiedad Intelectual (IPR)

La política del UIT-R sobre Derechos de Propiedad Intelectual se describe en la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI a la que se hace referencia en la Resolución UIT-R 1. Los formularios que deben utilizarse en la declaración sobre patentes y utilización de patentes por los titulares de las mismas figuran en la dirección web http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/es, donde también aparecen las Directrices para la implementación de la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI y la base de datos sobre información de patentes del UIT-R sobre este asunto.

Series de las Recomendaciones UIT-R

(También disponible en línea en http://www.itu.int/publ/R-REC/es)

Series	Título
BO	Distribución por satélite
BR	Registro para producción, archivo y reproducción; películas en televisión
BS	Servicio de radiodifusión (sonora)
BT	Servicio de radiodifusión (televisión)
F	Servicio fijo
M	Servicios móviles, de radiodeterminación, de aficionados y otros servicios por satélite conexos
P	Propagación de las ondas radioeléctricas
RA	Radio astronomía
RS	Sistemas de detección a distancia
S	Servicio fijo por satélite
SA	Aplicaciones espaciales y meteorología
SF	Compartición de frecuencias y coordinación entre los sistemas del servicio fijo por satélite y del servicio fijo
SM	Gestión del espectro
SNG	Periodismo electrónico por satélite
TF	**Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias**
V	Vocabulario y cuestiones afines

***Nota**: Esta Recomendación UIT-R fue aprobada en inglés conforme al procedimiento detallado en la Resolución UIT-R 1.*

Publicación electrónica
Ginebra, 2019

RECOMENDACIÓN UIT-R TF.2118-0

Transferencia de tiempo relativista

(2018)

Cometido

En la presente Recomendación se establecen algoritmos y procedimientos convencionales comunes que se habrán de utilizar al comparar relojes en la superficie de la Tierra y en plataformas alejadas de ésta, pero dentro del sistema solar. Estas expresiones se determinan explícitamente en la teoría de la relatividad general actualmente aceptada para crear sistemas de referencia espacio-tiempo. Cabe esperar que estos algoritmos y procedimientos se utilicen para comparar relojes situados en satélites terrestres, vehículos espaciales interplanetarios y sobre la superficie de cuerpos del sistema solar.

Palabras clave

Propagación de señales, relativista, reloj, sistema de coordenadas, transferencia de tiempo

Recomendaciones del UIT-R conexas

Recomendaciones UIT-R TF.374-5, UIT-R TF.767-2, UIT-R TF.1011-1

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

a) que resulta conveniente mantener la coordinación de tiempo y frecuencia en las plataformas que funcionan en las proximidades de la Tierra y en el sistema solar;

b) que se requieren medios precisos de transferencia de tiempo y frecuencia con el fin de satisfacer las necesidades futuras de comunicación, navegación y científicas en las proximidades de la Tierra y en el sistema solar;

c) que los relojes varían con el tiempo y la frecuencia en función del trayecto debido a su movimiento y a la intensidad del potencial gravitatorio en el que funcionan;

d) que es preciso definir claramente los fundamentos conceptuales de la transferencia de tiempo y frecuencia;

e) que en los procedimientos para la transferencia de tiempo y frecuencia en las proximidades de la Tierra y a través de cuerpos celestes y aeronaves en el sistema solar es preciso recurrir a algoritmos matemáticos que tengan en cuenta los efectos relativistas;

f) que los requisitos de precisión y exactitud para la transferencia de tiempo y frecuencia en la proximidad de la Tierra y en el sistema solar dependen de la aplicación específica de la que se trate,

recomienda

que se utilicen, según proceda, los algoritmos matemáticos del Anexo I que explican los efectos relativistas en la transferencia de tiempo y frecuencia.

Anexo I

ÍNDICE

1 Objetivo

El objetivo del Anexo I es describir a grandes rasgos los conceptos y procedimientos básicos que deben aplicarse para abordar los efectos de la relatividad en los sistemas de señales horarias, navegación, científicos y de comunicación. Se pretende que esto pueda servir como referencia de interés para aplicaciones específicas, entre ellas la comparación entre los tiempos registrados por relojes en vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra, en el espacio interplanetario y en superficies planetarias, con los tiempos registrados por los relojes en la Tierra. Se basa en los Convenios del IERS (2010), el Manual del UIT-R sobre Transferencia y difusión por satélite de señales horarias y frecuencias (2010), Nelson, Metrología (2011), y Petit y Wolf, Metrología (2005). Para más información, los usuarios pueden consultar estas publicaciones y las referencias citadas en las mismas.

2 Marco relativista

Un sistema de referencia es una construcción matemática que se utiliza para especificar eventos de espacio-tiempo que se describen mediante cuatro coordenadas $x^\alpha = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Los índices en letras griegas adoptan los valores 0, 1, 2, 3 y los de las letras latinas los valores 1, 2, 3. Los índices repetidos indican el sumatorio en ese índice. El índice 0 se refiere a la variable tiempo mientras que los índices 1, 2, 3 se refieren a las tres coordenadas espaciales. Un marco de referencia es la realización del sistema de referencias normalmente en forma de catálogo de posiciones y movimientos de los objetos de una efemérides.

Un sistema de referencia viene determinado por su tensor métrico, $g_{\alpha\beta}(t, x^i)$ que permite computar la distancia espacio-tiempo entre dos eventos x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\left(t, x^i\right)dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{00}\mathrm{c}^2 dt^2 + 2g_{0i}\mathrm{c}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1}$$

siendo c la velocidad de la luz.

Las resoluciones de las organizaciones científicas internacionales definen el sistema de referencia específicamente. Las más importantes son:

1) Resolución A4 de la UAI (1991), que define el sistema de referencia celeste baricéntrico (BCRS) y el sistema de referencia celeste geocéntrico (GCRS) y sus coordenadas temporales. En la Resolución B1 de la UAI (2000) se perfecciona la definición del BCRS.

2) Resolución 2 de la UGGI (2007), que define el sistema de referencia terrestre geocéntrico (GTRS), junto con el sistema de referencia terrestre internacional (ITRS).

Dicho en pocas palabras, el BCRS es un sistema de coordenadas espacio-tiempo para el sistema solar centrado en el baricentro del sistema y especificado mediante el tensor métrico dado por la Resolución B1.3 de la UAI (2000). (Véase https://www.iau.org/administration/resolutions/general_assemblies/). El GCRS es un sistema inercial geocéntrico (ECI) de coordenadas espacio-tierra centradas en el geocentro cuyo tensor métrico también se especifica en la Resolución B1.3 de la UAI (2000). Se define de forma tal que la transformación entre las coordenadas espaciales BCRS y GCRS no contiene componente de rotación, de forma que el GCRS no rota cinemáticamente con respecto al BCRS. El sistema de referencia terrestre geocéntrico (GTRS) es un sistema de coordenadas geocéntricas fijas (ECEF).

En el marco de la relatividad general, el tiempo propio (τ) es la lectura real de un reloj o el tiempo local en el marco de referencia propio del reloj. El tiempo coordinado (t) es una variable independiente en las ecuaciones del movimiento de cuerpos materiales y en las ecuaciones de propagación de las ondas electromagnéticas. Es una coordenada matemática en el sistema de coordenadas cuadrimensional de espacio-tiempo. Para un evento dado, el tiempo coordinado tiene el mismo valor en todas partes. Este tiempo no se mide, sino que se calcula a partir de los tiempos propios de los relojes. La relación entre el tiempo coordinado y el tiempo propio depende de la posición del reloj y del estado de movimiento en su contexto gravitatorio, y se calcula integrando el intervalo espacio-tiempo. Al comparar los tiempos propios de dos relojes, el tiempo coordinado se elimina al final. Por consiguiente, la transferencia de tiempo relativista es independiente del sistema de coordenadas. El sistema de coordenada se puede elegir arbitrariamente según convenga.

Para un reloj transportado, el intervalo espacio-tiempo viene dado por:

$$ds^2 = g_{00}\,\mathrm{c}^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,\mathrm{c}\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -\mathrm{c}^2 d\tau^2 \qquad (2)$$

Por consiguiente, $dt = d\tau$ para un reloj en reposo en un sistema de referencia inercial, donde $dx^i = 0$ y $-g_{00} = 1$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} = \delta_{ij}$. El tiempo coordinado transcurrido correspondiente al tiempo propio medido durante el transporte de un reloj entre los puntos A y B es:

$$\Delta t = \pm\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{1+\frac{1}{c^2}\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\,d\tau + \frac{1}{c}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\frac{dx^j}{d\tau}\,d\tau \qquad (3)$$

En el caso de una señal electromagnética, el intervalo espacio-tiempo es:

$$ds^2 = g_{00}\,c^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,c\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = 0 \qquad (4)$$

La velocidad de la luz c es idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales. El tiempo coordinado transcurrido en la propagación entre los puntos A y B es:

$$\Delta t = \pm\frac{1}{c}\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)dx^i\,dx^j} + \frac{1}{c}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\,dx^j \qquad (5)$$

3 Escalas de tiempo

Escalas de tiempo coordinado

El tiempo coordinado geocéntrico (TCG) es el tiempo coordinado en un sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra.

El tiempo terrestre (TT) es un tiempo coordinado del sistema de coordenadas ECI que se obtiene con un cambio de escala del TCG de modo que tenga aproximadamente la misma tasa que el tiempo propio del reloj en reposo en el geoide. La relación entre el TCG y el TT se define de manera que $d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$, siendo L_G una constante definida $\equiv 6{,}969\,290\,134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ µs/d. Por consiguiente:

$$\mathrm{TT} = (1 - L_\mathrm{G})\ \mathrm{TCG} \qquad (6)$$

o bien

$$TCG - TT = L_G(TCG - TCG_0) = \frac{L_G}{1-L_G}(TT - TT_0) \qquad (7)$$

El tiempo coordinado baricéntrico (TCB) es el tiempo coordinado en un sistema de coordenadas con origen en el baricentro del sistema solar. La diferencia entre TCB y TCG tiene la forma:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} = L_C\,\mathrm{TCB} + P(t) + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t) \qquad (8)$$

siendo $L_c = 1 - \langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle$, $\langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle$ un desplazamiento medio de la tasa, $P(t)$ representa una serie de términos periódicos, $\mathbf{v}_E(t)$ es la velocidad baricéntrica del centro de masas de la Tierra, y $\mathbf{R}(t)$ el vector de posición dependiente del tiempo con respecto al geocentro.

La transformación de *TCB* en *TT* tiene un desplazamiento medio de la tasa:

$$\langle d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCB}\rangle = (d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG})\langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \equiv 1 - L_B \qquad (9)$$

siendo $L_G \equiv 6{,}969\,290\,134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2\ \mu\mathrm{s/d}$, $L_C = 1{,}480\,826\,867\,41 \times 10^{-8} \approx 1{,}28\ \mathrm{ms/d}$, y $L_B = 1{,}550\,519\,767\,72 \times 10^{-8} \approx 1{,}34\ \mathrm{ms/d}$. La diferencia entre TCB y TT es:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} = L_B\,\mathrm{TCB} + (1 - L_G)\left[P(t) + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t)\right] \qquad (10)$$

La época de TT, TCG, y TCB es 1 de enero de 1977 0 h 32,184 s TAI (JD 2 443 144,5003725).

El tiempo dinámico baricéntrico (TDB) es una escala temporal obtenida mediante un cambio de escala del TCB, y se define mediante la expresión $\mathrm{TDB} \equiv (1 - L_B)\,\mathrm{TCB} + \mathrm{TDB}_0$, siendo $L_B \equiv 1{,}550\,519\,768 \times 10^{-8}$ y $\mathrm{TDB}_0 \equiv -65{,}5\ \mu\mathrm{s}$ constantes definitorias. TDB tiene la misma tasa que TT.

Escalas de tiempo atómico

La escala fundamental de tiempo basada en relojes atómicos es el Tiempo Atómico Internacional (TAI), que se calcula en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM) a partir de una media ponderada de lecturas de los relojes atómicos en los laboratorios de cronometría distribuidos por todo el mundo. Este proceso consta de dos pasos: 1) se calcula una escala de tiempo atómico libre, *Echelle Atomique Libre* (EAL), a partir de los datos comparativos de los relojes; 2) se aplican correcciones de frecuencia al EAL tomando como base las lecturas de unas frecuencias patrón primarias que funcionan en ciertos laboratorios, y se reducen por corrección relativista al geoide de definición convencional. El TAI es una escala continua de referencia temporal que no se divulga. Aunque el TT es una escala temporal uniforme teórica y el TAE se obtiene por procedimientos estadísticos, una realización práctica de TT sería TT = TAI + 32,184 s.

La escala de tiempo atómico para señales horarias civiles es el tiempo universal coordinado (UTC), que difiere del TAI en un número entero de segundos intercalares. El UTC se divulga cada mes en la *Circular T* de la BIPM en forma de diferencias respecto de los resultados de cada laboratorio UTC(k), siendo k la designación del laboratorio en cuestión.

4 Comparación de los relojes

Sistema de coordenadas inercial geocéntrico (ECI)

El tiempo coordinado asociado a un sistema de coordenadas inercial con origen en la Tierra (ECI), por ejemplo el GCRS, es un tiempo coordinado geocéntrico (TCG). Hasta términos de orden $1/c^2$, las componentes del tensor métrico en este sistema de coordenadas son $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$, siendo U el potencial gravitatorio.

El TCG transcurrido en el sistema de coordenadas ECI correspondiente al tiempo propio transcurrido durante el transporte de un reloj entre los puntos A y B viene dado por la expresión:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}v^2\right) d\tau \qquad (11)$$

siendo U el potencial gravitatorio de la Tierra en la posición del reloj excluido el potencial centrífugo. v es la velocidad del reloj con respecto al geoide. U puede expresarse en función de la distancia radial r, la latitud geocéntrica ϕ y la longitud λ como expansión en armónicos esféricos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} U(r,\phi,\lambda) &= \frac{GM_E}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen }\phi)\big(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\text{sen } m\lambda\big)\right] \\ &= \frac{GM_E}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\text{sen }\phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen }\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\text{ sen } m\lambda)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

siendo GM_E la constante gravitatoria de la Tierra y R_E el radio ecuatorial de la Tierra. Los factores P_n(sen ϕ) son los polinomios de Legendre de grado n y los factores P_{nm}(sen ϕ) son las funciones de Legendre de grado n y orden m asociadas. La relación entre la latitud geocéntrica ϕ_c y la latitud geográfica ϕ_g viene dada por la expresión $\phi_c = (1 - f^2) \tan \phi_g$, donde f es el achatamiento.

Reloj en reposo sobre el geoide

Para un reloj en reposo sobre la superficie de la Tierra en rotación, es necesario tener en cuenta la velocidad del reloj $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ en el sistema de coordenadas ECI, siendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular de la Tierra y $\mathbf{r}$ la posición del reloj. Así pues, el tiempo coordinado (TCG) transcurrido mientras el reloj registra el tiempo propio $\Delta\tau$ es:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}U + \frac{1}{2\mathrm{c}^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\right)d\tau = \int_A^B\left(1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}W_0\right)d\tau\ , \tag{13}$$

siendo W_0 el potencial de la gravedad, compuesto de la suma del potencial gravitatorio, U, y el potencial rotacional, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$. Como el potencial gravitatorio W_0 en la superficie del geoide es constante, se puede calcular en el ecuador y su viene dado, aproximadamente, por la siguiente expresión:

$$W_0 \approx \frac{GM_E}{R_E}\left(1+\frac{1}{2}J_2\right)+\frac{1}{2}\omega^2 R_E{}^2 \tag{14}$$

Transferencia de tiempo

Cuando se transfiere tiempo del punto P al Q por medio de un reloj, el tiempo coordinado transcurrido durante el movimiento del reloj viene dado por:

$$\Delta t = \int_P^Q \left[1 + \frac{U(\mathbf{r}) - \mathrm{U_g}}{\mathrm{c}^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})^2}{2\mathrm{c}^2}\right] d\tau, \tag{15}$$

siendo $U(\mathbf{r})$ el potencial gravitatorio en la posición del reloj excluido el potencial centrífugo, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ la velocidad del reloj visto en el sistema de referencia geocéntrico no rotatorio, y $\mathrm{U_g}$ el potencial en el geoide.

Reloj en un satélite en órbita terrestre

Para un reloj situado en un satélite en órbita alrededor de la Tierra, la órbita puede considerarse en una primera aproximación kepleriana (no perturbada). El potencial a una distancia r del centro de la Tierra es $U = GM_E/r$, y el tiempo coordinado (TCG) transcurrido mientras el reloj registra el tiempo propio $\Delta\tau$ es, aproximadamente:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM_E}{r}\right) d\tau \approx \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{a}\right)\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM_E\, a}\; e \operatorname{sen} E \tag{16}$$

siendo E la anomalía excéntrica determinada a partir de la anomalía media mediante la ecuación de Kepler, $M \equiv n\Delta t = E - e \operatorname{sen} E$, siendo n el movimiento medio dado por $n \equiv 2\pi / T = \sqrt{\mathrm{GM}_E / a^3}$, T el periodo orbital y a el semieje mayor orbital.

Para comparar el tiempo propio de un reloj situado en un satélite en órbita alrededor de la Tierra con el tiempo propio de un reloj en reposo sobre el geoide, es necesario convertirlo en TT. Por consiguiente, el intervalo de tiempo propio registrado por un reloj en reposo sobre el geoide correspondiente al intervalo del tiempo propio registrado por un reloj en el satélite viene dado por:

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{a} - \frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2c^2}\omega^2 R_E{}^2\right]\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM_E\, a}\; e \operatorname{sen} E \tag{17}$$

siendo $J2$ el coeficiente de achatamiento de segundo orden de la Tierra. El segundo término es la corrección correspondiente a la variación de la velocidad y el potencial debida a la excentricidad orbital.

Al nivel de precisión inferior a un nanosegundo, es necesario tener en cuenta las perturbaciones orbitales debidas a los armónicos del potencial gravitatorio de la Tierra, los efectos de las mareas causadas por la Luna y el Sol, y la presión de la radiación solar. A este nivel de precisión, la perturbación J_2 produce variaciones en $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ que dan lugar a efectos periódicos adicionales del orden de 0,1 ns. Por consiguiente, para tener plenamente en cuenta la perturbación J_2, es necesario realizar una integración numérica de la órbita y una integración numérica de la ecuación (16). También se debería tomar en consideración los efectos de las mareas debidas a la Luna y el Sol, así como la presión de la radiación solar.

En caso de órbitas terrestres bajas, son importantes tanto los armónicos gravitatorios zonales como los teserales. La corrección habitual de la excentricidad de la ecuación (16) ya no es exacta. En este caso, es preferible integrar la órbita e integrar la ecuación (16) numéricamente, en particular los armónicos de orden superior del potencial gravitatorio de la Tierra.

5 Sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra (ECEF)

Hasta términos de orden $1/c^2$, las componentes de la métrica son $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/c^2 = 1 - 2W_0/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/c$, y $g_{ij} = \delta_i$. En el sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra (ECEF) en rotación, el tiempo coordinado es igual al tiempo terrestre (TT), y el tiempo coordinado transcurrido que se acumula durante el transporte del reloj:

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 - \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{1}{2c^2}v^2\right] d\tau + \frac{1}{c^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}\, d\tau \tag{18}$$

siendo $\Delta U(\mathbf{r})$ la diferencia de potencial gravitacional (incluido el potencial centrífugo) entre la posición del reloj en **r** y el geoide, observado desde un sistema de coordenadas fijo en Tierra, de conformidad con el convenio (Resolución A4 de la UAI, 1992) de que $\Delta U(\mathbf{r})$ es negativo cuando el reloj se encuentra por encima del geoide. Cuando la altura *h* del reloj es inferior a 24 km por encima del geoide, $\Delta U(\mathbf{r})$ puede aproximarse por g*h*, siendo g la aceleración total debida a la gravedad evaluada en el geoide (incluida la aceleración rotacional de la Tierra). Esta aproximación se aplica a todas las transferencias aerodinámicas y hacia la Tierra. Cuando *h* es mayor de 24 km, la diferencia de potencial $\Delta U(\mathbf{r})$ puede calcularse con mayor precisión de la forma siguiente:

$$\Delta U\left(\mathbf{r}\right) = \frac{GM_E}{r} + J_2 GM_E a_1^2 \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{2r^3}\right) + \omega^2 r^2 \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{U_g} \tag{19}$$

Para una transferencia de tiempo con un nivel de exactitud de 1 ns, no debe utilizarse esta fórmula si la distancia es superior a unos 50 000 km desde el centro de la Tierra.

La segunda integral de la ecuación (18) corresponde al efecto Sagnac para un reloj transportado, que puede expresarse del modo siguiente:

$$\Delta t_{\mathrm{Sagnac}} = \frac{\omega \mathrm{R}^2}{\mathrm{c}^2}\int_A^B \cos^2\phi \, d\lambda = \frac{2\,\omega A_E}{\mathrm{c}^2} \tag{20}$$

siendo R el radio de la Tierra, ϕ la latitud, λ la longitud, y A_E la proyección sobre el plano ecuatorial de la zona barrida por el vector de posición respecto del centro de la Tierra (positiva en sentido Este y negativa en sentido Oeste). La corrección es positiva para los relojes que se desplazan hacia el Este y negativa para los que se desplazan hacia el Oeste.

Transferencia de tiempo

Cuando se transfiere el tiempo del punto A al B mediante un reloj portátil, el tiempo coordinado acumulado durante el transporte es:

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 + \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{\mathrm{c}^2} + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2\mathrm{c}^2}\right] d\tau + \frac{2\omega}{\mathrm{c}^2} A_E \tag{21}$$

donde A_E se mide en un sistema de coordenadas fijo en Tierra. El área barrida A_E se considera positiva cuando la proyección del trayecto del reloj sobre el plano ecuatorial se desplaza hacia el Este. Para la transferencia de tiempo con un nivel de exactitud de 1 ns, no debe utilizarse esta fórmula si la distancia es superior a unos 50 000 km desde el centro de la Tierra. Para una distancia mayor, la transferencia de tiempo debe calcularse en el sistema de coordenadas baricéntrico.

6 Sistema de coordenadas baricéntrico

El intervalo de tiempo coordinado baricéntrico (TCB) correspondiente a un intervalo de tiempo propio viene dado por:

$$\mathrm{TCB} = \int_{\tau_0}^{\tau}\left[1 + \frac{1}{\mathrm{c}^2}U_E\left(\mathbf{R}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{c}^2}|\dot{\mathbf{R}}|^2\right] d\tau + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\int_{\tau_0}^{\tau}\left[U_{\mathrm{ext}}\left(\mathbf{r}_E\right) + \frac{1}{2}v_E^2\right] d\tau + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{R}\Big|_{\tau_0}^{\tau} \tag{22}$$

siendo **R** la posición geocéntrica del reloj, $\mathbf{r}_E$ la posición baricéntrica del centro de masas de la Tierra, $U_E(\mathbf{R})$ el potencial newtoniano de la Tierra, $U_{\text{ext}}(\mathbf{R})$ el potencial newtoniano externo de todos los cuerpos del sistema solar salvo la Tierra, evaluados en el reloj, y $\mathbf{v}_E$ la velocidad baricéntrica del centro de masas de la Tierra. La ecuación (22) se aplica a un reloj que se encuentre en cualquier punto próximo a la Tierra, y en particular un reloj a bordo de un satélite o sobre la superficie terrestre. Para un reloj en reposo sobre el geoide, el primer término es TCG. Por consiguiente, al orden $1/c^2$ la diferencia de tiempo coordinado entre TCB y TCG es:

$$\text{TCB} - \text{TCG} = \frac{1}{c^2}\int_{t_0}^{t}\left[U_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}_E\right) + \frac{1}{2}v_E^2\right]dt + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t) \tag{23}$$

Para una transferencia de tiempo entre un cuerpo del sistema solar y la Tierra, se necesitan dos transformaciones. La primera transformación es de TT en TCB mientras que la segunda es de TCB en el tiempo en el cuerpo del sistema solar T_{SSB}. Como TCB es común a ambas transformaciones, se cancela al calcular la diferencia T_{SSB} – TT. La transformación de TCB a TT es:

$$\text{TCB} - \text{TT} \approx (L_C + L_G)\,\text{TCB} + P + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{R} \tag{24}$$

Análogamente, la transformación del tiempo coordinado baricéntrico (TCB) en T_{SSB} viene dada por:

$$\text{TCB} - \text{T}_{SSB} \approx (L_{CSSB} + L_{SSB})\,\text{TCB} + P + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_{SSB}\cdot\mathbf{R} \tag{25}$$

En el caso de Marte, $L_{CSSB} = L_{CM} = 0{,}972 \times 10^{-8} \approx 0{,}84$ ms/d, $L_{SSB} = L_M \equiv W_{0M}/c^2 = 1{,}403 \times 10^{-10} \approx 12{,}1$ μs/d, siendo W_{0M} el potencial de la gravedad en Marte.

7 Propagación de una señal electromagnética

Sistema de coordenadas inercial geocéntrico (ECI)

Para una señal electromagnética que se propague en un sistema de coordenadas ECI, el tiempo coordinado de propagación (TCG) es:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\text{path}}\sqrt{g_{ij}\,dx^i dx^j} \tag{26}$$

En una primera aproximación puede despreciarse el potencial gravitatorio. La métrica sería entonces $-g_{00} \approx 1$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, y el tiempo coordinado (TT) sería $(1 - L_G)\,\Delta t$. El lado derecho de la ecuación (26) es simplemente ρ/c, siendo ρ la longitud del trayecto euclídeo en el sistema ECI.

Si la señal se transmite en el tiempo coordinado t_T y se recibe en el tiempo coordinado t_R, el tiempo coordinado (TCG) de propagación a lo largo del trayecto será:

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c}\,|\,\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\,\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R\,(t_R - t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{c^2}\,\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R \tag{27}$$

donde el transmisor se encuentra en la posición $\mathbf{r}_T$ y el receptor en la $\mathbf{r}_R$, siendo $\mathbf{v}_R$ la velocidad del receptor y $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$ la diferencia entre la posición del receptor y del transmisor en el tiempo coordinado de transmisión t_T. La corrección del tiempo coordinado debida a la velocidad del receptor es:

$$\Delta t_{\text{vel}} \approx \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_R / c^2 \tag{28}$$

Para tener en cuenta el efecto del potencial gravitatorio sobre la señal electromagnética, es necesario incluir el potencial tanto en la parte espacial de la métrica como en la temporal. El retardo de tiempo gravitatorio es:

$$\Delta t_{\text{delay}} = \frac{2\,GM_E}{c^3} \ln\left(\frac{R+r+\rho}{R+r-\rho}\right) \tag{29}$$

siendo R y r las distancias radiales geocéntricas del transmisor y el receptor, respectivamente. El tiempo coordinado de propagación (TT) equivalente al intervalo de tiempo propio registrado por un reloj en reposo sobre el geoide es:

$$(1-L_G)\,\Delta t = \frac{\rho}{c} - L_G\frac{\rho}{c} + \frac{2\,GM_E}{c^3} \ln\left(\frac{R+r+\rho}{R+r-\rho}\right) \tag{30}$$

Sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra (ECEF)

Para una señal electromagnética que se propaga en un sistema de coordenadas ECEF, el tiempo coordinado de propagación (TCG) es:

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{g_{ij}\,dx^i dx^j} + \frac{1}{c}\int_{\text{path}} g_{0j}\,dx^i \tag{31}$$

Las componentes de la métrica son $-g_{00} = 1 - 2U/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/c$, y $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, siendo $\mathbf{r}$ la posición de un punto del trayecto de la señal. El tiempo coordinado (TT) es $(1 - L_G)\,\Delta t$. El tiempo coordinado transcurrido entre la emisión y la recepción de una señal electromagnética será entonces:

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \left[1 + \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2}\right] dr + \frac{1}{c^2}\int_{\text{path}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\mathbf{r} \tag{32}$$

siendo dr el incremento de la longitud estándar, o longitud propia, a lo largo del trayecto de transmisión, $\Delta U(\mathbf{r})$ el potencial en el punto $\mathbf{r}$ del trayecto de transmisión menos el potencial en el geoide (véase la ecuación (19)), visto desde el sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra.

Despreciando $\Delta U(\mathbf{r})$, el primer término de la ecuación (32) es ρ'/c, siendo ρ' la longitud del trayecto euclídeo en el sistema de coordenadas ECEF. Si la posición del transmisor es $\mathbf{r}_T$ y el receptor se encuentra en la posición $\mathbf{r}_R$ con una velocidad $\mathbf{v}'_R$, entonces:

$$\frac{\rho'}{c} = \frac{1}{c}\,|\,\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\,\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R\,(t_R - t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{c^2}\,\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'_R \tag{33}$$

siendo $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$.

El segundo término de la ecuación (32) corresponde al efecto Sagnac:

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{2\,\omega\,A_E}{\mathrm{c}^2} \tag{34}$$

siendo A_E la proyección sobre el plano ecuatorial del área formada por el centro de rotación y los extremos del trayecto de la señal. Esta área es positiva cuando el trayecto de la señal tiene una componente en sentido Oeste.

Sistema de coordenadas baricéntrico

Si se envía una señal electromagnética a un sistema de coordenadas baricéntrico con coordenadas cartesianas (x, y, z) desde un transmisor que se encuentre en el punto ($-a_T$, b, 0) a un receptor situado en el punto (a_R, b, 0) a lo largo de un trayecto aproximadamente rectilíneo $y = b$ (despreciando la deflexión gravitatoria), siendo b la distancia de la máxima aproximación al Sol. El tiempo coordinado de propagación (TCB) es:

$$\Delta t \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\int_{\text{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{2}{\mathrm{c}^2}U_S\right)dx = \frac{1}{\mathrm{c}}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx \tag{35}$$

siendo U_S el potencial gravitatorio del Sol. Así pues,

$$\Delta t = \frac{1}{\mathrm{c}}(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{\mathrm{c}^3}\ln\frac{a_R+\sqrt{a_R{}^2+b^2}}{-a_T+\sqrt{a_T{}^2+b^2}} \tag{36}$$

Ajustado a la escala del tiempo terrestre (TT) de propagación registrado por un reloj sobre el geoide,

$$\Delta t' = (1-L_B)\,\Delta t = \frac{1}{\mathrm{c}}(1-L_B)(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{\mathrm{c}^3}\ln\frac{a_R+\sqrt{a_R{}^2+b^2}}{-a_T+\sqrt{a_T{}^2+b^2}} \tag{37}$$

8 Ejemplos

Debido a los efectos relativistas, un reloj situado en un emplazamiento elevado parecerá estar a una frecuencia superior y diferirá de la tasa normalizada del TAI en $-\Delta U/\mathrm{c}^2$. Cerca del nivel del mar esto vendrá dado por $-\mathrm{g}(\phi)h/\mathrm{c}^2$, siendo ϕ la latitud geográfica, $g(\phi)$ la aceleración total a nivel del mar (gravitatoria y centrífuga) = (9,780 + 0,052 sen^2 φ) m/s^2, y h la distancia sobre el nivel del mar.

Si un reloj se desplaza con relación a la superficie de la Tierra a velocidad, V, que puede tener una componente, V_E, en sentido Este, la diferencia normalizada de frecuencia del reloj que se desplaza en relación con la de un reloj en reposo al nivel del mar es:

$$\Delta f = -\frac{1}{2}\frac{V^2}{\mathrm{c}^2} + \frac{g(\phi)h}{\mathrm{c}^2} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\omega r\cos\phi\,V_E \tag{38}$$

siendo r la distancia del reloj al centro de la Tierra.

La elección de un sistema de coordenadas es puramente discrecional, pero para definir el tiempo coordinado debe elegirse un sistema específico. Se recomienda utilizar un sistema topocéntrico para uso terrestre. En este sistema, cuando un reloj B está sincronizado con otro A (ambos estacionarios sobre la superficie de la Tierra) por medio de una señal radioeléctrica que se propaga de A a B, estos dos relojes diferirán en el tiempo coordinado en:

$$t_B - t_A = -\frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi \, d\lambda \tag{39}$$

siendo ϕ la latitud, λ la longitud Este y *path* el trayecto que sigue la señal radioeléctrica de A a B.

Si los dos relojes se sincronizan mediante un reloj portátil, diferirán en el tiempo coordinado en:

$$t_B - t_A = \int_{path}\left[\frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right]dr - \frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi \, d\lambda \tag{40}$$

siendo V la velocidad en tierra del reloj portátil, y *path* el trayecto que sigue el reloj de A a B.

9 Glosario

A_E	Proyección ecuatorial del área barrida durante la transferencia de tiempo por el vector **r** a medida que su extremo se desplaza
BCRS	Sistema de referencia celeste baricéntrico
c	Velocidad de la luz = 2,997 924 58 × 10^8 m/s
ECEF	Fijo con origen en el centro de la Tierra
ECI	Inercial centrado en la Tierra
f	Achatamiento de la Tierra = 1/298,257 223 563
GCRS	Sistema de referencia celeste geocéntrico, sistema ECI de coordenadas espaciotemporales geocéntricas
GM_E	Constante gravitatoria de la Tierra = 398 600 km^3/s^2
GTRS	Sistema de referencia terrestre geocéntrico, se trata de un sistema de coordenadas ECEF
J_{mn}	Coeficientes de los armónicos esféricos que describen el achatamiento de la Tierra. J_2 (m = 2, n = 0) es el más importante y puede definirse en términos del momento de inercia polar (C) y el ecuatorial (A) de la Tierra: $J_2 = \frac{C-A}{MR^2}$, siendo M y R la masa y el radio de la Tierra, respectivamente. $J_2 = +1{,}083 \times 10^{-3}$
L_B	$1 - (1 - L_G)(1 - L_C)$
L_c	$1 - \langle d\text{TCG}/\,d\text{TCB}\rangle$, $\langle d\text{TCG}/\,d\text{TCB}\rangle$ constituye un desplazamiento medio de la tasa
L_G	$1 - d\text{TT}/d\text{TCG}$, es una constante definida ≡ 6,969 290 134 × 10^{-10}
r	Vector cuyo origen se encuentra en el centro de la Tierra y cuyo extremo se desplaza con el reloj
r	Magnitud del vector **r**
R_E	Radio ecuatorial de la Tierra = 6 378,136 km
s_{ij}	Función delta de Kronecker: $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

t	Tiempo coordinado, se trata de la variable independiente en las ecuaciones de los cuerpos materiales y en las de propagación de las ondas electromagnéticas
TAI	Tiempo atómico internacional
TCB	Tiempo coordinado baricéntrico
TCG	Tiempo coordinado geocéntrico
TDB	Tiempo dinámico baricéntrico
TT	Tiempo terrestre
U	Potencial gravitatorio
U_g	Potencial (gravitatorio y centrífugo) en el geoide = 62 636,86 km^2/s^2
UTC	Tiempo universal coordinado
v	Velocidad del reloj con respecto al suelo
W	Potencial de la gravedad compuesto de U y el potencial rotacional, $½(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$
$\Delta U(\mathbf{r})$:	Diferencia de potencial gravitacional (incluido el potencial centrífugo) entre la posición del reloj en **r** y el geoide, observado desde un sistema de coordenadas fijo en Tierra, de acuerdo con el convenio (Resolución A4, UAI, 1992) de que $\Delta U(\mathbf{r})$ es negativo cuando el reloj se encuentra por encima del geoide
θ	Colatitud
λ	Longitud
ϕ	Latitud
ϕ_c	Latitud geocéntrica
ϕ_g	Latitud geográfica
τ	Tiempo propio medido en la «trama de reposo» del reloj; o sea, en la trama de referencia que se desplaza con el reloj
ω	Velocidad angular de la rotación terrestre = 7,292 115 × 10^{-5} rad/s

Referencias Bibliográficas

D. D. MCCARTHY y P. K. SEIDELMANN, *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2009).

R. A. NELSON, *Relativistic Time Transfer in the Vicinity of the Earth and in the Solar System*, Metrologia 48, S171 – S180 (2011).

G. PETIT y B. LUZUM (editores), IERS Conventions (2010) (International Earth Rotation and Reference Systems Service, 2010).