Международный союз электросвязи

МСЭ-R

Сектор радиосвязи МСЭ

Рекомендация МСЭ-R TF.2118-0
(12/2018)

Релятивистская передача сигналов времени

Серия TF
Передача сигналов времени и эталонных частот

Международный союз электросвязи

Предисловие

Роль Сектора радиосвязи заключается в обеспечении рационального, справедливого, эффективного и экономичного использования радиочастотного спектра всеми службами радиосвязи, включая спутниковые службы, и проведении в неограниченном частотном диапазоне исследований, на основании которых принимаются Рекомендации.

Всемирные и региональные конференции радиосвязи и ассамблеи радиосвязи при поддержке исследовательских комиссий выполняют регламентарную и политическую функции Сектора радиосвязи.

Политика в области прав интеллектуальной собственности (ПИС)

Политика МСЭ-R в области ПИС излагается в общей патентной политике МСЭ-T/МСЭ-R/ИСО/МЭК, упоминаемой в Резолюции МСЭ-R 1. Формы, которые владельцам патентов следует использовать для представления патентных заявлений и деклараций о лицензировании, представлены по адресу: http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en, где также содержатся Руководящие принципы по выполнению общей патентной политики МСЭ-T/МСЭ-R/ИСО/МЭК и база данных патентной информации МСЭ-R.

Серии Рекомендаций МСЭ-R

(Представлены также в онлайновой форме по адресу: http://www.itu.int/publ/R-REC/en.)

Серия	Название
BO	Спутниковое радиовещание
BR	Запись для производства, архивирования и воспроизведения; пленки для телевидения
BS	Радиовещательная служба (звуковая)
BT	Радиовещательная служба (телевизионная)
F	Фиксированная служба
M	Подвижные службы, служба радиоопределения, любительская служба и относящиеся к ним спутниковые службы
P	Распространение радиоволн
RA	Радиоастрономия
RS	Системы дистанционного зондирования
S	Фиксированная спутниковая служба
SA	Космические применения и метеорология
SF	Совместное использование частот и координация между системами фиксированной спутниковой службы и фиксированной службы
SM	Управление использованием спектра
SNG	Спутниковый сбор новостей
TF	**Передача сигналов времени и эталонных частот**
V	Словарь и связанные с ним вопросы

Примечание. *– Настоящая Рекомендация МСЭ-R утверждена на английском языке в соответствии с процедурой, изложенной в Резолюции МСЭ-R 1.*

Электронная публикация
Женева, 2019 г.

РЕКОМЕНДАЦИЯ МСЭ-R TF.2118-0

Релятивистская передача сигналов времени

(2018)

Сфера применения

Настоящая Рекомендации устанавливает общие типовые алгоритмы и процедуры, которые должны использоваться при сравнении значений времени, зарегистрированных на поверхности Земли и на платформах, расположенных далеко от Земли, но в пределах Солнечной системы. Эти выражения четко определяются в общей теории относительности, принятой в настоящее время для формирования основы опорных пространственно-временных систем. Предполагается, что эти алгоритмы и процедуры были бы полезны для сравнения значений времени на спутниках Земли, межпланетных космических аппаратах и на поверхности тел Солнечной системы.

Ключевые слова

Теория относительности, передача сигналов времени, распространение сигнала, часы, система координат

Соответствующие Рекомендации и Отчеты

Рекомендации МСЭ-R TF.1011-1, МСЭ-R TF.767-2, МСЭ-R TF.374-5

Ассамблея радиосвязи МСЭ,

учитывая,

a) что желательно обеспечить координацию стандартного времени и стандартной частоты на платформах, работающих вблизи Земли и в Солнечной системе;

b) что для удовлетворения будущих потребностей систем связи, навигации и науки требуются точные средства передачи сигналов времени и частоты вблизи Земли и в Солнечной системе;

c) что часы, вследствие их движения и влияния гравитационного потенциала, в котором они работают, подвержены колебаниям времени и частоты, зависящим от траектории;

d) что следует четко изложить концептуальные основы передачи сигналов времени и частоты;

e) что в процедурах передачи сигналов времени и частоты вблизи Земли, а также на небесные тела и космические аппараты в Солнечной системе требуется использовать математические алгоритмы, учитывающие релятивистские эффекты;

f) что требования по прецизионности и точности для передачи сигналов времени и частоты вблизи Земли и в Солнечной системе зависят от конкретного применения,

рекомендует

чтобы в надлежащих случаях использовались приведенные в Приложении I математические алгоритмы, учитывающие релятивистские эффекты при передаче сигналов времени и частоты.

Приложение I

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Цель

Цель Приложения I – изложить основные концепции и процедуры, которые должны применяться для учета релятивистских эффектов при хранении времени, а также для навигации, науки и систем связи. Настоящее Приложение может служить удобным справочным руководством для конкретных применений, в частности для сравнения значений времени, зарегистрированных часами на вращающемся по орбите вокруг Земли космическом аппарате, в межпланетном пространстве и на поверхности планет, со значениями времени, зарегистрированными часами на поверхности Земли. В его основу положены материалы Конвенций IERS (2010 год), Справочника МСЭ-R по спутниковой передаче сигналов времени и частоты и их распространению (2010 год), Nelson, Metrologia (2011) и Petit and Wolf, Metrologia (2005). Для получения более подробной информации пользователи могут обратиться к этим указанным публикациям и справочным документам.

2 Релятивистская основа

Опорная система координат – это математическая конструкция, используемая для определения пространственно-временных событий, описываемых посредством четырех координат $x^\alpha = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Индексы, записываемые греческими буквами, принимают значения 0, 1, 2 и 3, а записываемые латинскими буквами – 1, 2 и 3. Повторяющийся индекс подразумевает суммирование по этому индексу. Индекс 0 соответствует временно́й переменной, а индексы 1, 2 и 3 – трем пространственным координатам. Система отсчета является реализацией опорной системы координат, обычно в виде каталога положений и перемещений объектов или эфемериды.

Опорная система привязана к своему метрическому тензору $g_{\alpha\beta}(t, x^i)$, что позволяет вычислить пространственно-временной интервал между двумя событиями x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\left(t, x^i\right)dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0i}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1}$$

где c – скорость света.

Резолюциями международных научных организаций определены конкретные опорные системы. К наиболее важным из этих Резолюций относятся следующие:

1) Резолюция A4 (1991 год) Международного астрономического союза (МАС) определяет геоцентрическую небесную опорную систему (GCRS) и барицентрическую небесную опорную систему (BCRS) и их координаты времени. В Резолюции B1 (2000 год) Международного астрономического союза далее уточняется определение BCRS;

2) Резолюция 2 (2007 год) Международного геодезического и географического союза (МГГС) определяет геоцентрическую земную опорную систему (GTRS), а также международную земную опорную систему (ITRS).

Если говорить коротко, BCRS – это система пространственно-временных координат солнечной системы с началом отсчета в барицентре солнечной системы и определяемая метрическим тензором, который задается Резолюцией B1.3 IAU 2000 (см. https://www.iau.org/administration/resolutions/general_assemblies/). GCRS – это геоцентрическая инерциальная система (ECI) пространственно-временных координат, метрический тензор которой также задается Резолюцией B1.3 IAU 2000. Эта система определяется таким образом, что преобразование пространственных координат между BCRS и GCRS не содержит вращательной компоненты, поэтому с точки зрения кинематики GCRS не вращается относительно BCRS. Геоцентрическая земная опорная система (GTRS) представляет собой геоцентрическую систему координат, жестко связанную с Землей (ECEF).

В общей теории относительности собственное время τ – это реальное показание часов или местное время в собственной системе отсчета часов. Координатное время t – независимая переменная в уравнениях движения физических тел и уравнениях распространения электромагнитных волн. Это математическая координата в четырехмерной пространственно-временной системе координат. Для данного события координатное время имеет одно и то же значение в любой точке. Значения координатного времени не измеряются, а вычисляются по собственному времени часов. Соотношение между координатным и собственным временем зависит от местоположения и состояния движения часов в их гравитационной среде и выводится путем интегрирования пространственно-временного интервала. При сравнении значений собственного времени двух часов координатное время в конечном счете сокращается. Таким образом релятивистская передача сигналов времени между часами не зависит от системы координат. Система координат может быть выбрана произвольно исходя из соображений удобства.

Для перемещаемых часов пространственно-временной интервал определяется как

$$ds^2 = g_{00}\,\mathrm{c}^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,\mathrm{c}\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -\mathrm{c}^2 d\tau^2 \tag{2}$$

Таким образом $dt = d\tau$ для часов в состоянии покоя в инерциальной системе отсчета, где $dx^i = 0$, $-g_{00} = 1$, $g_{0j} = 0$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$. Истекшее координатное время, соответствующее измеренному собственному времени при перемещении часов между точками A и B, составляет

$$\Delta t = \pm\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\,d\tau \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\,\frac{dx^j}{d\tau}\,d\tau\,. \tag{3}$$

Для электромагнитного сигнала пространственно-временной интервал определяется как

$$ds^2 = g_{00}\,\mathrm{c}^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,\mathrm{c}\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = 0 \tag{4}$$

Скорость света равна c в любой инерциальной системе отсчета. Истекшее координатное время распространения сигнала между точками A и B составляет

$$\Delta t = \pm\frac{1}{\mathrm{c}}\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)dx^i\,dx^j} \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\,dx^j \tag{5}$$

3 Шкалы времени

Шкалы координатного времени

Геоцентрическое координатное время (TCG) – это координатное время в системе координат, центр которой находится в центре Земли.

Земное время (TT) – это координатное время в инерциальной системе координат ECI, получаемое путем такого изменения шкалы времени TCG, при котором оно имеет примерно ту же скорость хода, что и собственное время часов, покоящихся на поверхности геоида. Соотношение между TCG и TT определяется как $d\,\mathrm{TT}/d\,\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$, где $L_G \equiv 6{,}969290134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ мкс/сутки. Значение L_G – это заданная константа. Следовательно,

$$\mathrm{TT} = (1 - L_G)\,\mathrm{TCG}, \tag{6}$$

или

$$\mathrm{TCG} - \mathrm{TT} \;=\; L_G\,\mathrm{TCG} \;=\; \frac{L_G}{1-L_G}\,\mathrm{TT} \tag{7}$$

Барицентрическое координатное время (TCB) – это координатное время в системе координат с началом отсчета в барицентре Солнечной системы. Разность между TCB и TCG имеет вид:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} \;=\; L_C\,\mathrm{TCB} + P(t) + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t) \tag{8}$$

где $L_c = 1 - \langle d\,\mathrm{TCG}/d\,\mathrm{TCB}\rangle$, $\langle d\,\mathrm{TCG}/d\,\mathrm{TCB}\rangle$ – среднее смещение скорости хода, $P(t)$ – ряд с периодическими членами, $\mathbf{v}_E(t)$ – барицентрическая скорость центра массы Земли, а $\mathbf{R}(t)$ – зависимый от времени вектор положения относительно центра массы Земли.

Полное преобразование из TCB в TT характеризуется средним смещением скорости хода:

$$\langle d\,\mathrm{TT}/d\,\mathrm{TCB}\rangle = (d\,\mathrm{TT}/d\,\mathrm{TCG})\langle d\,\mathrm{TCG}/d\,\mathrm{TCB}\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \equiv 1 - L_B, \tag{9}$$

где $L_G \equiv 6{,}969290134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ мкс/сутки, $L_C = 1{,}48082686741 \times 10^{-8} \approx 1{,}28$ мс/сутки, а $L_B = 1{,}55051976772 \times 10^{-8} \approx 1{,}34$ мс/сутки. Разность между TCB и TT равна

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} = L_B\,\mathrm{TCB} + (1 - L_G)\left[P(t) + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t)\right] \qquad (10)$$

Началу отсчета TT, TCG и TCB соответствует время TAI 0 ч 32,184 с 1 января 1977 года (юлианская дата 2 443 144,5003725).

Барицентрическое динамическое время (TDB) – это шкала времени, полученная из TCB путем изменения шкалы по формуле $\mathrm{TDB} \equiv (1 - L_B)\,\mathrm{TCB} + \mathrm{TDB}_0$, где $L_B \equiv 1{,}550519768 \times 10^{-8}$ и $\mathrm{TDB}_0 \equiv -65{,}5$ мкс служат определяющими константами. Скорость хода TDB такая же, как и у TT.

Шкалы атомного времени

Международное атомное время (TAI) – основная шкала времени, которая базируется на атомных часах и рассчитывается Международным бюро мер и весов (BIPM) по средневзвешенным показаниям атомных часов в лабораториях времени, рассредоточенных по всему миру. Этот процесс состоит из двух этапов: 1) на основании сравнения показаний часов рассчитывается свободная шкала атомного времени (Echelle Atomique Libre, EAL); 2) к EAL применяются частотные поправки на основании показаний первичных стандартов частоты, работающих в нескольких лабораториях, с уменьшением на релятивистские поправки к определяемому обычным образом геоиду. TAI – это непрерывная опорная шкала времени, не корректируемая по рассылке. Хотя TT представляет собой теоретическую однородную шкалу времени, а TAI получается статистическими методами, практическая реализация TT имеет следующий вид: TT = TAI + 32,184 с.

Всемирное координированное время (UTC) – это атомная шкала для хранения времени в гражданских целях, отличающаяся от TAI на целое число секунд. Каждый месяц UTC рассылается посредством "Циркуляра T" BIPM в форме значений разности от реализаций этой шкалы UTC(k) в отдельных лабораториях, где k обозначает соответствующая участвующая лаборатория.

4 Сравнение показаний часов

Геоцентрическая инерциальная (ECI) система координат

Координатное время, связанное с геоцентрической инерциальной (ECI) системой координат, например GCRS, – это геоцентрическое координатное время (TCG). При использовании членов порядка $1/c^2$ компоненты метрического тензора в этой системе координат имеют вид: $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$ и $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$, где U – это гравитационный потенциал.

Истекшее время TCG в системе координат ECI, соответствующее истекшему собственному времени при перемещении часов между точками A и B, определяется как

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}v^2\right)d\tau\,. \qquad (11)$$

где U – гравитационный потенциал Земли в месте расположения часов за вычетом центробежного потенциала, а v – скорость движения часов относительно геоида. Значение U на расстоянии по радиусу r на геоцентрической широте ϕ и долготе λ можно выразить в виде разложения по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} U(r,\phi,\lambda) &= \frac{GM_E}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right] \\ &= \frac{GM_E}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\sin m\lambda)\right], \end{aligned} \qquad (12)$$

где GM_E – гравитационная постоянная Земли, а R_E – экваториальный радиус Земли. Коэффициенты $P_n(\sin\,\phi)$ представляют собой полиномы Лежандра степени n, а коэффициенты $P_{nm}(\sin\,\phi)$ – присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m. Геоцентрическая широта ϕ_c связана с географической широтой ϕ_g соотношением $\tan\phi_c = (1 - f^2)\tan\phi_g$, где f – сплюснутость.

Часы, покоящиеся на поверхности геоида

В случае часов, покоящихся на поверхности вращающейся Земли, необходимо учитывать скорость движения часов $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ в системе координат ECI, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость Земли, а $\mathbf{r}$ – местоположение часов. Таким образом время TCG, истекшее, пока часы регистрируют собственное время $\Delta\tau$, составляет приблизительно

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\right) d\tau = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}W_0\right) d\tau\,, \tag{13}$$

где W_0 – это гравитационный потенциал, равный сумме гравитационного потенциала U и вращательного потенциала $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$. Поскольку гравитационный потенциал W_0 постоянен на поверхности геоида, можно оценить его на экваторе и выразить приблизительной формулой:

$$W_0 \approx \frac{GM_E}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R_E{}^2\,. \tag{14}$$

Передача сигналов времени

При передаче сигналов времени из точки P в точку Q, осуществляемой посредством часов, координатное время, истекшее, пока часы перемещались, равно

$$\left[1 + \frac{U(\mathbf{r}) - \mathrm{U_g}}{c^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})^2}{2c^2}\right] \tag{15}$$

где $U(\mathbf{r})$ – гравитационный потенциал в месте расположения часов за вычетом центробежного потенциала, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ – скорость перемещения часов, наблюдаемая в невращающейся геоцентрической системе отсчета, а $\mathrm{U_g}$ – потенциал на поверхности геоида.

Часы на спутнике, вращающемся вокруг Земли

В случае часов на спутнике, вращающемся вокруг Земли, орбиту можно в первом приближении считать кеплеровской (невозмущенной). Потенциал на расстоянии r от центра Земли определяется формулой $U = GM_E/r$, а координатное время (TCG), истекшее, пока часы регистрируют собственное время $\Delta\tau$, приблизительно равно

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM_E}{r}\right) d\tau \approx \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{a}\right)\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM_E\,a}\;e\sin E \tag{16}$$

где E – эксцентрическая аномалия, определяемая из средней аномалии по уравнению Кеплера $M \equiv n\Delta t = E - e\sin E$, n – среднее движение, заданное формулой $n = 2\pi/T = \sqrt{GM_E/a^3}$, T – период обращения по орбите, а a – большая полуось орбиты.

Для сравнения собственного времени часов на спутнике, вращающемся вокруг Земли, с собственным временем часов, покоящихся на поверхности геоида, необходимо выполнить преобразование к шкале TT. Таким образом интервал собственного времени, зарегистрированный часами в состоянии покоя на поверхности геоида, который соответствует интервалу собственного времени, зарегистрированному часами на спутнике, можно представить формулой

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{a} - \frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2c^2}\omega^2 R_E{}^2\right]\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM_E\,a}\;e\sin E \tag{17}$$

где J_2 – коэффициент второй степени сжатия Земли. Второй член представляет собой поправку на непостоянство скорости и потенциала, обусловленное эксцентриситетом орбиты.

На субнаносекундном уровне точности необходимо учитывать возмущение орбиты, обусловливаемое гармониками гравитационного потенциала Земли, приливно-отливные воздействия Луны и Солнца, а также давление солнечного излучения. На этом уровне точности возмущение J_2 порождает изменения $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, вызывающие дополнительные периодические воздействия величиной порядка 0,1 нс. Поэтому чтобы полностью учесть возмущение J_2, необходимо численно проинтегрировать орбиту и уравнение (16). Кроме того, следует учесть приливно-отливные воздействия Луны и Солнца и давление солнечного излучения.

В случае низких околоземных орбит значимы и зональные, и тессеральные гармоники гравитационного потенциала. Обычная поправка на эксцентриситет к уравнению (16) более не обеспечивает требуемой точности. В этом случае предпочтительно выполнить интегрирование орбиты и интегрирование уравнения (16) в численной форме с учетом гармоник гравитационного потенциала Земли более высокого порядка.

5 Геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землей (ECEF)

При использовании членов порядка $1/c^2$ метрические компоненты имеют вид: $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/c^2 = 1 - 2W_0/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/c$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$. Во вращающейся геоцентрической системе координат, жестко связанной с Землей (ECEF), координатное время равно земному времени (TT), а координатное время, истекшее за период перемещения часов, составляет

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 - \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{1}{2c^2} v^2\right] d\tau + \frac{1}{c^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}\, d\tau\,, \qquad (18)$$

где $\Delta U(\mathbf{r})$ – разность гравитационных потенциалов (включая центробежный потенциал) между местом расположения часов $\mathbf{r}$ и поверхностью геоида, наблюдаемая из жестко связанной с Землей системы координат, в соответствии с принятым соглашением (Резолюция A4 Генеральной ассамблеи МАС, 1992 год) о том, что $\Delta U(\mathbf{r})$ отрицательно, когда часы находятся над поверхностью геоида. При высоте часов h над поверхностью геоида менее 24 км значение $\Delta U(\mathbf{r})$ можно аппроксимировать как gh, где g – полное гравитационное ускорение (с учетом вращательного ускорения Земли), определяемое на поверхности геоида. Эта аппроксимация применима ко всем случаям передачи сигналов времени с движением по аэродинамической траектории и в направлении к Земле. При значениях h, превышающих 24 км, разность потенциалов $\Delta U(\mathbf{r})$ можно вычислить с большей точностью по следующей формуле:

$$\Delta U(\mathbf{r}) = \frac{GM_E}{r} + J_2 GM_E a_1^2 \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{2r^3}\right) + \omega^2 r^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{U_g}. \qquad (19)$$

Для передачи сигналов времени с точностью на уровне 1 нс эту формулу не следует применять на расстояниях свыше 50 000 км от центра Земли.

Посредством второго интеграла в формуле (18) учитывается эффект Саньяка для перемещаемых часов. Его можно выразить следующим образом:

$$\Delta t_{\mathrm{Sagnac}} = \frac{\omega \mathrm{R}^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\, d\lambda = \frac{2\,\omega\, A_E}{c^2}, \qquad (20)$$

где R – радиус Земли, ϕ – широта, λ – долгота, а A_E – площадь проекции на экваториальную плоскость области, охватываемой вектором местоположения относительно центра Земли (с положительным знаком в случае движения на восток и с отрицательным в случае движения на запад). Поправка положительна для часов, перемещающихся на восток, и отрицательна для часов, перемещающихся на запад.

Передача сигналов времени

При передаче сигналов времени из точки *A* в точку *B*, осуществляемой посредством переносных часов, координатное время, истекшее, пока часы перемещались, составляет

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 + \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2c^2} \right] d\tau + \frac{2\omega}{c^2} A_E \tag{21}$$

где A_E измеряется в системе координат, жестко связанной с Землей. Охватываемая площадь A_E берется с положительным знаком, когда проекция траектории часов на экваториальную плоскость движется на восток. Для передачи сигналов времени с точностью на уровне 1 нс эту формулу не следует применять на расстояниях свыше 50 000 км от центра Земли. На бо́льших расстояниях расчеты для передачи сигналов времени следует выполнять в барицентрической системе координат.

6 Барицентрическая система координат

Интервал барицентрического координатного времени (TCB), соответствующий интервалу собственного времени, равен

$$\mathrm{TCB} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[1 + \frac{1}{c^2} U_E(\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{R}}|^2 \right] d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left[U_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2} v_E^2 \right] d\tau + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R} \Big|_{\tau_0}^{\tau}, \tag{22}$$

где $\mathbf{R}$ – положение часов в геоцентрической системе координат, $\mathbf{r}_E$ – положение центра массы Земли в барицентрической системе координат, $U_E(\mathbf{R})$ – ньютонов потенциал Земли, $U_{\mathrm{ext}}(\mathbf{R})$ – внешний ньютонов потенциал всех тел Солнечной системы, за исключением Земли, определяемый в месте нахождения часов, а $\mathbf{v}_E$ – скорость центра массы Земли в барицентрической системе координат. Формула (22) действительна для часов, находящихся в любой точке в окрестности Земли, в том числе на спутнике или на земной поверхности. Для часов, покоящихся на поверхности геоида, первый член соответствует TCG. Поэтому если ограничиться членами порядка $1/c^2$, разность значений координатного времени между TCB и TCG равна

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} = \frac{1}{c^2} \int_{t_0}^{t} \left[U_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2} v_E^2 \right] dt + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_E(t) \cdot \mathbf{R}(t). \tag{23}$$

Для передачи сигналов времени между телом в Солнечной системе и Землей требуются два преобразования: сначала из TT в TCB, а затем из TCB во время T_{SSB} на этом теле Солнечной системы. Так как TCB является общим для этих преобразований, при вычислении разности $T_{SSB} - TT$ оно сокращается. Преобразование из TCB в TT имеет вид:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} \approx (L_C + L_G)\mathrm{TCB} + P + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R} \tag{24}$$

Аналогичным образом преобразование из барицентрического координатного времени (TCB) в T_{SSB} дается формулой

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{T}_{SSB} \approx (L_{CSSB} + L_{SSB})\mathrm{TCB} + P + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{SSB} \cdot \mathbf{R}. \tag{25}$$

В случае Марса $L_{CSSB} = L_{CM} = 0{,}972 \times 10^{-8} \approx 0{,}84$ мс/сутки, а $L_{SSB} = L_M \equiv W_{0M}/c^2 = 1{,}403 \times 10^{-10} \approx$ $\approx 12{,}1$ мкс/сутки, где W_{0M} – значение гравитационного потенциала на Марсе.

7 Распространение электромагнитного сигнала

Геоцентрическая инерциальная (ECI) система координат

Для электромагнитного сигнала, распространяющегося в системе координат ECI, координатное время распространения (TCG) составляет

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{\text{path}} \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} \, . \tag{26}$$

В первом приближении гравитационным потенциалом можно пренебречь. Тогда компоненты метрического тензора имеют вид: $-g_{00} \approx 1$, $g_{0j} = 0$ и $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, а координатное время (TT) равно $(1 - L_G)\,\Delta t$. Правая часть уравнения (26) – это просто ρ/c, где ρ – евклидова длина трассы в системе ECI.

Если сигнал передается в момент t_T координатного времени и принимается в момент t_R координатного времени, то координатное время (TCG) распространения сигнала по трассе составляет

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c} \,|\, \mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T) \,| \approx \frac{1}{c} \,|\, \Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R \ (t_R - t_T) \,| \approx \frac{1}{c} \,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{c^2} \,\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_R , \tag{27}$$

где $\mathbf{r}_T$ – местоположение передатчика, $\mathbf{r}_R$ – местоположение приемника, $\mathbf{v}_R$ – скорость движения приемника, а $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$ – это разность местоположений приемника и передатчика при передаче сигнала, то есть в момент координатного времени t_T. Поправка к координатному времени для учета скорости движения приемника имеет вид

$$\Delta t_{\text{vel}} \approx \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_R \,/\, c^2 . \tag{28}$$

Чтобы учесть влияние гравитационного потенциала на электромагнитный сигнал, необходимо включить потенциал в обе части метрики – пространственную и временную. Гравитационная задержка времени составляет

$$\Delta t_{\text{delay}} = \frac{2\,GM_E}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right), \tag{29}$$

где R и r – расстояние по радиусу в геоцентрической системе координат до передатчика и приемника соответственно. Координатное время распространения (TT), соответствующее интервалу собственного времени, зарегистрированному часами в состоянии покоя на поверхности геоида, составляет

$$(1 - L_G)\,\Delta t = \frac{\rho}{c} - L_G \frac{\rho}{c} + \frac{2\,GM_E}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right). \tag{30}$$

Геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землей (ECEF)

Для электромагнитного сигнала, распространяющегося в системе координат (ECEF), координатное время распространения (TCG) составляет

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_{\text{path}} \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} + \frac{1}{c} \int_{\text{path}} g_{0j}\, dx^i . \tag{31}$$

Метрические компоненты имеют вид: $-g_{00} = 1 - 2U/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/c$ и $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, где $\mathbf{r}$ – местоположение точки на трассе распространения сигнала. Координатное время (TT) равно $(1 - L_G)\Delta t$. Тогда координатное время, прошедшее от момента излучения до момента приема электромагнитного сигнала, составляет

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_{\text{path}} \left[1 + \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2}\right] dr + \frac{1}{c^2} \int_{\text{path}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{32}$$

где dr – приращение стандартной длины или собственная длина вдоль трассы передачи сигнала, $\Delta U(\mathbf{r})$ – потенциал в точке **r** на трассе передачи сигнала за вычетом потенциала на поверхности геоида (см. формулу (19)), наблюдаемый из жестко связанной с Землей системы координат.

Если пренебречь $\Delta U(\mathbf{r})$, первым членом уравнения (32) будет ρ'/c, где ρ' – евклидова длина трассы в системе координат ECEF. Если $\mathbf{r}_T$ – местоположение передатчика, $\mathbf{r}_R$ – местоположение приемника, а $\mathbf{v}'_R$ – скорость движения приемника, то тогда

$$\frac{\rho'}{c} = \frac{1}{c}\,|\,\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\,\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R\,(t_R - t_T)\,| \approx \frac{1}{c}\,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{c^2}\,\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}'_R. \tag{33}$$

где $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$.

Второй член уравнения (32) выражает эффект Саньяка:

$$\Delta t_{\mathrm{Sagnac}} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{2\,\omega\,A_E}{c^2}\ , \tag{34}$$

где A_E – площадь проекции на экваториальную плоскость области, образуемой центром вращения и конечными точками трассы сигнала. Эта площадь берется с положительным знаком, когда у трассы распространения сигнала имеется компонента, направленная на восток.

Барицентрическая система координат

Если электромагнитный сигнал посылается в барицентрической системе координат с декартовыми координатами (x, y, z) от передатчика из точки $(-a_T, b, 0)$ к приемнику в точке $(a_R, b, 0)$ вдоль приближенно прямой трассы $y = b$ (пренебрегая гравитационным отклонением), где b – расстояние наибольшего сближения с Солнцем, то координатное время распространения (TCB) составляет:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\mathrm{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1 + \frac{2}{c^2}U_S\right)dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1 + \frac{1}{c^2}\,\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx, \tag{35}$$

где U_S – гравитационный потенциал Солнца. Следовательно,

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\mathrm{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1 + \frac{2}{c^2}U_S\right)dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1 + \frac{1}{c^2}\,\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx, \tag{36}$$

Масштабируя это к земному времени (TT) распространения, зарегистрированному часами на поверхности геоида, получим

$$\Delta t' = (1 - L_B)\,\Delta t = \frac{1}{c}(1 - L_B)(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{a_R^{\,2} + b^2}}{-a_T + \sqrt{a_T^{\,2} + b^2}}. \tag{37}$$

8 Примеры

Из-за релятивистских эффектов часы, расположенные на высоте, будут показывать более высокую частоту, а приведенная скорость хода будет отличаться от приведенной скорости хода TAI на $-\Delta U/c^2$. Вблизи уровня моря это описывается выражением $-g(\phi)h/c^2$, где ϕ – географическая широта, $g(\phi) = (9{,}780 + 0{,}052\sin^2\varphi)$ м/с^2 – полное ускорение (гравитационное и центробежное) на уровне моря, а h – высота над уровнем моря.

Если часы перемещаются относительно поверхности Земли со скоростью V, которая может иметь компоненту V_E в восточном направлении, приведенная разность частот перемещаемых часов относительно покоящихся на уровне моря составляет

$$\Delta f = -\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{g(\phi)h}{c^2} - \frac{1}{c^2}\omega r \cos\phi \, V_E, \tag{38}$$

где r – расстояние до часов от центра Земли.

Выбор системы отсчета чисто произволен, но для определения координатного времени необходимо выбрать конкретную систему. Для наземного использования рекомендуется выбирать систему отсчета, жестко связанную с Землей. В этой системе отсчета, когда часы B синхронизируются с часами A (те и другие покоятся на поверхности Земли) по радиосигналу, передаваемому из точки A в точку B, то разность координатного времени между двумя этими часами равна

$$t_B - t_A = -\frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi d\lambda, \tag{39}$$

где ϕ – широта, λ – восточная долгота, а path – трасса, по которой радиосигнал проходит из точки A в точку B.

Если же двое часов синхронизируются посредством переносных часов, разность координатного времени между ними составит

$$t_B - t_A = \int_{path}\left[\frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right]dr - \frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi \, d\lambda, \tag{40}$$

где V – скорость хода переносных часов на поверхности Земли, а path – трасса, по которой проходят часы при перемещении из точки A в точку B.

9 Глоссарий

A_E		Площадь экваториальной проекции области, охватываемой концом вектора **r** в ходе передачи сигналов времени
BCRS	Barycentric Celestial Reference System	Барицентрическая небесная опорная система
c		скорость света, равная = 2,99792458 × 10^8 м/с
ECEF	Earth-centred, Earth-fixed	Геоцентрическая система отсчета, жестко связанная с Землей
ECI	Earth centred inertial	Геоцентрическая инерциальная система
f		Сплюснутость Земли, равная 1/298,257223563
GCRS	Geocentric celestial reference system, an ECI system of geocentric space-time coordinates	Геоцентрическая небесная опорная система, относится к системе ECI геоцентрических пространственно-временных координат
GM_E		Гравитационная постоянная Земли, равная 398 600 км^3/с^2
GTRS	Geocentric terrestrial reference system, an ECEF coordinate system	Геоцентрическая земная опорная система, относится к системе координат ECEF
J_{mn}		Коэффициенты сферических гармоник, описывающие сжатие Земли. Наиболее значимым из них является коэффициент J_2 (m = 2, n = 0), который можно определить через полярный (C) и экваториальный (A) моменты инерции Земли: $J_2 = \frac{C-A}{MR^2}$, где M – масса Земли, а R – ее

		радиус. $J_2 = +1{,}083 \times 10^{-3}$
L_B		$1 - (1 - L_G)(1 - L_C)$
L_c		$1 - \langle d\,\mathrm{TCG}/d\,\mathrm{TCB}\rangle$, где $\langle d\,\mathrm{TCG}/d\,\mathrm{TCB}\rangle$ – среднее смещение по скорости
L_G		$1 - d\,\mathrm{TT}/d\,\mathrm{TCG} \equiv 6{,}969290134 \times 10^{-10}$ (заданная константа)
r		Вектор с началом в центре Земли, конечная точка которого движется вместе с часами
r		Модуль вектора **r**
R_E		Экваториальный радиус Земли, равный 6 378 136 км
t		Координатное время – независимая переменная в уравнениях движения физических тел и распространения электромагнитных волн
TAI	International atomic time	Международное атомное время
TCB	Barycentric coordinate time	Барицентрическое координатное время
TCG	Geocentric coordinate time	Геоцентрическое координатное время
TDB	Barycentric dynamical time	Барицентрическое динамическое время
TT	Terrestrial time	Земное время
UTC	Coordinated universal time	Всемирное координированное время
U		Гравитационный потенциал
U_g		Потенциал (гравитационный и центробежный) на поверхности геоида, равный 62 636,86 км^2/с^2
v		Скорость движения часов относительно геоида
W		Гравитационный потенциал, состоящий из U и вращательного потенциала $½(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$
$s_{i\,j}$		Дельта-функция Кронекера: $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$
$\Delta U(\mathbf{r})$		Разность гравитационных потенциалов (включая центробежный потенциал) между местом расположения часов **r** и поверхностью геоида, наблюдаемая из жестко связанной с Землей системы координат, в соответствии с принятым соглашением (Резолюция A4 Генеральной ассамблеи МАС 1992 года) о том, что $\Delta U(\mathbf{r})$ отрицательна, когда часы находятся над поверхностью геоида
θ		Дополнение до широты
λ		Долгота
ϕ		Широта
ϕ_c		Геоцентрическая широта
ϕ_g		Географическая широта
τ		Собственное время, измеренное в "покоящейся системе отсчета" часов, то есть в опорной системе, перемещающейся вместе с часами
ω		Угловая скорость вращения Земли, равная $7{,}292115 \times 10^{-5}$ рад/с

Справочные документы

D. D. McCarthy and P. K. Seidelmann, *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2009)

R. A. Nelson, *Relativistic Time Transfer in the Vicinity of the Earth and in the Solar System*, Metrologia 48, S171 – S180 (2011)

G. Petit and B. Luzum (editors), IERS Conventions (2010) (International Earth Rotation and Reference Systems Service, 2010)