Union internationale des télécommunications

# UIT-R

Secteur des Radiocommunications de l'UIT

**Recommandation UIT-R TF.2118-0**

**(12/2018)**

# Transfert de temps relativiste

**Série TF**

**Émissions de fréquences étalon et de signaux horaires**

Union internationale des télécommunications

## Avant-propos

Le rôle du Secteur des radiocommunications est d'assurer l'utilisation rationnelle, équitable, efficace et économique du spectre radioélectrique par tous les services de radiocommunication, y compris les services par satellite, et de procéder à des études pour toutes les gammes de fréquences, à partir desquelles les Recommandations seront élaborées et adoptées.

Les fonctions réglementaires et politiques du Secteur des radiocommunications sont remplies par les Conférences mondiales et régionales des radiocommunications et par les Assemblées des radiocommunications assistées par les Commissions d'études.

## Politique en matière de droits de propriété intellectuelle (IPR)

La politique de l'UIT-R en matière de droits de propriété intellectuelle est décrite dans la «Politique commune de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI en matière de brevets», dont il est question dans la Résolution UIT-R 1. Les formulaires que les titulaires de brevets doivent utiliser pour soumettre les déclarations de brevet et d'octroi de licence sont accessibles à l'adresse http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/fr, où l'on trouvera également les Lignes directrices pour la mise en œuvre de la politique commune en matière de brevets de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI et la base de données en matière de brevets de l'UIT-R.

**Séries des Recommandations UIT-R**

(Également disponible en ligne: http://www.itu.int/publ/R-REC/fr)

| Séries | Titre |
|---|---|
| **BO** | Diffusion par satellite |
| **BR** | Enregistrement pour la production, l'archivage et la diffusion; films pour la télévision |
| **BS** | Service de radiodiffusion sonore |
| **BT** | Service de radiodiffusion télévisuelle |
| **F** | Service fixe |
| **M** | Services mobile, de radiorepérage et d'amateur y compris les services par satellite associés |
| **P** | Propagation des ondes radioélectriques |
| **RA** | Radio astronomie |
| **RS** | Systèmes de télédétection |
| **S** | Service fixe par satellite |
| **SA** | Applications spatiales et météorologie |
| **SF** | Partage des fréquences et coordination entre les systèmes du service fixe par satellite et du service fixe |
| **SM** | Gestion du spectre |
| **SNG** | Reportage d'actualités par satellite |
| **TF** | **Émissions de fréquences étalon et de signaux horaires** |
| **V** | Vocabulaire et sujets associés |

***Note**: Cette Recommandation UIT-R a été approuvée en anglais aux termes de la procédure détaillée dans la Résolution UIT-R 1.*

*Publication électronique*
Genève, 2019

# RECOMMANDATION UIT-R TF.2118-0

## Transfert de temps relativiste

(2018)

### Domaine d'application

La présente Recommandation vise à établir des algorithmes et des procédures conventionnels communs destinés à être utilisés pour la comparaison des horloges situées à la surface de la Terre et sur des plates-formes éloignées de la Terre, mais à l'intérieur du système solaire. Ces expressions sont déterminées de manière explicite dans la théorie de la relativité générale, qui est actuellement acceptée comme base des systèmes de référence espace-temps. Il est prévu d'utiliser ces algorithmes et procédures pour comparer les horloges à bord des satellites de la Terre ou d'engins spatiaux interplanétaires et situées à la surface de corps du système solaire.

### Mots clés

Relativité, transfert de temps, propagation du signal, horloge, système de coordonnées

### Recommandations et Rapports connexes

Recommandations UIT-R TF.1011-1, UIT-R TF.767-2, UIT-R TF.374-5

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

*considérant*

*a)* qu'il est souhaitable de maintenir la coordination des signaux horaires et des fréquences étalon sur les plates-formes exploitées au voisinage de la Terre et dans le système solaire;

*b)* que l'on a besoin de moyens précis pour les transferts de signaux horaires et de fréquence afin de répondre aux besoins futurs dans les domaines de la communication, de la navigation et de la science, au voisinage de la Terre comme dans le système solaire;

*c)* que les horloges subissent des variations de temps et de fréquence en fonction du trajet, en raison de leur mouvement et des forces gravitationnelles qu'elles sont susceptibles de subir dans l'environnement où elles sont exploitées;

*d)* que les fondements théoriques du transfert des signaux horaires et de fréquence devraient être clairement définis;

*e)* que les procédures de transfert de signaux horaires et de fréquence au voisinage de la Terre et entre corps célestes et engins spatiaux dans le système solaire nécessitent l'utilisation d'algorithmes mathématiques qui tiennent compte des effets de la relativité;

*f)* que les exigences de précision et d'exactitude pour le transfert des signaux horaires et de fréquence au voisinage de la Terre et dans le système solaire dépendent de l'application,

*recommande*

d'utiliser les algorithmes mathématiques qui permettent de tenir compte des effets de la relativité pour les transferts de signaux horaires et de fréquence au sens de l'Annexe 1, selon qu'il conviendra.

# Annexe I

TABLE DES MATIÈRES

*Page*

## 1 Objectif

La présente Annexe I a pour objectif de présenter les notions et procédures fondamentales à appliquer pour tenir compte des effets de la relativité sur les systèmes de référence horaire, de navigation et de communication. Elle peut servir de référence pratique pour certaines applications particulières, notamment pour comparer les temps donnés par des horloges à bord d'engins spatiaux en orbite autour de la Terre, dans l'espace interplanétaire et à la surface des planètes avec les temps enregistrés par des horloges situées sur Terre. L'examen ci-dessous est fondé sur les Conventions de l'IERS (2010), sur le Manuel de l'UIT-R sur le transfert et la diffusion par satellite de signaux horaires et de fréquence (2010) et sur les publications de Nelson, Métrologie (2011) et de Petit et Wolf, Métrologie (2005). Les utilisateurs trouveront de plus amples détails dans ces publications et dans les références qui y sont citées.

## 2 Cadre relativiste

Un système de référence est une construction mathématique permettant de définir des événements dans l'espace-temps au regard de quatre coordonnées $x^\alpha = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Les exposants en lettres grecques prennent les valeurs 0, 1, 2, 3 et les exposants en lettres latines les valeurs 1, 2, 3. La répétition d'un exposant indique une somme de celui-ci. L'exposant 0 désigne la variable de temps, tandis que les exposants 1, 2 et 3 font référence aux trois coordonnées spatiales. Un référentiel est une réalisation du système de référence, qui prend généralement la forme d'un catalogue de positions et de mouvements d'objets ou d'une éphéméride.

Tout système de référence est spécifié par son tenseur métrique, $g_{\alpha\beta}(t, x^i)$, qui permet de calculer la distance dans l'espace-temps entre deux événements $x^\alpha$ et $x^\alpha+dx^\alpha$:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\left(t, x^i\right) dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{00}\mathrm{c}^2 dt^2 + 2g_{0i}\mathrm{c}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1}$$

où $c$ est la vitesse de la lumière.

Certaines organisations scientifiques internationales ont donné une définition spécifique du système de référence en adoptant des résolutions à cet effet. Les plus importantes de ces résolutions sont les suivantes:

1) La Résolution A4 de l'UAI (1991), qui définit le système de référence céleste barycentrique (BCRS) et le système de référence céleste géocentrique (GCRS) ainsi que leurs coordonnées de temps. La Résolution B1 de l'UAI (2000) précise encore davantage la définition du BCRS.

2) La Résolution 2 de l'UGGI (2007), qui définit le système de référence terrestre géocentrique (GTRS) ainsi que le système de référence terrestre international (ITRS).

En bref, le BCRS est un système de coordonnées dans l'espace-temps destiné au système solaire; il est centré sur le barycentre du système solaire et spécifié par le tenseur métrique défini en 2000 par l'UAI dans sa Résolution B1.3 (voir https://www.iau.org/administration/resolutions/general_assemblies/). Le GCRS est un système inertiel de coordonnées géocentriques dans l'espace-temps centré sur la Terre; son tenseur métrique a également été défini en 2000 par l'UAI dans la Résolution B1.3. Il est défini de telle sorte que la transformation de coordonnées spatiales entre les systèmes BCRS et GCRS ne contienne pas de composante de rotation, afin que le système GCRS ne présente pas de rotation cinématique par rapport au système BCRS. Le système de référence terrestre géocentrique (GTRS) est un système de coordonnées centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre.

Dans le cadre de la relativité générale, le temps propre ($\tau$) est la lecture réelle d'une horloge ou l'heure locale indiquée dans le référentiel de l'horloge. Le temps-coordonnée ($t$) est la variable indépendante dans les équations de mouvement de corps physiques et de propagation d'ondes électromagnétiques. Il s'agit d'une coordonnée mathématique dans l'espace-temps à quatre dimensions du système de coordonnées. Pour un événement donné, le temps-coordonnée a la même valeur partout. Les temps-coordonnées ne sont pas mesurés, mais calculés à partir des temps propres des horloges. La relation entre le temps-coordonnée et le temps propre dépend de la position de l'horloge et de l'état du mouvement dans son environnement gravitationnel; elle est calculée par intégration de l'intervalle espace-temps. Lors de la comparaison des temps propres de deux horloges, le temps-coordonnée est finalement supprimé. En conséquence, le transfert de temps relativiste entre horloges est indépendant du système de coordonnées. Le système de coordonnées peut être choisi de manière arbitraire en fonction de considérations d'ordre pratique.

Pour une horloge embarquée, l'intervalle espace-temps est le suivant:

$$ds^2 = g_{00}\,\mathrm{c}^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,\mathrm{c}\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -\mathrm{c}^2 d\tau^2 \tag{2}$$

En conséquence, $dt = d\tau$ pour une horloge au repos est un référentiel inertiel pour lequel $dx^i = 0$ et $-g_{00} = 1$, $g_{0j} = 0$, et $g_{ij} = \delta_{ij}$. Le temps-coordonnée écoulé, qui correspond au temps propre mesuré pendant le transport d'une horloge entre des points $A$ et $B$, est le suivant:

$$\Delta t = \pm \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\,d\tau \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\,\frac{dx^j}{d\tau}\,d\tau\,. \tag{3}$$

Pour un signal électromagnétique, l'intervalle espace-temps est le suivant:

$$ds^2 = g_{00}\,\mathrm{c}^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,\mathrm{c}\;dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = 0 \tag{4}$$

La vitesse de la lumière est $c$ dans chaque référentiel inertiel. Le temps-coordonnée écoulé de la propagation le long d'un trajet entre des points $A$ et $B$ est le suivant:

$$\Delta t = \pm \frac{1}{c}\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)dx^i\,dx^j} \;+\; \frac{1}{c}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\,dx^j \tag{5}$$

## 3 Échelles de temps

*Échelles de temps-coordonnée*

Le temps-coordonnée géocentrique (TCG) est le temps-coordonnée d'un système de coordonnées ayant pour origine le centre de la Terre.

Le temps terrestre (TT) est un autre temps-coordonnée qui est recalculé à partir du temps TCG, de façon à avoir approximativement le même rythme que le temps propre d'une horloge au repos sur le géoïde. La relation entre le TCG et le TT est définie de telle sorte que $d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$, où $L_G$ est une constante de définition $\equiv 6{,}969\,290\,134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ µs/d. En conséquence:

$$\mathrm{TT} = (1 - L_G)\ \mathrm{TCG} \tag{6}$$

ou

$$\mathrm{TCG} - \mathrm{TT} = L_G\ \mathrm{TCG} = \frac{L_G}{1 - L_G}\ \mathrm{TT} \tag{7}$$

Le temps-coordonnée barycentrique (TCB) est le temps-coordonnée d'un système de coordonnées ayant pour origine le barycentre du système solaire. La différence entre le TCB et le TCG prend la forme suivante:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} = L_C\ \mathrm{TCB} + P(t) + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t) \tag{8}$$

où $L_c$ = 1-⟨$d$TCG/$d$TCB⟩, ⟨$d$TCG/$d$TCB⟩ étant un décalage moyen du rythme, $P(t)$ représente un ensemble de termes périodiques, $\mathbf{v}_E(t)$ est la vitesse barycentrique du centre de masse de la Terre et $\mathbf{R}(t)$ est le vecteur position dépendant du temps par rapport au centre de la Terre.

La transformation nette du TCB en TT présente un décalage moyen du rythme:

$$\langle d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCB}\rangle = (d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG})\langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \equiv 1 - L_B \tag{9}$$

où $L_G \equiv 6{,}969\ 290\ 134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ µs/d, $L_C = 1{,}480\ 826\ 867\ 41 \times 10^{-8} \approx 1{,}28$ ms/d, et $L_B = 1{,}550\ 519\ 767\ 72 \times 10^{-8} \approx 1{,}34$ ms/d. La différence entre le TCB et le TT est la suivante:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} = L_B\,\mathrm{TCB} + (1 - L_G)\left[P(t) + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\mathbf{v}_E(t)\cdot\mathbf{R}(t)\right] \tag{10}$$

L'époque du TT, du TCG et du TCB est le 1er janvier 1977 0 h 32,184 s TAI (JD 2 443 144,5003725).

Le temps dynamique barycentrique (TDB) est une échelle de temps recalculée à partir du TCB. Il est défini par l'expression TDB ≡ (1 – $L_B$) TCB + $\mathrm{TDB}_0$, avec les constantes de définition $L_B \equiv 1{,}550\ 519\ 768 \times 10^{-8}$ et $\mathrm{TDB}_0 \equiv -65{,}5$ µs. Le TDB a le même rythme que le TT.

*Échelles de temps atomique*

L'échelle de temps fondamentale basée sur des horloges atomiques est le Temps atomique international (TAI), qui est calculé par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) à partir d'une moyenne pondérée des lectures d'horloges atomiques fonctionnant dans des laboratoires d'études du temps répartis dans le monde entier. Le calcul du TAI s'effectue en deux étapes: 1) on calcule l'échelle atomique libre (EAL) en s'appuyant sur des données de comparaison d'horloges; et 2) on corrige les fréquences de l'EAL selon les lectures d'étalons primaires de fréquence situés dans un petit nombre de laboratoires, en appliquant une réduction par des corrections relativistes du géoïde défini par convention. Le TAI est une échelle de temps de référence continue qui n'est pas diffusée. Bien que le TT soit une échelle de temps uniforme théorique et que le TAI soit déduit de manière statistique, on considère dans la pratique que TT = TAI + 32,184 s.

L'échelle de temps atomique employée pour déterminer l'heure civile est le Temps universel coordonné (UTC), qui diffère du TAI d'un nombre entier de secondes intercalaires. Le temps UTC est diffusé chaque mois dans la *Circulaire T* du BIPM sous forme de différences entre les réalisations des différents laboratoires UTC($k$), où $k$ est la désignation du laboratoire concerné.

## 4 Comparaison d'horloges

*Système de coordonnées inertiel centré sur la Terre*

Le temps-coordonnée associé à un système (par exemple le GCRS) de coordonnées inertiel centré sur la Terre (ECI) est le temps-coordonnée géocentrique (TCG). À l'aide de termes d'ordre $1/c^2$, on calcule les composantes du tenseur métrique dans ce système de coordonnées de la manière suivante: $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$ et $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$, où $U$ est le potentiel gravitationnel.

Le TCG écoulé dans le système de coordonnées ECI correspondant au temps propre écoulé pendant le transport d'une horloge entre des points $A$ et $B$ à la vitesse $v$ est donné par la formule suivante:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{\mathrm{c}^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{c}^2}v^2\right) d\tau\ . \tag{11}$$

où $U$ est le potentiel gravitationnel de la Terre à l'emplacement de l'horloge sans tenir compte du potentiel centrifuge, et $v$ la vitesse de l'horloge par rapport au géoïde. $U$ à la distance radiale $r$, à la latitude géocentrique $\phi$ et à la longitude $\lambda$ peut s'exprimer sous la forme d'une expansion en harmoniques sphériques de la façon suivante:

$$\begin{aligned} U(r,\phi,\lambda) &= \frac{GM_E}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right] \\ &= \frac{GM_E}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\phi)-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\sin m\lambda)\right], \end{aligned} \qquad (12)$$

où $GM_E$ est la constante gravitationnelle de la Terre et $R_E$ est le rayon de la Terre au niveau de l'équateur. Les facteurs $P_n(\sin\phi)$ sont des polynômes de Legendre de degré $n$ et les facteurs $P_{nm}(\sin\phi)$ sont des fonctions de Legendre associées de degré $n$ et d'ordre $m$. Il existe une relation entre la latitude géocentrique $\phi_c$ et la latitude géographique $\phi_g$, telle que $\tan\phi_c = (1-f^2)\tan\phi_g$, où $f$ est l'aplatissement.

*Horloge au repos sur le géoïde*

Dans le cas d'une horloge au repos à la surface de la Terre en rotation, il est nécessaire de tenir compte de la vitesse de l'horloge $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ dans le système de coordonnées ECI, où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de la Terre et $\mathbf{r}$ la position de l'horloge. En conséquence, le TCG écoulé en tant que temps propre indiqué par l'horloge $\Delta\tau$ est:

$$\Delta t = \int_A^B\left(1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}U+\frac{1}{2\mathrm{c}^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\right)d\tau = \int_A^B\left(1+\frac{1}{\mathrm{c}^2}W_0\right)d\tau\ , \qquad (13)$$

où $W_0$ est le potentiel gravitationnel constitué par la somme du potentiel gravitationnel $U$ et du potentiel rotationnel ½$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$. Étant donné que le potentiel gravitationnel $W_0$ à la surface du géoïde est constant, on peut l'évaluer à l'équateur et en obtenir une approximation à l'aide de la formule suivante:

$$W_0 \approx \frac{GM_E}{R_E}\left(1+\frac{1}{2}J_2\right)+\frac{1}{2}\omega^2 R_E{}^2 \qquad (14)$$

*Transfert de temps*

Lorsqu'on transfère le temps d'un point $P$ à un point $Q$ au moyen d'une horloge, le temps-coordonnée écoulé pendant le déplacement de l'horloge est:

$$\Delta t = \int_P^Q\left[1 + \frac{U(\mathbf{r}) - \mathrm{U_g}}{\mathrm{c}^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})^2}{2\mathrm{c}^2}\right]d\tau, \qquad (15)$$

où $U(\mathbf{r})$ est le potentiel gravitationnel à l'emplacement de l'horloge sans tenir compte du potentiel centrifuge, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est la vitesse de l'horloge vue dans le référentiel géocentrique sans rotation et $\mathrm{U_g}$ est le potentiel au géoïde.

*Horloge embarquée à bord d'un satellite*

Dans le cas d'une horloge embarquée à bord d'un satellite en orbite autour de la Terre, on peut considérer que l'orbite est káplérienne (non perturbée) en première approximation. Le potentiel à la distance $r$ par rapport au centre de la Terre est $U = GM_E/r$, et le temps-coordonnée (TCG) écoulé pendant que l'horloge enregistre le temps propre $\Delta\tau$ est approximativement le suivant:

$$\Delta t = \int_A^B\left(1-\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{GM_E}{2a}+\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{2GM_E}{r}\right)d\tau \approx \left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{GM_E}{a}\right)\Delta\tau+\frac{2}{\mathrm{c}^2}\sqrt{GM_E\,a}\,e\sin E \qquad (16)$$

où $E$ est l'anomalie d'excentricité déterminée à partir de l'anomalie moyenne par l'équation de Kepler, $M \equiv n\Delta t = E - e \sin E$, n étant le déplacement moyen donné par $n \equiv 2\pi / T = \sqrt{\mathrm{GM}_E / a^3}$ , $T$ étant la période orbitale et $a$ étant le demi-grand axe de l'orbite.

Pour comparer le temps propre d'une horloge à bord d'un satellite en orbite autour de la Terre avec le temps propre d'une horloge au repos sur le géoïde, il est nécessaire de convertir le temps-coordonnée en TT. En conséquence, l'intervalle de temps propre enregistré par une horloge au repos sur le géoïde correspondant à l'intervalle de temps propre enregistré par une horloge à bord du satellite peut être donné par la formule suivante:

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM_E}{a} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{GM_E}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2\mathrm{c}^2}\omega^2 R_E{}^2\right]\Delta\tau + \frac{2}{\mathrm{c}^2}\sqrt{GM_E\, a}\; e \sin E \qquad (17)$$

où $J_2$ est le coefficient d'aplatissement de la Terre du second degré. Le second terme est une correction qui tient compte de la variation de vitesse et de potentiel due à l'excentricité de l'orbite.

À un niveau de précision inférieur à la nanoseconde, il est nécessaire de tenir compte des perturbations orbitales dues aux harmoniques du potentiel gravitationnel de la Terre, des effets de marée de la Lune et du Soleil et de la pression exercée par le rayonnement solaire. À ce niveau de précision, la perturbation $J_2$ entraîne des variations de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ qui produisent elles-mêmes d'autres effets périodiques de l'ordre de 0,1 ns. Pour tenir pleinement compte de la perturbation $J_2$, il est donc nécessaire de calculer l'intégrale numérique de l'orbite et l'intégrale numérique de l'équation (16). Il faut aussi tenir compte des effets de marée de la Lune et du Soleil et de la pression des rayonnements solaires.

Dans le cas d'orbites terrestres basses, les harmoniques gravitationnels zonaux et tesséraux sont importants. La correction habituelle de l'excentricité donnée par la formule (16) n'est plus exacte. Il est alors préférable de calculer l'intégrale numérique de l'orbite et de l'équation (16) en tenant compte des harmoniques d'ordre supérieur du potentiel gravitationnel de la Terre.

## 5 Système de coordonnées centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre

Pour les termes d'ordre $1 / c^2$, les composantes métriques sont $-g_{00} = 1 - 2\,U/\mathrm{c}^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/\mathrm{c}^2 = 1 - 2W_0/\mathrm{c}^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/\mathrm{c}$, et $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dans le système de coordonnées centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre (ECEF), le temps-coordonnée est égal au temps terrestre (TT) et le temps-coordonnée écoulé qui s'est accumulé pendant le transport de l'horloge est le suivant:

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 - \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{\mathrm{c}^2} + \frac{1}{2\mathrm{c}^2}v^2\right] d\tau + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}\, d\tau\,, \qquad (18)$$

où $\Delta U(\mathbf{r})$ est la différence de potentiel gravitationnel (y compris le potentiel centrifuge) entre l'emplacement $\mathbf{r}$ de l'horloge et le géoïde vu à partir d'un système de coordonnées fixe par rapport à la Terre. On applique la convention (Résolution A4, UAI, 1992) selon laquelle $\Delta U(\mathbf{r})$ est négatif lorsque l'horloge est au-dessus du géoïde. Lorsque la hauteur $h$ de l'horloge est inférieure à 24 km au-dessus du géoïde, on peut approcher la valeur de $\Delta U(\mathbf{r})$ par le produit $gh$, où $g$ est l'accélération totale due à la pesanteur (y compris l'accélération rotationnelle de la Terre) évaluée sur le géoïde. Cette approximation s'applique à tous les transferts aérodynamiques et les transferts en direction de la Terre. Lorsque la hauteur $h$ est supérieure à 24 km, la différence de potentiel $\Delta U(\mathbf{r})$ doit être calculée avec une plus grande précision, comme suit:

$$\Delta U(\mathbf{r}) = \frac{GM_E}{r} + J_2 GM_E a_1^2\left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{2r^3}\right) + \omega^2 r^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - \mathrm{U_g}. \qquad (19)$$

Pour un transfert de temps avec une précision de l'ordre de la nanoseconde, cette équation n'est pas valable pour une distance supérieure à 50 000 km à partir du centre de la Terre.

La seconde intégrale de l'équation (18) est l'effet Sagnac pour une horloge embarquée, qui peut s'exprimer au moyen de la formule suivante:

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \frac{\omega \mathrm{R}^2}{\mathrm{c}^2} \int_A^B \cos^2 \phi \, d\lambda \; = \frac{2\,\omega\, A_E}{\mathrm{c}^2}, \tag{20}$$

où R est le rayon de la Terre, $\phi$ est la latitude, $\lambda$ est la longitude, et $A_E$ est la projection sur le plan de l'équateur de l'aire balayée par le vecteur position par rapport au centre de la Terre (positive dans la direction est et négative dans la direction ouest). La correction est positive pour une horloge se déplaçant vers l'est et négative pour une horloge se déplaçant vers l'ouest.

*Transfert de temps*

Lorsqu'on transfère le temps d'un point *A* à un point *B* au moyen d'une horloge autonome, le temps-coordonnée qui s'est accumulé pendant le transport est exprimé par l'équation suivante:

$$\Delta t = \int_A^B \left[1 + \frac{\Delta U(\mathbf{r})}{\mathrm{c}^2} + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2\mathrm{c}^2}\right] d\tau + \frac{2\omega}{\mathrm{c}^2} A_E \tag{21}$$

où la zone $A_E$ est mesurée dans un système de coordonnées fixe par rapport à la Terre. Lorsque cette zone est balayée, elle est considérée comme positive si la projection du trajet de l'horloge se déplace vers l'est sur le plan équatorial. Pour un transfert de temps avec une précision de l'ordre de la nanoseconde, cette équation n'est pas valable pour une distance supérieure à 50 000 km à partir du centre de la Terre. Au-delà de cette distance, le transfert de temps doit être calculé dans le système de coordonnées barycentrique.

## 6 Système de coordonnées barycentrique

L'intervalle de temps-coordonnée barycentrique (TCB) correspondant à un intervalle de temps propre est le suivant:

$$\mathrm{TCB} \;=\; \int_{\tau_0}^{\tau} \left[1 + \frac{1}{\mathrm{c}^2} U_E(\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{c}^2} |\dot{\mathbf{R}}|^2\right] d\tau \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left[U_{\text{ext}}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2} v_E^2\right] d\tau \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}^2}\, \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R}\Big|_{\tau_0}^{\tau}, \tag{22}$$

où **R** est la position géocentrique de l'horloge, $\mathbf{r}_E$ est la position barycentrique du centre de masse de la Terre, $U_E(\mathbf{R})$ est le potentiel newtonien de la Terre, $U_{ext}(\mathbf{R})$ est le potentiel newtonien extérieur de tous les corps du système solaire sauf la Terre, évalué à l'horloge, et $\mathbf{v}_E$ est la vitesse barycentrique du centre de masse de la Terre. L'équation (22) s'applique à une horloge située n'importe où au voisinage de la Terre, qu'elle soit embarquée dans un satellite ou située à la surface de la Terre. Pour une horloge au repos sur le géoïde, le premier terme est le TCG. Dès lors, pour un ordre de $1/\mathrm{c}^2$, la différence de temps-coordonnée entre le TCB et le TCG est la suivante:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} \;=\; \frac{1}{\mathrm{c}^2} \int_{t_0}^{t} \left[U_{\text{ext}}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2} v_E^2\right] dt \;+\; \frac{1}{\mathrm{c}^2}\, \mathbf{v}_E(t) \cdot \mathbf{R}(t). \tag{23}$$

Pour transférer du temps entre un corps du système solaire et la Terre, il faut effectuer deux transformations. La première est du TT au TCB et la seconde du TCB au temps à la surface du corps du système solaire $T_{SSB}$. Comme le TCB se retrouve dans les deux transformations, il s'annule dans le calcul de la différence $T_{SSB}$–TT. La transformation du TCB au TT est la suivante:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} \approx (L_C + L_G)\,\mathrm{TCB} + P + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R} \quad (24)$$

De même, la transformation du temps-coordonnée barycentrique (TCB) au $T_{SSB}$ est donnée par la formule suivante:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{T}_{SSB} \approx (L_{CSSB} + L_{SSB})\,\mathrm{TCB} + P + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathbf{v}_{SSB} \cdot \mathbf{R}. \quad (25)$$

Dans le cas de la planète Mars, $L_{CSSB} = L_{CM} = 0{,}972 \times 10^{-8} \approx 0{,}84$ ms/d, $L_{SSB} = L_M \equiv W_{0M}/c^2 = 1{,}403 \times 10^{-10} \approx 12{,}1$ µs/d, $W_{0M}$ étant le potentiel gravitationnel sur Mars.

## 7 Propagation d'un signal électromagnétique

*Système de coordonnées inertiel centré sur la Terre*

Pour un signal électromagnétique se propageant dans un système de coordonnées ECI, le temps-coordonnée de la propagation (TCG) est le suivant:

$$\Delta t \approx \frac{1}{\mathrm{c}} \int_{\mathrm{path}} \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j}\ . \quad (26)$$

Dans une première approximation, le potentiel gravitationnel peut être négligé. La mesure est alors $-g_{00} \approx 1$, $g_{0j} = 0$ et $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, et le temps-coordonnée (TT) est $(1 - L_G)\,\Delta t$. Le membre droit de l'équation (26) est simplement ρ/c, où ρ est la longueur euclidienne du trajet dans le système ECI.

Si le signal est émis au temps-coordonnée $t_T$ et reçu au temps-coordonnée $t_R$, le TCG de la propagation sur le trajet est:

$$\Delta t = \frac{\rho}{\mathrm{c}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\,\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\,| \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\,\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R\,(t_R - t_T)\,| \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R, \quad (27)$$

où l'émetteur occupe la position $\mathbf{r}_T$ et le récepteur la position $\mathbf{r}_R$, la vitesse est $\mathbf{v}_\mathrm{R}$, et $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$ est la différence entre la position du récepteur et de l'émetteur au temps-coordonnée de l'émission $t_T$. La correction apportée au temps-coordonnée en raison de la vitesse du récepteur est:

$$\Delta t_{\mathrm{vel}} \approx \Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R \,/\, c^2 \quad (28)$$

Pour tenir compte des effets du potentiel gravitationnel sur un signal électromagnétique, il faut intégrer le potentiel aussi bien dans les parties spatiale que temporelle de la mesure. Le retard gravitationnel est le suivant:

$$\Delta t_{\mathrm{delay}} = \frac{2\,GM_E}{\mathrm{c}^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right), \quad (29)$$

où $R$ et $r$ représentent la distance radiale géocentrique respectivement de l'émetteur et du récepteur. Le temps-coordonnée de propagation (TT) équivalent à l'intervalle de temps propre enregistré par une horloge au repos sur le géoïde est le suivant:

$$(1 - L_G)\,\Delta t = \frac{\rho}{\mathrm{c}} - L_G\,\frac{\rho}{\mathrm{c}} + \frac{2\,GM_E}{\mathrm{c}^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right). \quad (30)$$

*Système de coordonnées centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre (ECEF)*

Pour un signal électromagnétique se propageant dans un système de coordonnées ECEF, le temps-coordonnée de propagation (TCG) est le suivant:

$$\Delta t \;=\; \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{\,g_{i\,j}\; dx^i dx^j\,} \;+\; \frac{1}{c}\int_{\text{path}} g_{0\,j}\; dx^i \tag{31}$$

Les composantes métriques sont $-g_{00} = 1 - 2U/\mathrm{c}^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/\mathrm{c}$, et $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, où $\mathbf{r}$ est la position d'un point sur le trajet du signal. Le temps-coordonnée (TT) est $(1 - L_G)\,\Delta t$. Le temps-coordonnée écoulé entre l'émission et la réception d'un signal électromagnétique est alors:

$$\Delta t = \frac{1}{\mathrm{c}}\int_{\text{path}} \left[1+\frac{\Delta U(\mathbf{r})}{\mathrm{c}^2}\right] dr + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\int_{\text{path}} (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{32}$$

où $dr$ est l'accroissement de la longueur étalon ou de la longueur propre le long du trajet d'émission, et $\Delta U(\mathbf{r})$ est le potentiel au point $\mathbf{r}$ sur le trajet d'émission moins le potentiel sur le géoïde (voir l'équation (19)), tel que vu depuis un système de coordonnées fixe par rapport à la Terre.

Si l'on ne tient pas compte de $\Delta U(\mathbf{r})$, le premier terme de l'équation (32) est $\rho'/c$, où $\rho'$ est la longueur euclidienne du trajet dans le système de coordonnées ECEF. Si l'émetteur occupe la position $\mathbf{r}_T$, le récepteur occupe la position $\mathbf{r}_R$ et la vitesse est $\mathbf{v}'_R$, alors:

$$\frac{\rho'}{\mathrm{c}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\,\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\,| \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\,\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R\;(t_R - t_T)\,| \approx \frac{1}{\mathrm{c}}\,|\Delta\mathbf{r}| + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}'_R. \tag{33}$$

où $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$.

Le second terme de l'équation (32) est l'effet Sagnac:

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{2\,\omega\, A_E}{\mathrm{c}^2}\;, \tag{34}$$

où $A_E$ est la projection sur le plan de l'équateur de l'aire formée par le centre de rotation et les points d'extrémité du trajet du signal. Cette aire est positive quand une composante du trajet du signal se déplace vers l'est.

*Système de coordonnées barycentrique*

Lorsqu'un signal électromagnétique est envoyé dans un système de coordonnées barycentrique utilisant des coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ depuis un émetteur situé au point $(-a_T, b, 0)$ vers un récepteur situé au point $(a_R, b, 0)$ le long du trajet approximativement droit $y = b$ (sans tenir compte des déviations dues à la gravitation), où $b$ est la distance au point le plus proche du Soleil, le temps-coordonnée de propagation (TCB) est le suivant:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\, dx^i dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{2}{c^2}\,U_S\right) dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{1}{c^2}\,\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) dx \tag{35}$$

où $U_S$ est le potentiel gravitationnel du soleil. En conséquence,

$$\Delta t = \frac{1}{c}(a_T + a_R) + 2\,\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{a_R^{\,2} + b^2}}{-a_T + \sqrt{a_T^{\,2} + b^2}} \tag{36}$$

Rapporté au temps terrestre (TT) de propagation enregistré par une horloge sur le géoïde,

$$\Delta t' = (1-L_B)\;\Delta t = \frac{1}{\mathrm{c}}(1-L_B)(a_T + a_R) + 2\,\frac{GM_S}{\mathrm{c}^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{a_R^{\,2} + b^2}}{-a_T + \sqrt{a_T^{\,2} + b^2}}. \tag{37}$$

## 8 Exemples

En raison des effets de la relativité, une horloge située en altitude semblera avoir une fréquence plus grande et différera du Temps atomique international (TAI), pour un rythme normalisé, d'une grandeur égale à $-\Delta U/c^2$. Près du niveau de la mer, cette relation est donnée par $-g(\phi)h/c^2$, où $\phi$ est la latitude géographique, $g(\phi)$ est l'accélération totale au niveau de la mer (gravitationnelle et centrifuge), qui est égale à $(9{,}780 + 0{,}052 \sin^2 \varphi)$ m/s$^2$, et $h$ est la distance au-dessus du niveau de la mer.

Si une horloge se déplace par rapport à la surface de la Terre à une vitesse $V$ qui peut avoir une composante $V_E$ en direction de l'est, la différence normalisée de fréquence de l'horloge mobile par rapport à la fréquence d'une horloge au repos au niveau de la mer est la suivante:

$$\Delta f = -\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{g(\phi)h}{c^2} - \frac{1}{c^2}\omega r \cos\phi\, V_E, \qquad (38)$$

où $r$ est la distance de l'horloge au centre de la Terre.

Le choix d'un référentiel de coordonnées est purement arbitraire mais il faut faire un choix précis pour définir un temps-coordonnée. Pour les usagers sur Terre, il est recommandé d'utiliser un référentiel fixe par rapport à la Terre dans lequel, lorsqu'une horloge $B$ est synchronisée avec une horloge $A$ (les deux horloges étant stationnaires sur Terre) par un signal radioélectrique allant de $A$ à $B$, ces deux horloges diffèrent, en temps-coordonnée, de:

$$t_B - t_A = -\frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi d\lambda, \qquad (39)$$

où $\phi$ est la latitude, $\lambda$ est la longitude est et *path* désigne le trajet le long duquel le signal radioélectrique se déplace de $A$ vers $B$.

Si les deux horloges sont synchronisées par une horloge autonome, leur temps-coordonnée différera de:

$$t_B - t_A = \int_{path}\left[\frac{\Delta U(\mathbf{r})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2}\right]dr - \frac{\omega}{c^2}\int_{path} r^2 \cos^2\phi\, d\lambda, \qquad (40)$$

où $V$ est la vitesse au sol de l'horloge autonome et *path* désigne le trajet le long duquel l'horloge se déplace de $A$ vers $B$.

## 9 Glossaire

| | |
|---|---|
| $A_E$ | projection équatoriale de la zone balayée au cours du transfert de temps par le vecteur **r** lorsque l'extrémité de celui-ci se déplace |
| BCRS | système de référence céleste barycentrique |
| c | vitesse de la lumière = 2,997 924 58 × $10^8$ m/s |
| ECEF | centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre |
| ECI | inertiel centré sur la Terre |
| $f$ | aplatissement de la Terre = 1/298,257 223 563 |
| GCRS | système de référence céleste géocentrique, un système ECI de coordonnées de l'espace-temps centré sur la Terre |
| $GM_E$ | constante gravitationnelle de la Terre = 398 600 km$^3$/s$^2$ |
| GTRS | système de référence terrestre géocentrique, un système de coordonnées ECEF |

| | |
|---|---|
| $J_{mn}$: | coefficients d'harmoniques sphériques décrivant l'aplatissement de la Terre. $J_2$ (m = 2, n = 0) est le coefficient le plus significatif; il peut être défini en termes de moments d'inertie de la Terre au pôle (*C*) et à l'équateur (*A*): $J_2 = \frac{C - A}{MR^2}$, où M et R sont respectivement la masse et le rayon de la Terre. $J_2 = +1{,}083 \times 10^{-3}$ |
| $L_B$ | $1 - (1 - L_G)(1 - L_C)$ |
| $L_c$ | $1 - \langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle$, $\langle d\mathrm{TCG}/d\mathrm{TCB}\rangle$ étant un décalage moyen du rythme |
| $L_G$ | $1 - d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG}$, une constante définie $\equiv 6{,}969\ 290\ 134 \times 10^{-10}$ |
| $\mathbf{r}$ | vecteur dont l'origine est au centre de la Terre et l'extrémité se déplace avec l'horloge |
| $r$ | amplitude du vecteur $\mathbf{r}$ |
| $\mathrm{R_E}$ | rayon de la Terre à l'équateur = 6 378,136 km |
| t | temps-coordonnée: variable indépendante dans les équations décrivant le mouvement de corps physiques et la propagation d'ondes électromagnétiques |
| TAI | Temps atomique international |
| TCB | temps-coordonnée barycentrique |
| TCG | temps-coordonnée géocentrique |
| TDB | temps dynamique barycentrique |
| TT | temps terrestre |
| UTC | Temps universel coordonné |
| $U$ | potentiel gravitationnel |
| $\mathrm{U_g}$ | potentiel (gravitationnel et centrifuge) sur le géoïde = 62 636,86 km$^2$/s$^2$. |
| $v$ | vitesse de l'horloge par rapport au sol |
| $W$ | potentiel gravitationnel constitué par la somme du potentiel gravitationnel $U$ et du potentiel rotationnel $½(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$ |
| $\mathrm{s}_{i\,j}$ | fonction delta de Kronecker: $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ |
| $\Delta U(\mathbf{r})$: | différence de potentiel gravitationnel (y compris le potentiel centrifuge) entre l'emplacement de l'horloge sur $\mathbf{r}$ et le géoïde vu à partir d'un système de coordonnées fixe par rapport à la Terre, compte tenu de la convention (Résolution A4, UAI, 1992) selon laquelle $\Delta U(\mathbf{r})$ est négatif lorsque l'horloge est au-dessus du géoïde |
| $\theta$ | colatitude |
| $\lambda$ | longitude |
| $\phi$ | latitude |
| $\phi_c$ | latitude géocentrique $\phi_c$ |
| $\phi_g$ | latitude géographique $\phi_g$ |
| $\tau$ | temps propre mesuré dans le «référentiel de repos» de l'horloge, c'est-à-dire dans le référentiel qui se déplace avec l'horloge |
| $\omega$ | vitesse angulaire de rotation de la Terre = $7{,}292\ 115 \times 10^{-5}$ rad/s |

## Références

McCARTHY, D.D. et SEIDELMANN, P. K. [2009] Time: From Earth Rotation to Atomic Physics (Wiley-VCH, Weinheim).

NELSON, R.A. [2011] Relativistic Time Transfer in the Vicinity of the Earth and in the Solar System. *Metrologia* 48, S171 – S180.

PETIT, G. et LUZUM, B. (éditeurs) [2010] Conventions de l'IERS (2010) (Service international de la rotation terrestre et des systèmes de référence).