RECOMENDACIÓN UIT-R TF.1010-1*

Efectos relativistas en un sistema con coordenada de tiempo en las proximidades de la Tierra

(Cuestión UIT-R 152/7)

(1994-1997)

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

a) que es conveniente mantener la coordinación de las transmisiones de frecuencias patrón y señales horarias en las proximidades de la Tierra;

b) que el Tiempo Universal Coordinado (UTC) es la escala de tiempo oficial para la Tierra, definida sobre el geoide en rotación;

c) que los relojes atómicos están sometidos a desplazamientos de frecuencias debidos a movimientos de segundo orden dependientes del trayecto y a efectos gravitacionales dependientes de la posición;

d) que el Comité Consultivo para el Tiempo y la Frecuencia (CCTF, antiguo CCDS) ha reconocido la necesidad de establecer procedimientos bien definidos que tengan en cuenta los efectos relativistas en los sistemas de temporización y en las comparaciones de tiempo;

e) que, como las comparaciones de tiempo en sistemas no inerciales exige una consideración especial y el CCDS ha recomendado un conjunto de ecuaciones adecuado que proporciona un conjunto coherente de mediciones de UTC en las proximidades de la Tierra;

f) que aumenta la tendencia a situar en órbita alrededor de la Tierra relojes precisos y estables para obtener señales horarias;

g) que hay necesidad de efectuar comparaciones entre los patrones de frecuencia en las proximidades de la Tierra con una precisión de 1×10^{-14},

recomienda

1 que para calcular intervalos de tiempo de coordinación en las proximidades de la Tierra (hasta, al menos, una distancia equivalente al radio geosíncrono) con una precisión de 1 ns (o 1×10^{-14} del tiempo de integración), se utilicen los procedimientos indicados a continuación, basados en los términos de primer orden de las expresiones relativistas generales (en el Anexo 1 aparecen algunos ejemplos prácticos):

1.1 Transporte del reloj en un sistema de referencia giratorio

Cuando se transfiere el tiempo del punto P al punto Q mediante un reloj portátil, el tiempo de coordinación acumulado durante el transporte es:

$$\Delta t = \int_P^Q ds \left[1 + \frac{\Delta U(\vec{r})}{c^2} + \frac{V^2}{2c^2} \right] + \frac{2\omega}{c^2} A_E \qquad (1)$$

* La Comisión de Estudio 7 de Radiocomunicaciones efectuó modificaciones de redacción en esta Recomendación en 2003 de conformidad con la Resolución UIT-R 44.

siendo:

c: velocidad de la luz

ω: velocidad angular de rotación de la Tierra

V: velocidad del reloj con respecto al suelo

$\vec{r}$: vector cuyo origen se encuentra en el centro de la Tierra y cuyo extremo se desplaza con el reloj de P a Q

A_E: proyección ecuatorial del área barrida durante la transferencia de tiempo por el vector $\vec{r}$ a medida que su extremo se desplaza de P a Q

$\Delta U(\vec{r})$: diferencia de potencial gravitacional (incluyendo el potencial centrífugo) entre la ubicación del reloj en $\vec{r}$ y el geoide, observado desde un sistema de coordenadas fijo en Tierra, partiendo del principio acordado (Resolución A4 de la Unión Astronómica Internacional (UAI), 1992) de que $\Delta U(\vec{r})$ es negativo cuando el reloj se encuentra por encima del geoide

ds: incremento de tiempo propio acumulado en el reloj portátil. Este incremento es el tiempo acumulado en el reloj patrón portátil medido en el «sistema de reposo» del reloj; es decir, en el sistema de referencia que se desplaza con el reloj.

A_E se mide en un sistema de coordenadas fijo en Tierra. El área barrida A_E se considera positiva cuando la proyección del trayecto del reloj sobre el plano ecuatorial se desplaza hacia el Este. Cuando la altura h del reloj es inferior a 24 km por encima del geoide, $\Delta U(\vec{r})$ puede aproximarse por el valor gh, siendo g la aceleración total debida a la gravedad evaluada en el geoide (incluyendo la aceleración de la rotación de la Tierra). Esta aproximación se aplica a todas las transferencias aerodinámicas y terrestres.

Cuando h es mayor de 24 km, la diferencia de potencial $\Delta U(\vec{r})$ debe calcularse con una mayor precisión de la forma siguiente:

$$\Delta U(\vec{r}) = GM_e/r + J_2 \ GM_e \, a_1^2 \ (1 - 3\cos^2\theta)/2r^3 + \omega^2 \ r^2 \ \mathrm{sen}^2\,\theta/2 - U_g \qquad (2)$$

siendo:

a_1: radio de la Tierra en el Ecuador

$a_1 = 6\,378{,}136$ km

r: magnitud del vector $\vec{r}$

θ: colatitud

GM_e: producto de la masa de la Tierra por la constante gravitacional

$GM_e = 398\,600$ km^3/s^2

J_2: coeficiente del momento cuadripolar de la Tierra

$J_2 = +1{,}083 \times 10^{-3}$

ω: velocidad angular de rotación de la Tierra

$\omega = 7{,}292115 \times 10^{-5}$ rad/s

U_g: potencial (gravitacional y centrífugo) en el geoide

$U_g = 62{,}63686$ km^2/s^2.

Para la transferencia con un nivel de exactitud de 1 ns, no se debe utilizar esta fórmula si la distancia es superior a unos 50 000 km desde el centro de la Tierra.

1.2 Transporte del reloj en un sistema de referencia no giratorio

Cuando se transfiere el tiempo del punto P al punto Q mediante un reloj, el tiempo de coordinación transcurrido durante el movimiento del reloj es:

$$\Delta t = \int_P^Q ds \left[1 + \frac{U(\vec{r}) - Ug}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] \tag{3}$$

donde:

- $U(\vec{r})$: potencial gravitacional en la ubicación del reloj, excluyendo el potencial centrífugo
- v: velocidad del reloj, ambos parámetros considerados (a diferencia de la ecuación (1)) desde un sistema de referencia no giratorio geocéntrico
- U_g: potencial en el geoide

  ($U_g/c^2 = -6{,}9694 \times 10^{-10}$), incluyendo el efecto en el potencial del movimiento giratorio de la Tierra.

Obsérvese que $\Delta U(\vec{r}) \neq U(\vec{r}) - U_g$, puesto que $U(\vec{r})$ no incluye el efecto de la rotación de la Tierra. Esta ecuación también se aplica a relojes en órbita geoestacionaria, pero no debe utilizarse para distancias superiores a 50 000 km medidas desde el centro de la Tierra.

1.3 Señales electromagnéticas en un sistema de referencia giratorio

Desde el punto de vista de un sistema giratorio fijo en Tierra y geocéntrico, el tiempo de coordinación transcurrido entre la transmisión y recepción de una señal electromagnética es:

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_P^Q d\sigma \left[1 + \frac{\Delta U(\vec{r})}{c^2} \right] + \frac{2\omega}{c^2} A_E \tag{4}$$

donde:

- $d\sigma$: incremento de longitud normalizada, o longitud propia, a lo largo del trayecto de transmisión
- $\Delta U(\vec{r})$: potencial en el punto, $\vec{r}$, menos el potencial en el geoide (véase la ecuación (3)) del trayecto de transmisión, observado desde un sistema de coordenadas fijo en Tierra
- A_E: área circunscrita por la proyección ecuatorial del triángulo cuyos vértices son:
  - el centro de la Tierra
  - el punto de transmisión de la señal, P
  - el punto de recepción de la señal, Q.

El área A_E es positiva cuando el trayecto de la señal tiene una componente hacia el Este. El segundo término toma un valor aproximado de un décimo de nanosegundo para una trayectoria Tierra-satélite geoestacionario-Tierra. En el tercer término, $2\omega/c^2 = 1{,}6227 \times 10^{-6}$ ns/km^2; este término puede contribuir con unas centenas de nanosegundos para valores prácticos de A_E. El incremento de longitud propia, $d\sigma$, puede considerarse la longitud medida utilizando barras rígidas normalizadas en reposo en el sistema giratorio; ello equivale a medir la longitud tomando $c/2$ veces el tiempo (normalizado al vacío) que una señal electromagnética bidireccional tarda en ir de P a Q y volver a lo largo del trayecto de transmisión.

1.4 Señales electromagnéticas en un sistema de referencia no giratorio

Desde el punto de vista de un sistema no giratorio geocéntrico (inercial local), el tiempo de coordinación transcurrido entre la transmisión y la recepción de una señal electromagnética es:

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_P^Q d\sigma \left[1 + \frac{U(\vec{r}) - Ug}{c^2} \right] \tag{5}$$

donde $U(\vec{r})$ y U_g se definen como en la ecuación (3) y $d\sigma$ es el incremento de la longitud normalizada, o longitud propia, a lo largo del trayecto de transmisión.

Anexo 1

Ejemplos

Debido a los efectos relativistas, un reloj situado en una ubicación elevada parecerá que tiene una frecuencia superior y diferirá del TAI en la siguiente frecuencia normalizada:

$$-\frac{\Delta U}{c^2}$$

donde:

ΔU: diferencia de potencial total (potenciales gravitacional y centrífugo)

c: velocidad de la luz.

Cerca del nivel del mar esta expresión pasa a ser:

$$-\frac{g(\varphi)\,h}{c^2} \tag{6}$$

donde:

φ: latitud geográfica

$g(\varphi)$: aceleración total a nivel del mar (gravitacional y centrífuga)

$g(\varphi) = (9{,}780 + 0{,}052 \operatorname{sen}^2 \varphi)$ m/s^2

h: altura sobre el nivel del mar.

La ecuación (6) debe utilizarse para comparar las fuentes primarias del segundo SI con el TAI y mutuamente. Por ejemplo, a una altitud de 40°, la marcha de un reloj cambiará en $+1{,}091 \times 10^{-13}$ para cada kilómetro por encima del geoide giratorio.

Si un reloj se desplaza con relación a la superficie de la Tierra a velocidad, V, que puede tener una componente, V_E, en dirección Este, la diferencia normalizada de frecuencia del reloj que se desplaza en relación con la de un reloj en reposo al nivel del mar es:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{V^2}{c^2} + \frac{g(\varphi)\,h}{c^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \omega \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot V_E \tag{7}$$

siendo:

- ω: velocidad de rotación angular de la Tierra

  $\omega = 7{,}292 \times 10^{-5}$ rad/s
- r: distancia del reloj al centro de la Tierra (radio de la Tierra = 6 378,136 km)
- c: velocidad de la luz

  $c = 2{,}99792458 \times 10^{5}$ km/s
- φ: latitud geográfica.

Por ejemplo, si el reloj se mueve a 270 m/s hacia el Este a 40° de latitud y a una altura de 9 km, la diferencia normalizada entre la frecuencia del reloj que se desplaza y la de otro reloj en reposo situado al nivel del mar es, debido a este efecto:

$$-4{,}06 \times 10^{-13} + 9{,}82 \times 10^{-13} - 1{,}072 \times 10^{-12} = -4{,}96 \times 10^{-13}$$

La elección de un sistema de coordenadas es puramente discrecional, pero para definir el tiempo de coordinación debe elegirse un sistema específico. Se recomienda utilizar un sistema topocéntrico para uso terrestre. En este sistema, cuando un reloj B está sincronizado con un reloj A (ambos estacionarios sobre la superficie de la Tierra) por medio de una señal radioeléctrica que se propaga de A a B, estos dos relojes difieren en tiempo de coordinación en:

$$t_B - t_A = -\frac{\omega}{c^2} \int_p d\lambda \; r^2 \cos^2 \varphi \tag{8}$$

siendo:

- φ: latitud
- λ: longitud (positiva en la dirección del Este)
- p: trayecto que recorre la señal radioeléctrica de A a B.

Si los dos relojes se sincronizan mediante un reloj portátil, diferirán en tiempo de coordinación en:

$$t_B - t_A \int_p ds \left(\frac{\Delta U(\vec{r})}{c^2} - \frac{V^2}{2c^2} \right) - \frac{\omega}{c^2} \int_p d\lambda \; r^2 \cos^2 \varphi \tag{9}$$

donde:

- V: velocidad en la superficie terrestre del reloj portátil
- p: trayecto recorrido por el reloj portátil de A a B.

Esta diferencia también puede alcanzar varias décimas de microsegundo. Se recomienda utilizar las ecuaciones (8) ó (9) como ecuaciones de corrección para la sincronización de relojes a larga distancia. Como las ecuaciones (8) y (9) dependen del trayecto, deben tenerse en cuenta en todo sistema coordinado de tiempo homogéneo.

Si se transporta un reloj desde un punto A a un punto B y se le emplaza nuevamente en A por un trayecto distinto, a una velocidad infinitesimal y con $h = 0$, su hora diferirá de la del reloj que permaneció en A en:

$$\Delta t = \frac{2\omega A_E}{c^2}$$

siendo A_E el área definida por la proyección del trayecto de ida y vuelta sobre el plano del ecuador de la Tierra. A_E se considera positiva si el trayecto se recorre en el sentido de las agujas del reloj visto desde el Polo Sur.

Por ejemplo, como:

$$2\omega / c^2 = 1{,}6227 \times 10^{-6} \text{ ns/km}^2$$

la hora de un reloj transportado hacia el Este alrededor de la Tierra a una velocidad infinitesimal y con $h = 0$, diferirá de la de un reloj en reposo en –207,4 ns.

En el nivel de corrección de 10^{-14}, las alturas sobre el nivel del mar, las alturas sobre el geoide giratorio y la altura indicada por el Sistema Mundial de Determinación de la Posición (GPS) son todas ellas equivalentes.