

RECOMENDACIÓN UIT-R S.1529

Método analítico para determinar los valores estadísticos de la interferencia entre sistemas del servicio fijo por satélite con satélites no geoestacionarios y otros sistemas del servicio fijo por satélite con satélites no geoestacionarios o redes del servicio fijo por satélite con satélites geoestacionarios

(Cuestión UIT-R 231/4)

(2001)

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

- a) que las emisiones procedentes de las estaciones terrenas así como de las estaciones espaciales de un sistema de satélites del servicio fijo por satélite geoestacionario (SFS OSG), SFS no OSG y enlaces de conexión del servicio móvil por satélite (SMS) no OSG) pueden provocar interferencia a otro sistema de satélites cuando ambos sistemas funcionan en las mismas bandas de frecuencia;
- b) que cuando están implicados sistemas de satélites no OSG, el comportamiento estadístico de la interferencia, especialmente la relativa a sucesos de corta duración, constituye un factor importante en los estudios de evaluación de la interferencia;
- c) que es conveniente contar con herramientas fiables y precisas para determinar el comportamiento estadístico de la interferencia entre sistemas que tienen enlaces con la misma frecuencia cuando el entorno de interferencia incluye sistemas de satélites no OSG;
- d) que los métodos de simulación por ordenador (véase la Recomendación UIT-R S.1325) pueden exigir un tiempo de cálculo excesivamente largo para asegurar que se tienen en cuenta todos los sucesos de interferencia y, por consiguiente, que se obtienen resultados significativamente estadísticos,

recomienda

- 1 que se considere el método analítico indicado en el Anexo 1 para su utilización en el cálculo de las distribuciones de probabilidad acumulativa de la interferencia combinada a fin de evaluar la interferencia entre sistemas con enlaces en la misma frecuencia cuando en el entorno de interferencia aparecen sistemas de satélites no OSG.

ANEXO 1

Método analítico para evaluar la interferencia en entornos de interferencia en que intervienen sistemas de satélites no OSG**1 Introducción**

La mayoría de los métodos existentes para evaluar la interferencia cuando intervienen sistemas de satélites no OSG se basan en una simulación directa por ordenador. Estos métodos normalmente llevan bastante tiempo y exigen realizar una nueva simulación de gran duración cada vez que se introduce una modificación en alguno de los sistemas o en los parámetros de un sistema. Además,

en situaciones complejas, en las que existe un gran número de estaciones terrenas y satélites no OSG, estos métodos pueden exigir mucho tiempo de cálculo para producir resultados estadísticamente significativos. Este Anexo presenta un método analítico, que puede aplicarse mediante técnicas numéricas, destinado a evaluar la sensibilidad frente a la interferencia de los sistemas y de los parámetros de los sistemas sin que ello exija demasiado tiempo de simulación mediante ordenador. Además, al contrario de lo que sucede con los resultados generados a través de la simulación, los resultados que se logran con el método analítico corresponden a un número infinito de días simulados y, por consiguiente, en este sentido no son necesarios periodos de cálculo muy largos, como sucede en el caso de métodos de simulación por ordenador a fin de asegurar unos resultados estadísticamente significativos.

El método se basa en el conocimiento de la función de densidad de probabilidad de la posición de un solo satélite situado en una órbita con una inclinación arbitraria. A fin de demostrar la aplicación del método propuesto a entornos de interferencia complejos, se presentan los resultados para algunas situaciones específicas. Las comparaciones de los resultados obtenidos utilizando el método propuesto y los generados por un programa informático de simulación ampliamente utilizado y disponible en el mercado han puesto en evidencia que con el método propuesto pueden lograrse resultados fiables y precisos con un tiempo de cálculo inferior.

2 Metodología

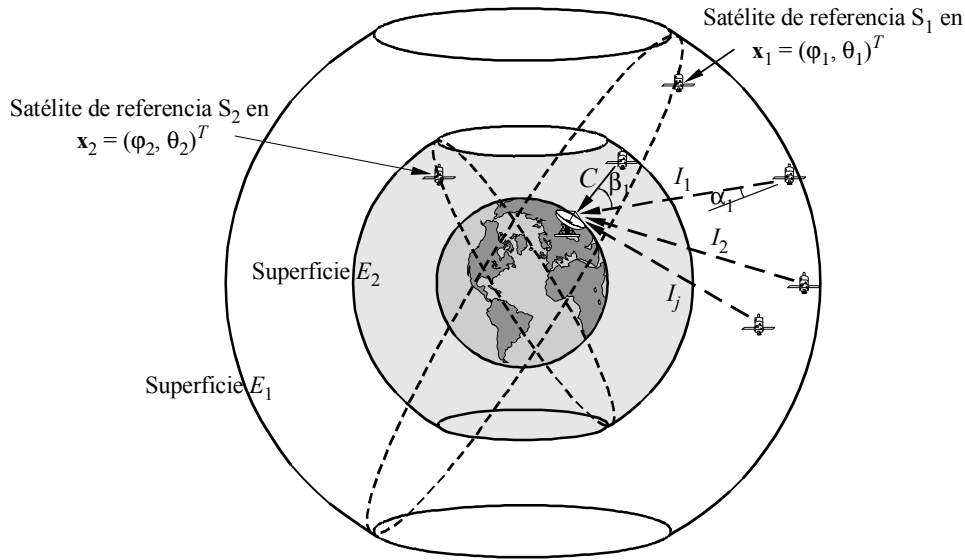
Considérese un entorno de interferencia en el que intervienen varios sistemas de satélites no OSG, por ejemplo n . El método considerado en esta Recomendación para evaluar la interferencia en dicho entorno tiene en cuenta el hecho de que una vez conocida la posición de un satélite en particular (denominado satélite de referencia) en cada constelación, los niveles de interferencia combinada que afectan a los receptores de cualquier sistema interferido en el entorno (considerando que se conocen todos los parámetros de los sistemas) pueden determinarse de forma unívoca. Además, se supone que las posiciones de estos satélites de referencia se caracterizan por vectores aleatorios estadísticamente independientes. Basándose en estas hipótesis, los niveles de potencia de la señal deseada e interferente pueden considerarse variables aleatorias que son funciones determinísticas de las posiciones de los satélites de referencia y, por lo tanto, pueden calcularse sus funciones de densidad de probabilidad una vez conocidas las funciones de densidad de probabilidad que establecen los modelos de las posiciones de cada uno de los n satélites de referencia.

Como ejemplo puede considerarse la situación ilustrada en la Fig. 1 donde se muestran dos sistemas de satélites no OSG, ambos con órbitas circulares y constelaciones de satélites arbitrarias. Los satélites del sistema 1 se mueven sobre la superficie E_1 y los satélites del sistema 2 se desplazan sobre la superficie E_2 . También se indican los satélites de referencia para ambos sistemas. En este ejemplo, se considera la interferencia combinada de enlace descendente provocada por los satélites del sistema 1 a una estación terrena determinada del sistema 2. Dado que el satélite de referencia S_i del sistema i ($i = 1, 2$) está situado a una longitud ϕ_i , y a una latitud θ_i , las posiciones del resto de satélites de ambas constelaciones pueden determinarse de forma unívoca en función de los dos vectores de emplazamiento $\mathbf{x}_1 = (\phi_1, \theta_1)^T$ y $\mathbf{x}_2 = (\phi_2, \theta_2)^T$. Por lo tanto, considerando por ejemplo que la antena de la estación terrena siempre está orientada hacia el satélite más próximo de la constelación de su sistema y que se conoce el resto de los parámetros del sistema, tales como los diagramas de radiación de la antena del satélite y de la estación, la p.i.r.e. etc., tanto la interferencia combinada de enlace descendente I como el nivel de la señal deseada C en la estación terrena considerada pueden calcularse para cada par de valores de los vectores $\mathbf{x}_i = (\phi_i, \theta_i)^T$, $-\pi < \phi \leq \pi$, $-\delta_i \leq \theta_i \leq \delta_i$, donde $i = 1, 2$, (δ_i es el ángulo formado por el plano ecuatorial y el plano que contiene la órbita de S_i). Si estos dos vectores se modelan como vectores aleatorios estadísticamente independientes con funciones de densidad de probabilidad conocidas $p_{\mathbf{x}_i}(\Phi, \Theta)$, $i = 1, 2$, el nivel de

la señal deseada $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ y la interferencia combinada $I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ corresponden a variables aleatorias cuya caracterización estadística (por ejemplo, la función de densidad de probabilidad o función de distribución acumulativa (CDF)) puede obtenerse a partir de $p_{\mathbf{x}_i}(\Phi, \Theta)$, $i = 1, 2$ mediante métodos analíticos y numéricos.

FIGURA 1

Entorno de interferencia en el que intervienen dos sistemas de satélites no OSG



1529-01

Puede demostrarse que la función de densidad de probabilidad $p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta)$ de la posición (longitud y latitud) de un satélite situado en una órbita elíptica alrededor de la Tierra es (véase el Apéndice 1 a este Anexo):

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)P(AM) + p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)P(DM) \quad (1)$$

siendo $p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)$ y $p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)$ las funciones de densidad de probabilidad de la posición del satélite (longitud y latitud) estando el satélite en modo ascendente y descendente, respectivamente. Estas funciones de densidad de probabilidad condicionales vienen dadas por la expresión:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2) g(\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (2)$$

y

$$p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2) g(-\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (3)$$

tomando $P(AM)$ y $P(DM)$ los valores indicados por las ecuaciones (60) y (61).

Obsérvese que la ecuación (1) también puede escribirse de la forma siguiente:

$$p_x(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right)^2 + \left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right)^2 \right] & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para } -\pi < \Phi \leq \pi \\ & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (4)$$

En las ecuaciones (2), (3) y (4), δ es el ángulo entre el plano orbital y el plano ecuatorial,

$$k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (5)$$

siendo e la excentricidad de la órbita, y

$$g(\Theta) = \cos \omega \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta} + \sin \omega \sin \Theta \quad (6)$$

siendo ω el argumento del perigeo.

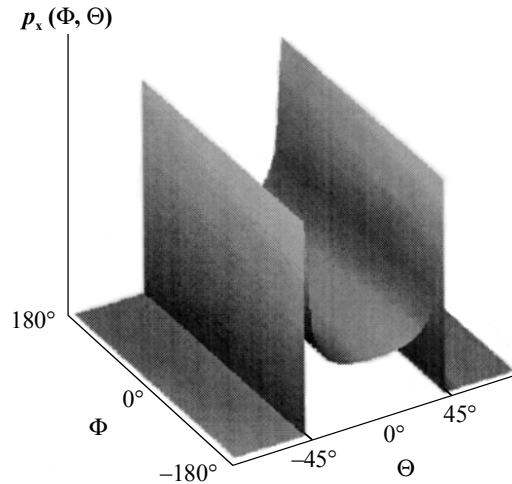
En el caso particular de órbitas circulares ($e = 0 \rightarrow k = 1$), la ecuación (1) se reduce a:

$$p_x(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{para } -\delta < \Theta < \delta \\ 0 & \text{para } -\pi < \Phi \leq \pi \\ & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (7)$$

Esta función de densidad de probabilidad se representa en la Fig. 2 para un satélite situado en órbita circular sobre un plano inclinado 45° con respecto al plano ecuatorial.

FIGURA 2

Función de densidad de probabilidad $p_x(\Phi, \Theta)$ de la posición de un satélite situado en una órbita circular en un plano inclinado 45° con respecto al plano ecuatorial



1529-02

3 Procedimiento para obtener la CDF de interferencia

Para mayor sencillez, se supone que sólo interviene un sistema de satélites no OSG en el entorno de interferencia. La longitud y latitud del satélite de referencia de este sistema de satélites no OSG toma valores en un plano φ - θ ($-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\delta \leq \theta \leq \delta$). Como primer paso este plano se divide en pequeñas células rectangulares. Para cada una de estas células se supone que el satélite de referencia está situado en su centro y, con esta condición, se determina la posición del resto de satélites de la constelación. Cabe señalar que hay dos posibles configuraciones de la constelación asociadas con una posición determinada del satélite de referencia: una corresponde al satélite en modo ascendente

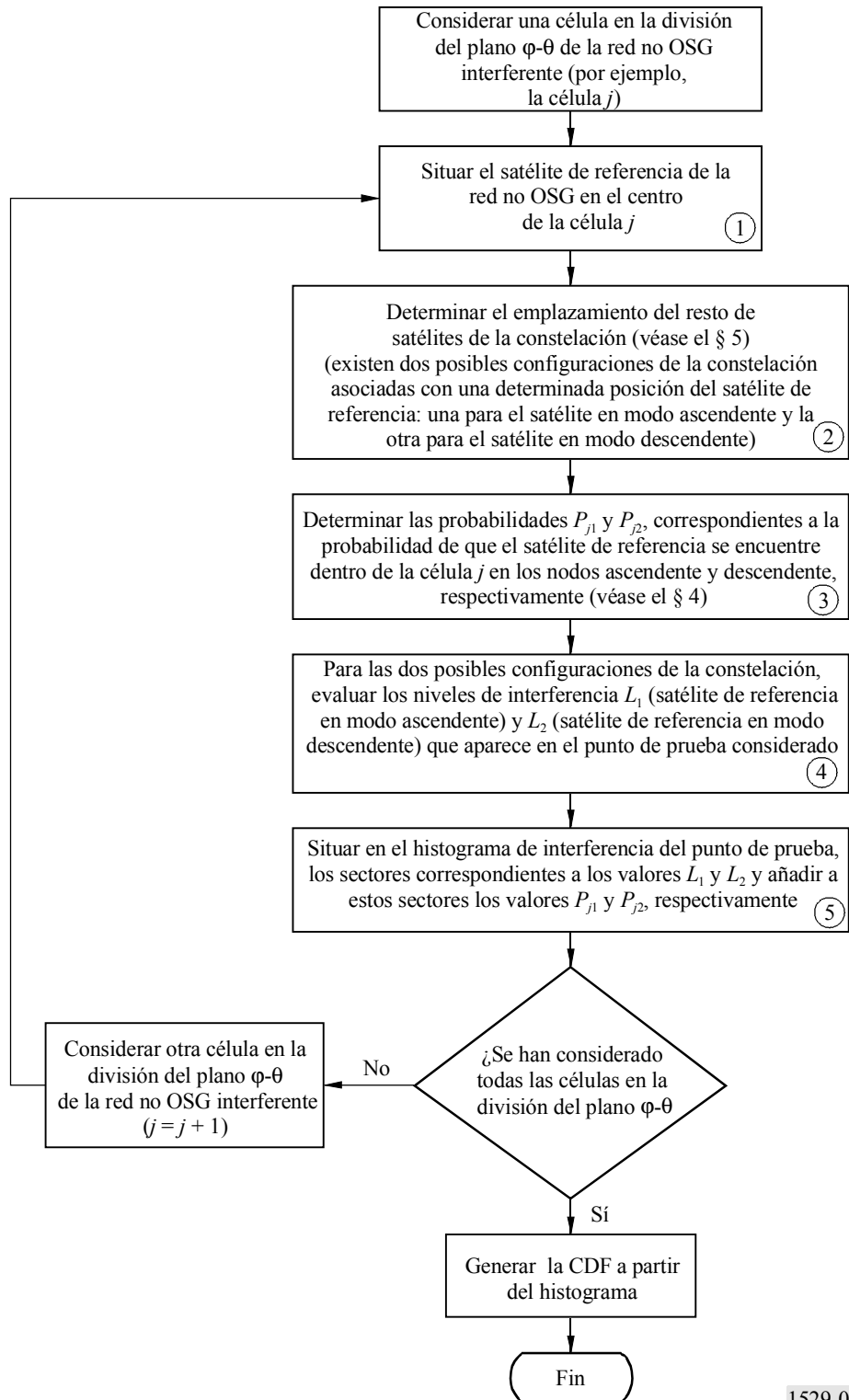
y la otra al satélite en modo descendente; ambas situaciones deben tenerse en cuenta. Para cada una de las dos configuraciones de la constelación, una vez conocida la posición de todos los satélites se evalúa el nivel de interferencia combinada que aparece en el punto de prueba deseado. Para generar la distribución de probabilidad de una versión cuantificada de la interferencia combinada, los dos valores obtenidos (modo ascendente y modo descendente) se cuantifican a los niveles de cuantificación más próximos y las correspondientes probabilidades de que el satélite de referencia se encuentre dentro de la célula considerada, valores que se obtienen utilizando las ecuaciones (2) y (3), se añaden a los valores actuales de la probabilidad asociada a los dos niveles de cuantificación correspondientes. Este procedimiento se repite para todas las células de la división y el histograma obtenido de esa forma se integra para generar la CDF deseada. El organigrama de la Fig. 3 ilustra el procedimiento descrito anteriormente.

Con respecto a este procedimiento, cabe hacer los siguientes comentarios adicionales:

- Aunque no es necesario que la división del plano ϕ - θ en células rectangulares sea del tipo rejilla, la utilización de este tipo de división es conveniente a efectos de realización. Sin embargo, para evitar un tiempo de cálculo prohibitivo al aplicar el método analítico propuesto a situaciones complejas en que interviene un gran número de estaciones terrenas y de satélites, deben tenerse en cuenta los puntos siguientes.
 - La rejilla de cuantificación del plano ϕ - θ debe ser lo suficientemente fina como para detectar rápidas variaciones de los niveles de interferencia que se producen cerca de las situaciones de interferencia en línea. Sin embargo, una cuantificación fina (muy detallada) de todo el plano ϕ - θ podría dar lugar a que el tiempo de cálculo fuese excesivamente elevado. Por consiguiente, una opción podría ser dividir en dos partes la aplicación numérica del método analítico. En la primera parte se llevan a cabo los cálculos en las regiones del plano ϕ - θ en las cuales el nivel de interferencia puede presentar grandes variaciones (próximas a la interferencia en línea) y donde es necesario realizar una detallada cuantificación (de gran resolución) de la región. En la segunda parte del procedimiento numérico se efectúan los cálculos en las regiones del plano ϕ - θ en las cuales el nivel de interferencia presenta unas variaciones reducidas, permitiendo una cuantificación de menor resolución. Determinar las regiones del plano ϕ - θ asociadas a la posible interferencia cuasi en línea corresponde a definir regiones tales que cuando el satélite de referencia se encuentra en el interior de una de estas regiones pueden aparecer sucesos de interferencia en línea en los que resultan implicados uno o más satélites de la constelación. Lo importante en este caso es garantizar que cuando el satélite de referencia no se encuentra dentro de ninguna de estas regiones, no aparece interferencia en línea y puede utilizarse una rejilla de cuantificación de menor resolución. Las regiones de posible interferencia en línea (**RPII**, *regions of potential in-line interference*) normalmente se definen como regiones rectangulares en torno a puntos de posible interferencia en línea (**PPII**, *points of potential in-line interference*). Estos **PPII** pueden determinarse utilizando la metodología descrita en el § 6.
 - Una vez detectada la posible aparición de interferencia cuasi en línea (cuando el satélite de referencia se encuentra dentro de una de las regiones de posible interferencia en línea), es importante identificar qué satélites y estaciones terrenas están implicados. De esta forma, los cálculos de interferencia pueden realizarse considerando que sólo deben volverse a calcular unas pocas fuentes de interferencia (las asociadas al suceso de interferencia en línea) cuando el satélite de referencia modifica su emplazamiento dentro de la región considerada de posible interferencia en línea. Esta medida puede suponer una gran cantidad de tiempo de cálculo cuando existe un número elevado de fuentes de interferencia.

FIGURA 3

Organigrama del método analítico



1529-03

- A partir de la posición del satélite de referencia, determinar la posición del resto de satélites en la constelación (bloque ③ en el diagrama de la Fig. 3) es un problema que tiene dos posibles soluciones. Ello se debe a que dos planos orbitales distintos, con la misma inclinación, pueden contener al satélite de referencia. De hecho, una de las soluciones supone que el satélite de referencia se encuentra en modo ascendente y la otra supone que el satélite de referencia se encuentra en modo descendente. Ambas

soluciones deben tenerse en cuenta en el procedimiento propuesto. En el caso de órbitas circulares, la determinación de estas soluciones no constituye una tarea compleja puesto que se conoce previamente la altitud de los satélites. Para satélites en órbitas elípticas, es un procedimiento más complicado puesto que las altitudes de los satélites varían a lo largo del tiempo (véase el § 5).

4 Probabilidades de que el satélite de referencia se encuentre en el interior de una célula rectangular en los modos ascendente y descendente

Considérese una célula rectangular en el plano φ - θ , célula j , definida mediante $\varphi \in (\varphi_m, \varphi_M)$, $\theta \in (\theta_m, \theta_M)$. Además, sean P_{j1} y P_{j2} las probabilidades respectivas de que el satélite de referencia se encuentre dentro de la célula rectangular j y en modo ascendente y la probabilidad de que el satélite de referencia se encuentre dentro de la célula rectangular j y en modo descendente. Estas dos probabilidades pueden obtenerse integrando respectivamente los dos sumandos del término de la derecha de la ecuación (1), considerando los valores de $P(AM)$ y $P(DM)$ calculados mediante las ecuaciones (60) y (61). Se obtiene así:

$$P_{jn} = \frac{\varphi_M - \varphi_m}{2\pi} \left[f(c_M, (n-1)\pi - (-1)^n \omega) - f(c_m, (n-1)\pi - (-1)^n \omega) \right] \quad \text{para } n = 1, 2 \quad (8)$$

con:

$$f(x, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x \leq -\pi \\ Q_{ek}\left(\frac{x-\omega}{2}\right) - Q_{ek}\left(\frac{-\pi-\omega}{2}\right) & \text{para } -\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{para } \pi < x < \infty \end{cases} \quad (9)$$

siendo:

$$Q_{ek}(x) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\tg(x)}{k}\right) + \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sgn}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{k e}{\pi} \frac{\tg(x)}{\tg^2(x) + k^2} \quad (10)$$

siendo $\operatorname{sgn}()$ la función de signo. En la ecuación (8),

$$c_m = \arcsen\left(\frac{\sen \theta_m}{\sen \delta}\right) \quad (11)$$

y

$$c_M = \arcsen\left(\frac{\sen \theta_M}{\sen \delta}\right) \quad (12)$$

En el caso de órbitas circulares, $\omega = 0$ y $e = 0 \rightarrow k = 1$, por lo tanto la ecuación (9) se reduce a:

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x \leq -\pi \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\pi} \right) & \text{para } -\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{para } \pi < x \leq \infty \end{cases} \quad (13)$$

5 Determinación de la posición de todos los satélites en la constelación

En este punto, se utilizan las siguientes notaciones y definiciones.

$\mathbf{u}$	Vector unitario en dirección del satélite de referencia
δ	Ángulo de inclinación de la órbita (rad)
β	Ángulo de separación de los satélites dentro del plano orbital (en términos de anomalía media) (rad)
ψ	Ángulo entre las intersecciones de los planos de órbita adyacente y el plano ecuatorial (rad)
λ	Desfase de los satélites entre planos (rad)
r	Radio de la órbita (órbita circular) (km)
a	Semieje mayor de la órbita elíptica (km)
e	Excentricidad de la órbita
ω	Argumento del perigeo (rad)
$\mathbf{k}_z$	Vector unitario en dirección del eje z
γ_ℓ	Anomalía verdadera del satélite de referencia en la configuración de la constelación ℓ medida a partir de la línea de nodos (rad)
v_ℓ	Anomalía verdadera del satélite de referencia en la configuración de la constelación ℓ (rad)
E_ℓ	Anomalía excéntrica del satélite de referencia en la configuración de la constelación ℓ (rad)
M_ℓ	Anomalía media del satélite de referencia en la configuración de la constelación ℓ (rad)
$(M_i^j)_\ell$	Anomalía media del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ (rad)
$(E_i^j)_\ell$	Anomalía excéntrica del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ (rad)
$J_n(\cdot)$	Función de Bessel de primera clase y orden n
$(v_i^j)_\ell$	Anomalía verdadera del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ (rad)
$(\mathbf{u}_i^j)_\ell$	Vector unitario en dirección del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ
$(\mathbf{p}_i^j)_\ell$	Vector de la posición del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ
$(r_i^j)_\ell$	Distancia, desde el centro de la Tierra, del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ (km)
$N_{\text{Satporplano}}$	Número de satélites por cada plano orbital
N_{Planos}	Número de planos orbitales en la constelación

Considérese un sistema geocéntrico y OSG de coordenadas rectangulares en el cual los ejes x e y corresponden al plano ecuatorial y el eje z apunta hacia el Norte. Sea $\mathbf{u}$ el vector unitario que apunta hacia el emplazamiento del satélite de referencia y $(\mathbf{p}_i^j)_\ell$ el vector que caracteriza la posición del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano orbital, correspondiente a la configuración de la constelación ℓ , $\ell = 1, 2$. Puede utilizarse el siguiente procedimiento para determinar los

emplazamientos $(\mathbf{p}_i^j)_\ell$ ($i = 0, \dots, N_{\text{Satporplano}} - 1, j = 0, \dots, N_{\text{Planos}} - 1, \ell = 1, 2$) de todos los satélites en las dos configuraciones de la constelación. El procedimiento descrito incluye una prueba para identificar cuál de las dos configuraciones corresponde al satélite de referencia en modo ascendente y cuál al satélite de referencia en modo descendente, como se requiere por el método analítico propuesto.

Paso 1: Sea $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$; se calcula, para $\ell = 1, 2$, los vectores unitarios $\mathbf{n}_\ell$ definidos por:

$$\mathbf{n}_\ell = \begin{pmatrix} (-u_z \cos \delta - a_\ell u_y) / u_x \\ a_\ell \\ \cos \delta \end{pmatrix} \quad (14)$$

siendo:

$$a_\ell = \frac{-u_y u_z \cos \delta + (-1)^\ell u_x \sqrt{(u_x^2 + u_y^2) \sin^2 \delta - u_z^2 \cos^2 \delta}}{u_x^2 + u_y^2}$$

Paso 2: Siendo $\mathbf{k}_z$ el vector unitario en dirección del eje z, se calculan las siguientes cantidades para $\ell = 1, 2$:

$$\mathbf{w}_\ell = \mathbf{k}_z \times \mathbf{n}_\ell \quad (\times \text{ quiere decir producto cruzado})$$

$$\gamma_\ell = \arccos \left(\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{w}_\ell}{|\mathbf{w}_\ell|} \right) \text{sgn}(u_z) \quad (15)$$

(T es transposición y $\text{sgn}()$ es la función signo)

$$v_\ell = (\gamma_\ell - \omega)_{\text{MOD } 2\pi}$$

(en este Anexo, $(x)_{\text{MOD } 2\pi}$ se define en el intervalo $(-\pi, \pi)$)

$$E_\ell = 2 \arctg \left(\frac{\text{tg}(v_\ell / 2)}{k} \right)$$

$$\text{siendo } k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$M_\ell = E_\ell - e \sin E_\ell$$

$$(M_i^j)_\ell = M_\ell + i\beta + j\lambda \quad (16)$$

$$(E_i^j)_\ell = (M_i^j)_\ell + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin(n(M_i^j)_\ell)$$

$$(v_i^j)_\ell = 2 \arctg \left(k \text{tg} \frac{(E_i^j)_\ell}{2} \right)$$

$$(\alpha_i^j)_\ell = (v_i^j)_\ell - v_\ell$$

Obsérvese que el parámetro β en la ecuación (16) viene dado normalmente por:

$$\beta = \frac{2\pi}{N_{Satporplano}}$$

Nota importante: Los valores de γ_ℓ determinados en la ecuación (15) se utilizan para identificar cuál de las dos configuraciones corresponde al satélite de referencia en modo ascendente y cuál corresponde al satélite de referencia en modo descendente.

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq |\gamma_\ell| < \pi/2 \rightarrow \text{la configuración } \ell \text{ corresponde al satélite de referencia en modo ascendente} \\ \text{si } \pi/2 \leq |\gamma_\ell| \leq \pi \rightarrow \text{la configuración } \ell \text{ corresponde al satélite de referencia en modo descendente} \end{cases} \quad (17)$$

Paso 3: Se determinan los vectores del emplazamiento de los satélites en las dos configuraciones de la constelación mediante:

$$(\mathbf{p}_i^j)_\ell = (r_i^j)_\ell (\mathbf{u}_i^j)_\ell$$

siendo:

$$(r_i^j)_\ell = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos((v_i^j)_\ell)}$$

y

$$(\mathbf{u}_i^j)_\ell = \cos((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{u} - \sin((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{b}_\ell$$

con:

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{u} \times \mathbf{n}_\ell$$

y

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos j\psi & -\sin j\psi & 0 \\ \sin j\psi & \cos j\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El ángulo ψ viene dado normalmente por la expresión:

$$\psi = \frac{2\pi}{N_{Planos}}$$

En el caso particular de órbitas circulares, como la anomalía verdadera, la anomalía excéntrica y la anomalía media son las mismas, y dado que $a=r$ y $e=0 \rightarrow k=1$, los Pasos 2 y 3 se simplifican quedando:

Paso 2:

$$(\alpha_i^j)_\ell = i\beta + j\lambda$$

Paso 3:

$$(\mathbf{p}_i^j)_\ell = r (\mathbf{u}_i^j)_\ell$$

siendo:

$$(\mathbf{u}_i^j)_\ell = \cos((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{u} - \sin((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{b}_\ell$$

con:

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{u} \times \mathbf{n}_\ell$$

y

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos j\psi & -\sin j\psi & 0 \\ \sin j\psi & \cos j\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Elección de los incrementos de longitud y latitud para las rejillas fina y gruesa

La rejilla de cuantificación del plano φ - θ debe ser lo suficientemente fina como para detectar rápidas variaciones de los niveles de interferencia que aparecen cerca de situaciones de interferencia en línea. Sin embargo, una cuantificación fina (muy detallada) de todo el plano φ - θ puede dar lugar a un tiempo de cálculo excesivamente elevado. Por consiguiente, una opción puede ser la de dividir en dos partes la aplicación numérica del método analítico. En la primera parte se realizan los cálculos en las regiones del plano φ - θ en las que el nivel de interferencia puede presentar amplias variaciones (próximas a la interferencia en línea) y donde es necesario realizar una cuantificación detallada (de gran resolución) de la región. Estas regiones son regiones **RPII**. En la segunda parte del procedimiento numérico se realizan los cálculos en las regiones del plano φ - θ en las cuales el nivel de interferencia tiene variaciones pequeñas, lo que permite una cuantificación menos detallada (de menor resolución). Se sugiere elegir los incrementos de longitud y latitud $\Delta\varphi_f$ y $\Delta\theta_f$ para la rejilla fina de forma que:

$$\Delta\varphi_f \leq \frac{\varphi}{10} \text{ y } \Delta\theta_f \leq \frac{\varphi}{10} \quad (18)$$

Para los cálculos de la interferencia de enlace descendente, φ , en la ecuación (18) es el ángulo geocéntrico definido por:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_{3\text{dB}} - \arcsen\left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}} + h} \sin\left(\frac{\varphi_{3\text{dB}}}{2}\right)\right) \quad (19)$$

donde:

R_{Tierra} : radio de la Tierra

h : máxima altitud de la órbita, y

$\varphi_{3\text{dB}}$: anchura de haz a 3 dB (grados) de la antena de la estación terrena que recibe la interferencia.

Para los cálculos de interferencia del enlace ascendente, φ también viene dado por la ecuación (19) y $\varphi_{3\text{dB}}$ es la anchura de haz a 3 dB (grados) de las antenas de la estación terrena interferente.

Para los cálculos de interferencia entre satélites (un satélite en órbita más baja pasa a través del haz principal del satélite en órbita más elevada que recibe la interferencia), φ en la ecuación (18) es el ángulo geocéntrico definido por:

$$\varphi = \arctg\left(2\sqrt{1 - \left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}} + h}\right)^2} \left[\frac{R_{\text{Tierra}} + H}{R_{\text{Tierra}} + h} \sqrt{1 - \left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}} + H}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}} + h}\right)^2} \right] \sin\left(\frac{\varphi_{3\text{dB}}}{2}\right)\right) \quad (20)$$

siendo:

R_{Tierra} : radio de la Tierra

h : máxima altitud de la órbita más baja

H : máxima altitud de la órbita más alta, y

ϕ_{3dB} : anchura de haz a 3 dB (grados) de la antena del satélite que sufre la interferencia.

Los incrementos de longitud y latitud $\Delta\phi_c$ y $\Delta\theta_c$ para la rejilla gruesa deben elegirse de forma que:

$$\Delta\phi_c = 1,5\phi \text{ y } \Delta\theta_c = 1,5\phi$$

y ϕ viene dado por la ecuación (19) para los cálculos de interferencia de enlace ascendente y de enlace descendente y por la ecuación (20) para los cálculos de interferencia entre satélites.

Determinar de las regiones del plano ϕ - θ asociadas a la posible interferencia cuasi en línea corresponde a definir regiones tales que cuando el satélite de referencia se encuentra en el interior de una de estas regiones pueden aparecer sucesos de interferencia en línea en los que intervienen uno o más satélites de la constelación. Lo importante en este caso es garantizar que cuando el satélite de referencia no se encuentra dentro de ninguna de estas regiones, no aparece interferencia en línea y puede utilizarse una rejilla de cuantificación de menor resolución. Las **RPII** se definen como regiones (normalmente rectangulares) en torno a **PPII**. Estos **PPII** pueden determinarse utilizando la metodología descrita en el § 7. Se sugiere definir la **RPII** mediante una región cuadrada de $\Delta \times \Delta$ (grados) en torno a los **PPII**, siendo:

$$\Delta = 5\phi$$

y ϕ viene dado por la ecuación (19) para cálculos de interferencia de enlace ascendente y de enlace descendente y por la ecuación (20) para los cálculos de interferencia entre satélites.

Aunque se ha demostrado que los valores antes mencionados para los incrementos de longitud y latitud, así como el tamaño de la **RPII**, son adecuados en varios ejercicios, es necesario ajustarlos. Las estaciones terrenas muy grandes (con haces muy estrechos) requerirán una disminución en el tamaño del incremento de latitud y longitud pero admitirán una **RPII** más pequeña. Por otro lado, las estaciones terrenas con haces amplios permitirán mayores valores de los incrementos de longitud y latitud pero también exigirán una mayor **RPII**.

7 Determinación de los PPII

En el caso de que se utilice la rejilla fina opcional hay que señalar los siguientes puntos:

7.1 Interferencia de enlace ascendente

Para cada satélite OSG interferido (punto de prueba), deben darse los siguientes pasos a fin de determinar el **PPII** en el caso de cálculos de interferencia de enlace ascendente:

Paso 1: Para cada estación terrena del sistema no OSG interferente debe identificarse la posición del satélite del sistema interferente que se encuentra en línea con la estación terrena considerada y el satélite OSG interferido.

Paso 2: Debe situarse el satélite de referencia en esa posición y hay que determinar la posición del resto de satélites en la constelación para las dos posibles configuraciones, de acuerdo con el § 5.

Paso 3: Estas $N_{estación\text{terrena}noOSG} \times N_{satélitesnoOSG} \times 2$ posiciones de satélites constituyen el conjunto de **PPII**.

Cabe señalar que el algoritmo de conmutación debe asegurar que la estación terrena no OSG no transmite hacia satélites no OSG que se encuentren en la zona de exclusión y, por consiguiente, puede que no sea necesario utilizar la rejilla fina para el enlace ascendente.

7.2 Interferencia de enlace descendente

Para cada estación terrena interferida del sistema OSG (punto de prueba), deben darse los siguientes pasos a fin de determinar el **PPII** en el caso de cálculos de interferencia de enlace ascendente:

Paso 1: Debe identificarse la posición del satélite del sistema interferente que se encuentra en línea con la estación terrena del sistema OSG interferida considerada (punto de prueba) del satélite OSG que le da servicio.

Paso 2: Debe situarse el satélite de referencia en esa posición y hay que determinar la posición del resto de satélites en la constelación para las dos posibles configuraciones, de acuerdo con el § 5.

Paso 3: Estos $N_{satélitesnoOSG} \times 2$ posiciones de satélites constituyen el conjunto de **PPII**.

7.3 Interferencia entre satélites

Para cada satélite OSG interferido (punto de prueba), deben darse los siguientes pasos a fin de determinar el **PPII** en el caso de cálculos de interferencia entre satélites:

Paso 1: Sea el $N_{hacesdesatéliteOSG}$ el número de haces cofrecuencia en los satélites OSG interferidos considerados. Para cada uno de estos haces, se identifica la posición del satélite no OSG interferente que se encuentra en el eje del haz.

Paso 2: Se sitúa el satélite de referencia en esta posición y se determina la posición del resto de satélites en la constelación para las dos posibles configuraciones, de acuerdo con el § 5.

Paso 3: Estos $N_{hacesdesatéliteOSG} \times N_{satélitesnoOSG} \times 2$ posiciones de satélite constituyen el conjunto de **PPII**.

8 Utilización adicional de rejillas finas

Pueden aparecer variaciones rápidas de la interferencia cuando los satélites se aproximan a la línea fronteriza que caracteriza la zona del ángulo de exclusión en las regiones del plano ϕ - θ donde no funcionan los satélites no OSG. En las proximidades de esta línea fronteriza (regiones de proximidad de la zona de exclusión (**EZVR**, *exclusion zone vicinity regions*)), pueden utilizarse también rejillas finas para detectar mejor estas variaciones rápidas. A fin de determinar estas **EZVR** deben darse los siguientes pasos:

Paso 1: Se determinan en la rejilla gruesa las células que contienen la curva fronteriza de la zona de exclusión. Considérese que el número de células que satisfacen esta condición es N_{EZ} .

Paso 2: Para cada una de estas N_{EZ} células, se sitúa el satélite de referencia en su centro y se determina la posición del resto de satélites en la constelación para las dos posibles configuraciones, de acuerdo con el § 5, y se identifican las células de la rejilla gruesa que las contienen.

Paso 3: Estas $N_{EZ} \times N_{satélitesnoOSG} \times 2$ células de la rejilla gruesa constituirán el conjunto de células de la rejilla gruesa en el interior de las cuales va a utilizarse una rejilla más fina.

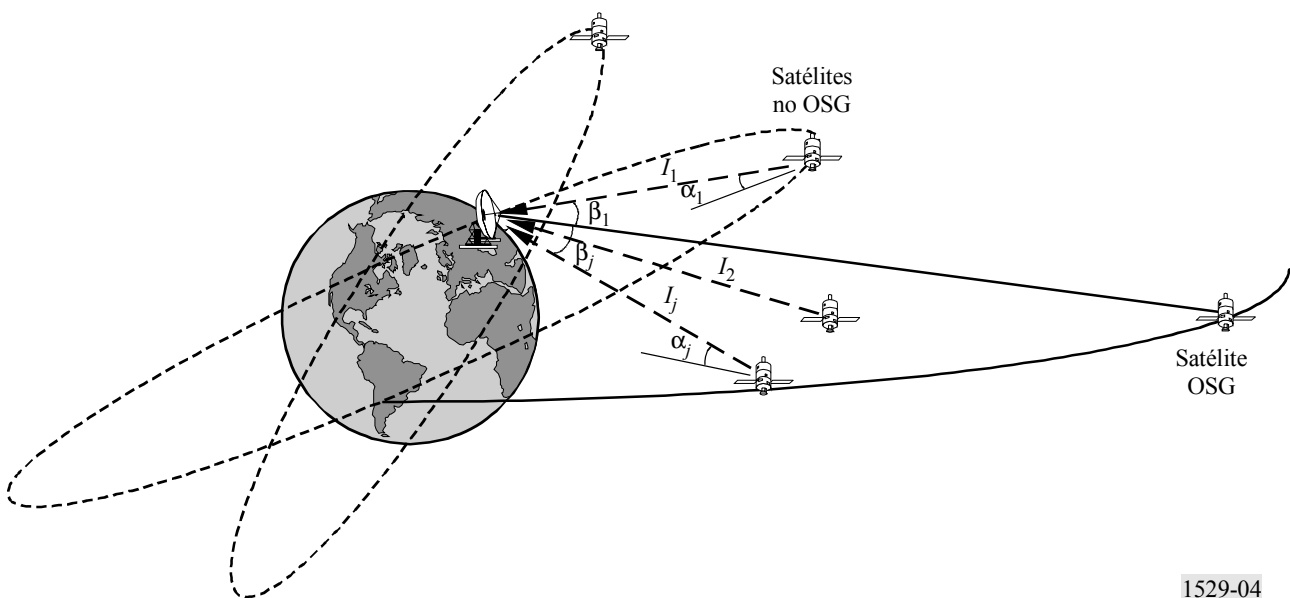
9 Ejemplos numéricos

Se presentan dos ejemplos de la aplicación del método analítico. El Ejemplo 1 se refiere a la interferencia combinada de enlace descendente procedente de todos los satélites de un sistema no OSG causada a una estación terrena de un sistema OSG. Los resultados también se comparan con los obtenidos mediante un programa informático de simulación ampliamente utilizado y disponible en el mercado. El Ejemplo 2 ilustra la aplicación de la metodología propuesta a una situación aún más compleja en la que interviene la interferencia combinada de enlace ascendente procedente de un gran número de estaciones terrenas de un sistema no OSG (cada una con múltiples haces), causada a un satélite situado en un punto fijo del cielo. La mayoría de los datos utilizados en los ejemplos se han extraído de la Recomendación UIT-R S.1328, salvo los indicados explícitamente en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Este primer ejemplo considera la interferencia combinada de enlace descendente causada por los diez satélites de órbita terrestre baja (LEO) F a una estación terrena de un sistema OSG situada a una longitud de 0° y una latitud de 30° N, orientada hacia un satélite OSG situado en una longitud de 0°. Esta situación se ilustra en la Fig. 4.

FIGURA 4
Geometría de la interferencia de enlace descendente



1529-04

Se supone que el diagrama de radiación de la antena de la estación terrena es:

$$G_e(\beta) = \begin{cases} 47,5 - 26,8177 \beta^2 & \text{para } 0^\circ \leq \beta \leq 0,76025^\circ \\ 32 & \text{para } 0,76025^\circ < \beta \leq 1^\circ \\ 32 - 25 \log \beta & \text{para } 1^\circ < \beta \leq 48^\circ \\ -10 & \text{para } 48^\circ < \beta \leq 180^\circ \end{cases}$$

lo que corresponde al diagrama de antena indicado en la Recomendación UIT-R S.465 para un diámetro de antena de 6 m y una frecuencia de 5,175 GHz. Se supone el siguiente diagrama de radiación de antena del satélite no OSG (para todos los satélites):

$$G_s(\alpha) = \begin{cases} G_{\max} - 12 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 & \text{para } 0 \leq \frac{\alpha}{\alpha_0} < 1,45 \\ G_{\max} - \left(22 + 20 \log \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \right) & \text{para } 1,45 \leq \frac{\alpha}{\alpha_0} \end{cases}$$

siendo $G_{\max} = 13$ dBi y $\alpha_0 = 52^\circ$. Ello corresponde al diagrama del Apéndice 30B del Reglamento de Radiocomunicaciones.

Suponiendo que todos los satélites transmiten la misma potencia, la potencia de interferencia combinada del enlace descendente que llega al receptor de la estación terrena es proporcional a la cantidad:

$$z = \sum_{i=1}^{10} \frac{G_{s,i}(\alpha_i) G_e(\beta_i)}{d_i^2}$$

siendo:

$G_{s,i}(\alpha_i)$: ganancia de antena de transmisión del i -ésimo satélite no OSG en una dirección α_i (grados) fuera del eje del haz principal

$G_e(\beta_i)$: ganancia de la antena receptora de la estación terrena del sistema OSG en una dirección β_i (grados) fuera del eje del haz principal, y

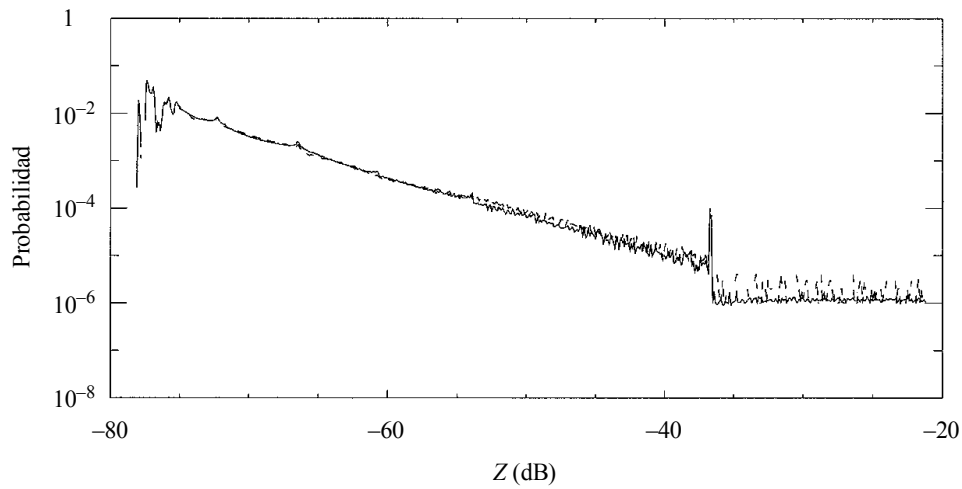
d_i : distancia entre el satélite y la estación terrena interferida.

La distribución de probabilidad y la correspondiente CDF de la versión cuantificada de z (intervalo de cuantificación de 0,1 dB; d_i (km)) se obtuvo utilizando el método propuesto y también una simulación por ordenador mediante un programa informático comercialmente disponible. La CDF se define aquí como $\text{CDF}(Z) = P(z > Z)$.

La Fig. 5a muestra los resultados obtenidos para las estimaciones de distribución de probabilidad obtenida con el método propuesto y mediante un programa de simulación por ordenador correspondiente a 58 días simulados (1×10^6 intervalos de tiempo con una duración cada intervalo de 5 s). El tiempo de cálculo necesario fue de unos 45 min con ambos métodos, en un ordenador personal de 200 MHz. En las Figs. 5b y 5c aparecen de forma ampliada las regiones de la Fig. 5a correspondientes, respectivamente, a los niveles más bajos de interferencia (interferencia de lóbulo lateral) y a los niveles más altos de interferencia (cerca de la interferencia en línea). Puede deducirse de estas Figuras que se obtuvo una similitud bastante aproximada entre los resultados generados por los dos métodos en la gama de los niveles más bajos de interferencia. Considerando los niveles más elevados de interferencia, que aparecen durante un porcentaje de tiempo más reducido, puede observarse que varios valores de z aunque muestran una probabilidad positiva en el método propuesto no aparecen en los resultados de la simulación. Ello sugiere que puede ser necesario aumentar el número de días simulados para cubrir más adecuadamente todas las posibilidades de emplazamientos de los satélites del sistema. Estas diferencias también se reflejan en la Fig. 6 que muestra las curvas de distribución acumulativa obtenidas en la gama de los niveles más altos de interferencia. Obsérvese que hay una diferencia de 1,5 dB para los valores de Z correspondientes a probabilidades de 1×10^{-4} .

FIGURA 5a

Estimaciones de la distribución de probabilidad obtenida con el método propuesto y mediante simulación por ordenador (58 días simulados, 5 s de intervalo de tiempo)

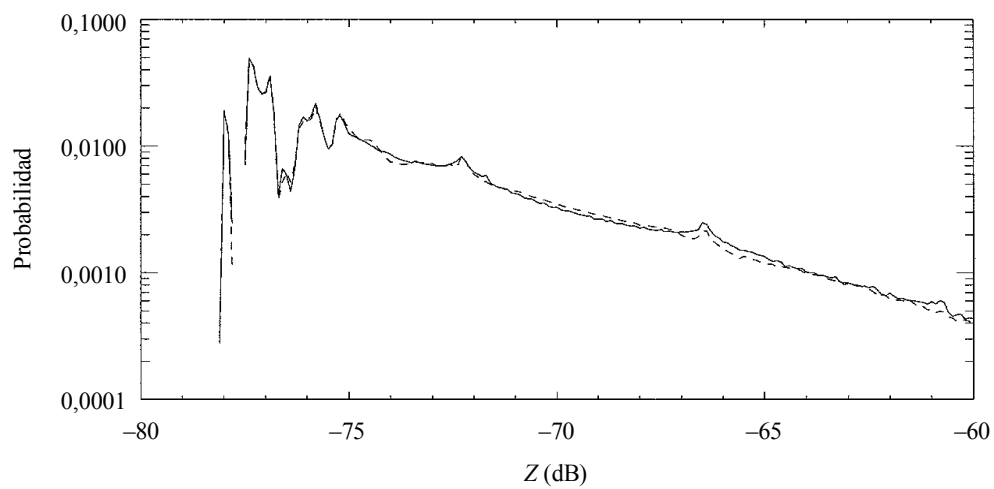


Línea continua: método analítico
Línea de puntos: simulación

1529-05a

FIGURA 5b

Estimaciones de la distribución de probabilidad obtenida con el método propuesto y mediante simulación por ordenador – Niveles de interferencia más bajos (58 días simulados, 5 s de intervalo de tiempo)

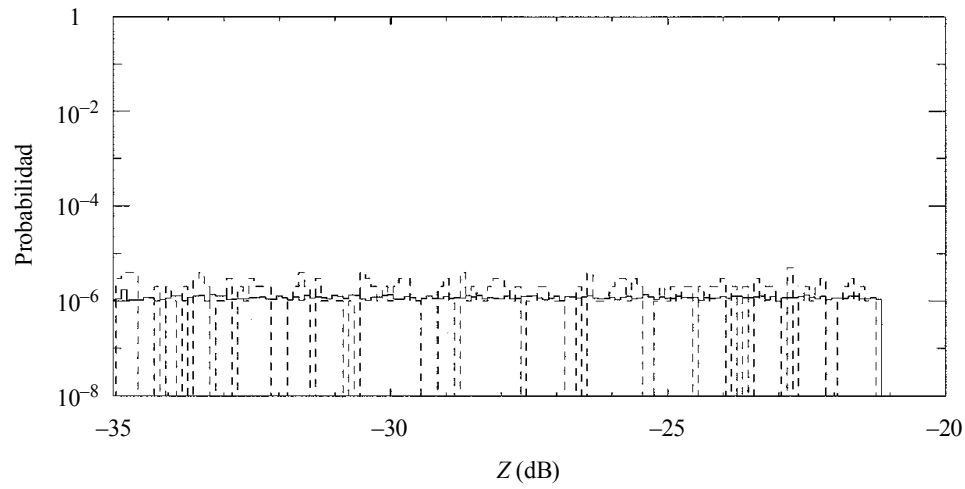


Línea continua: método analítico
Línea de puntos: simulación

1529-05b

FIGURA 5c

**Estimaciones de la distribución de probabilidad obtenida con el método propuesto
y mediante simulación por ordenador - Niveles de interferencia más altos
(58 días simulados, 5 s de intervalo de tiempo)**

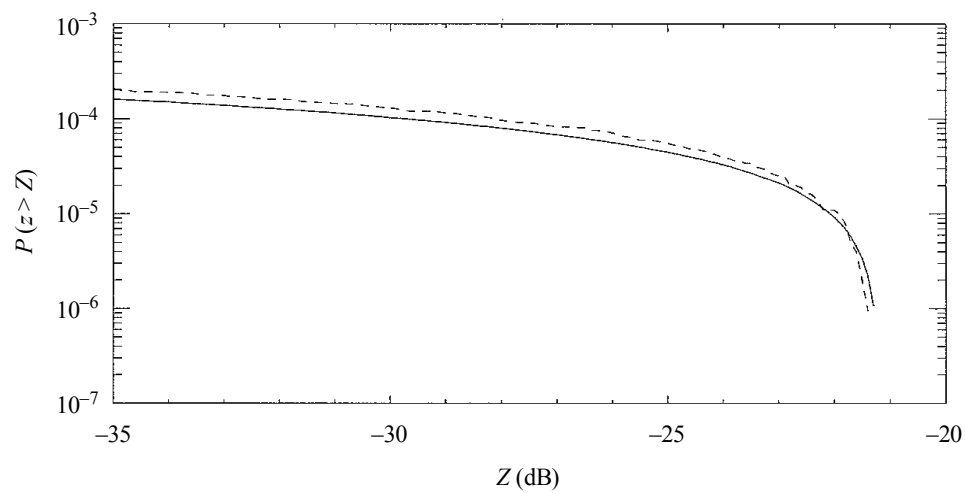


Línea continua: método analítico
Línea de puntos: simulación

1529-05c

FIGURA 6

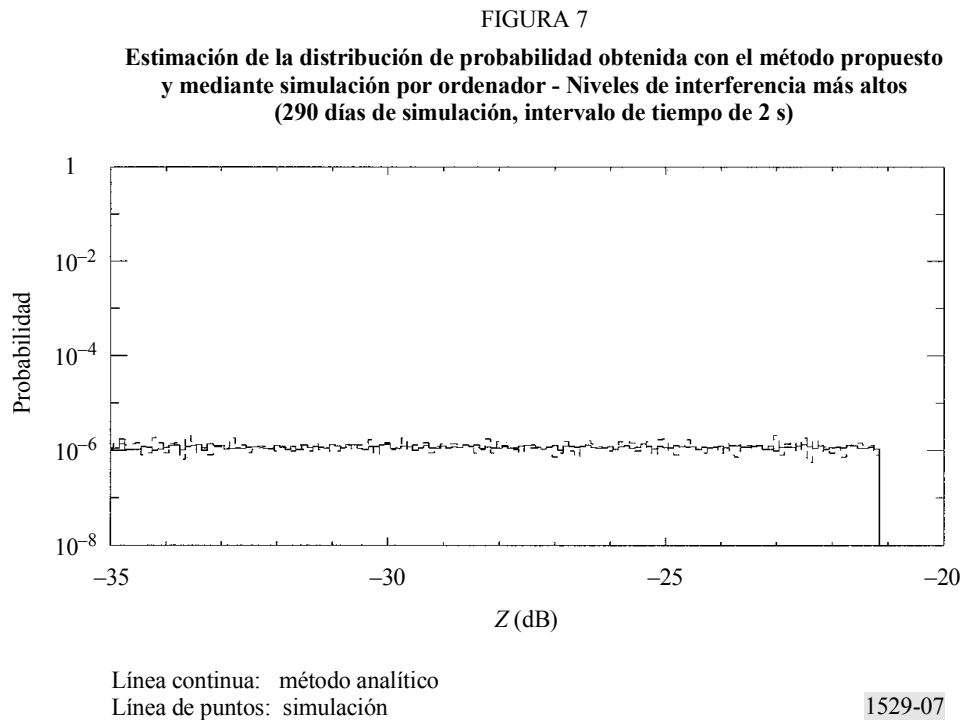
**Estimación de la CDF obtenida con el método propuesto y mediante
simulación por ordenador - Niveles de interferencia más altos
(58 días de simulación, intervalo de tiempo de 5 s)**



Línea continua: método analítico
Línea de punto: simulación

1529-06

Para los resultados de la simulación mostrados en la Fig. 7, el número de días simulados se incrementó de 58 a 290 y el intervalo de tiempo se redujo de 5 a 2 s, lo que dio lugar a un tiempo total de simulación por ordenador de aproximadamente 9 h y 22 min en un ordenador personal de 200 MHz. Obsérvese la mejora en la calidad de los resultados de la simulación.

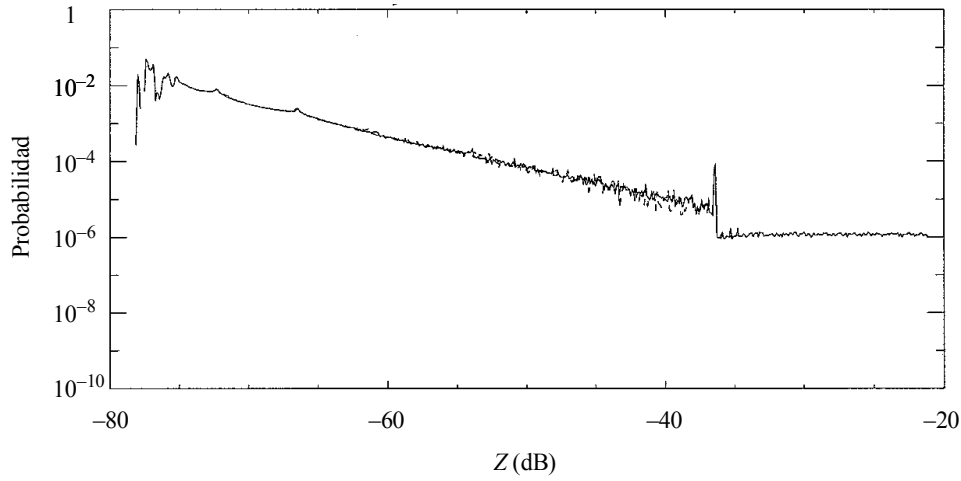


1529-07

Conviene señalar que aquí, al contrario de lo que sucede con los resultados generados mediante simulación, los resultados obtenidos con el método analítico propuesto corresponden a un número de días simulados infinito y, por consiguiente, a este respecto no presentan el problema de fiabilidad asociado a los métodos de simulación por ordenador. Para un entorno de interferencia determinado, el tiempo de cálculo requerido por el método propuesto depende del grado de detalle (resolución) de la cuantificación de los planos φ - θ de los satélites de referencia (similar a la duración del intervalo de tiempo en los métodos de simulación por ordenador). Una cuantificación más precisa intercambia tiempo de cálculo para mayor precisión en los resultados numéricos. Este hecho se refleja en la Fig. 8 que muestra las diferencias en las estimaciones de la distribución de probabilidad obtenidas con el método propuesto cuando el elemento de rejilla utilizado en las regiones de interferencia no en línea del plano φ - θ aumenta del cuadrado de $0,09^\circ \times 0,09^\circ$ utilizado en el ejemplo anterior a un cuadrado de $0,15^\circ \times 0,15^\circ$, manteniendo el mismo tamaño de los elementos de rejilla en las regiones de interferencia en línea. La correspondiente disminución en el tiempo de cálculo fue de 45 min a unos 15 min.

FIGURA 8

Estimaciones de la distribución de probabilidad obtenidas con el método propuesto para distintas cuantificaciones de rejilla



Línea continua:

región de interferencia en línea: rejilla de cuantificación = $0,01^\circ \times 0,01^\circ$

región de interferencia no en línea: rejilla de cuantificación = $0,09^\circ \times 0,09^\circ$

Línea de puntos:

región de interferencia en línea: rejilla de cuantificación = $0,01^\circ \times 0,01^\circ$

región de interferencia no en línea: rejilla de cuantificación = $0,15^\circ \times 0,15^\circ$

1529-08

Ejemplo 2

Considérense dos sistemas no OSG, LEO 1 y LEO 2. El sistema de satélites LEO 1 tiene los mismos parámetros orbitales (inclinación de la órbita, número de planos, número de satélites por plano, altitud, etc.) que el sistema LEO D. El sistema de satélites LEO 2 tiene los mismos parámetros orbitales que el sistema LEO F. Este segundo ejemplo considera la interferencia del enlace ascendente causada por las estaciones terrenas LEO 1 al satélite LEO 2. Esta situación se ilustra en la Fig. 9 en la que se supone que cada estación terrena cuenta con cuatro antenas (haces) orientadas a los satélites LEO 1 correspondientes a los cuatro ángulos de elevación más elevados que satisfacen la limitación del mínimo ángulo de elevación (la constelación cuenta con un total de 48 satélites). Considerando que todas las estaciones terrenas de enlaces de conexión transmiten la misma potencia, la potencia de interferencia de enlace ascendente combinada que llega a un satélite LEO 2 (llamado satélite i) situado en un punto determinado es proporcional a la cantidad:

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_e-1} \sum_{k=0}^{N_a-1} \frac{G_{s,i}(\alpha_{ij}) G_{e,j}(\beta_{ijk})}{d_{ij}^2}$$

donde:

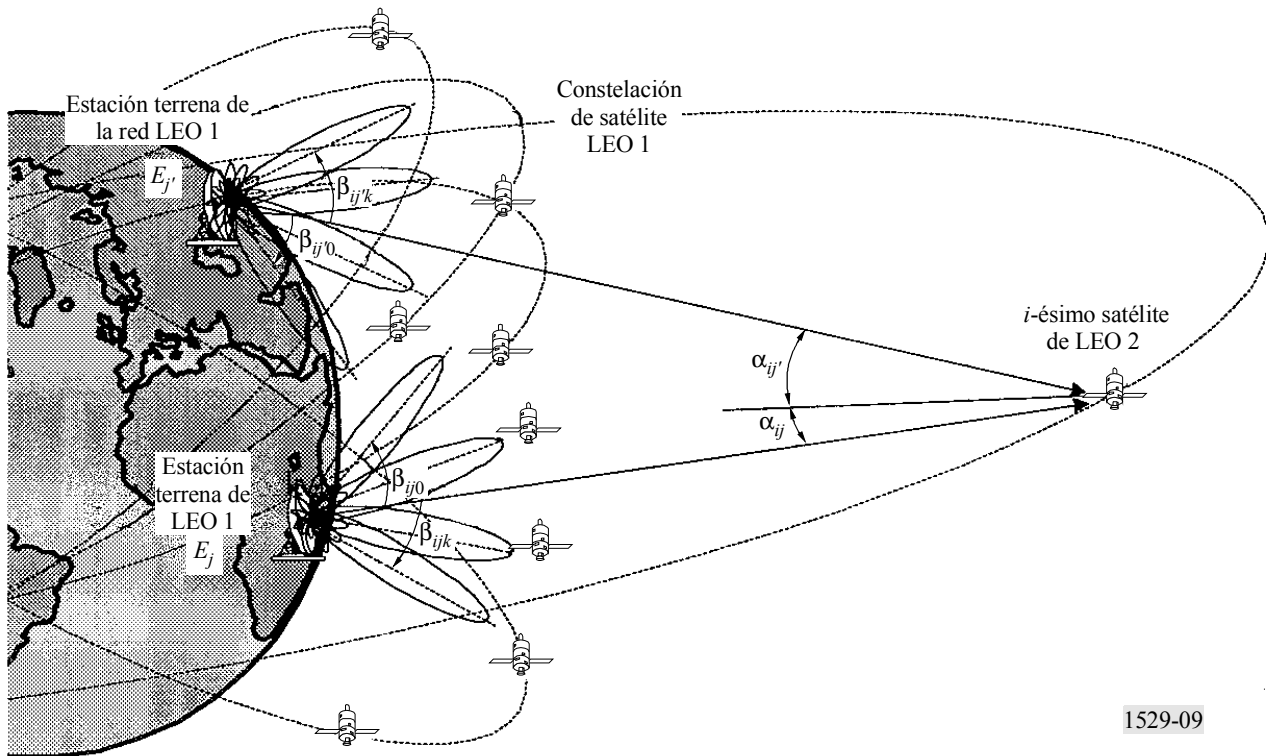
$G_{s,i}(\alpha_{ij})$: ganancia de la antena receptora del satélite i en una dirección α_{ij} (grados) fuera del eje del haz principal

$G_{e,j}(\beta_{ijk})$: ganancia de la antena transmisora de la estación terrena en una dirección β_{ijk} (grados) fuera del eje del haz principal, y

d_{ij} : distancia entre el satélite i y la estación terrena j .

Obsérvese que la variable aleatoria z_i es función del emplazamiento determinado del satélite interferido LEO 2 considerado y del emplazamiento aleatorio del satélite de referencia LEO 1. En la ecuación anterior N_e y N_a representan, respectivamente, el número de estaciones terrenas y el número de antenas (por estación terrena) que realizan el seguimiento de un satélite LEO 1 con un ángulo de elevación superior al valor mínimo prescrito.

FIGURA 9
Geometría de la interferencia del enlace ascendente

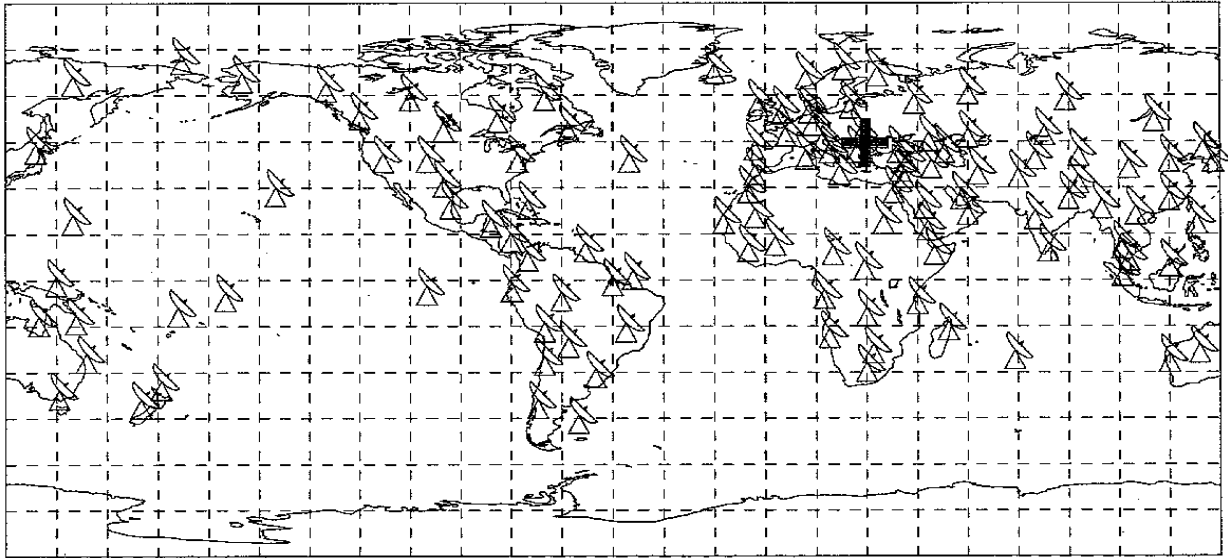


1529-09

El diagrama de radiación de transmisión de la antena de la estación terrena LEO 1 es el mismo que en el Ejemplo 1. El diagrama de radiación de la antena de recepción del satélite LEO 2 se consideró que tenía la misma forma que en el Ejemplo 1 pero con unos valores de $G_{m\acute{a}x} = 12$ dBi y $\alpha_0 = 52^\circ$. Se supuso un mínimo ángulo de elevación de funcionamiento para las estaciones terrenas LEO 1 de 5° . Con respecto a la estrategia de conmutación de la estación terrena, se supuso que cada pasarela LEO 1 contiene cuatro antenas de estación terrena que realizan el seguimiento de los satélites LEO 1 con ángulos de elevación superiores al mínimo valor prescrito, 5° .

Se obtuvieron resultados para un total de 120 estaciones terrenas de LEO 1 (en todo el mundo). El conjunto considerado de emplazamientos de estaciones terrenas se representa en la Fig. 10 junto con la ubicación del satélite LEO 2 interferido (cruz negra). El emplazamiento del satélite LEO 2 se eligió de tal forma que se maximiza el número de estaciones terrenas visibles (65). De esta forma el número de fuentes de interferencia considerado es máximo.

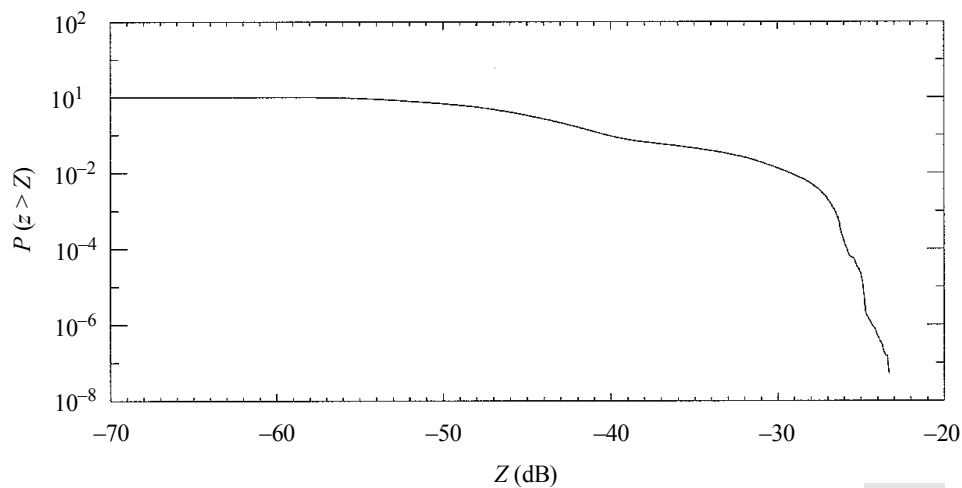
FIGURA 10
Distribución de estaciones terrenas LEO 1 y emplazamiento
del satélite LEO 2 (24,5° E, 44,5° N)



1529-10

Este ejemplo ilustra la capacidad del método analítico propuesto para considerar entornos de interferencia complejos. La Fig. 11 representa la CDF obtenida con el método propuesto para la variable z , correspondiente a la interferencia de enlace ascendente combinada causada por estaciones terrenas LEO 1 a un satélite LEO 2 (120 estaciones terrenas LEO 1 en todo el mundo). En este caso, no se obtuvieron resultados de la simulación.

FIGURA 11
Estimación de la CDF obtenida con el método propuesto para la variable z ,
correspondiente a la interferencia de enlace ascendente combinada
causada por estaciones terrenas LEO 1 a un satélite LEO 2
(120 estaciones terrenas LEO 1 en todo el mundo)



1529-11

10 Aplicación del método analítico a sistemas de satélites no OSG con trayectoria repetida

Al aplicar la metodología descrita en los puntos anteriores para evaluar el comportamiento estadístico de la interferencia cuando intervienen sistemas de satélites no OSG con trayectoria repetida, es más adecuado establecer la posición del satélite de referencia determinado en términos de su anomalía media M y la longitud Ω del nodo ascendente de la órbita cuando el satélite se encuentra en el perigeo en vez de en términos de su longitud y latitud, como antes. En este caso, la posición del satélite de referencia se representa mediante el vector $\mathbf{x} = (M, \Omega)^T$, $-\pi < M \leq \pi$, $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. Sea $p_{\mathbf{x}}(\eta, G)$ la función de densidad de probabilidad del vector $\mathbf{x}$. De nuevo en este caso, la idea es establecer un modelo de M como variable aleatoria y medir la probabilidad $P(M \in \Delta)$ por la fracción del periodo T (periodo de revolución del satélite) durante la cual $M(t)$ toma valores en el intervalo Δ . Con esta hipótesis, puede demostrarse fácilmente que la función de densidad de probabilidad de M viene dada por:

$$p_M(\eta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{para } -\pi < \eta \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (21)$$

Por otro lado, la longitud Ω del nodo ascendente de la órbita cuando el satélite se encuentra en el perigeo puede modelarse adecuadamente como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y estadísticamente independiente M (véase el Apéndice 1 a este Anexo). En el caso particular de satélites con trayectorias repetidas, Ω es una variable aleatoria discreta que toma un valor del conjunto finito $\{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k, \dots, \Omega_{N-1}\}$, siendo Ω_k la longitud de nodos ascendentes sucesivos (cuando el satélite se encuentra en el perigeo) que viene dada por:

$$\Omega_k = (\Omega_0 - k\Delta\Omega_{AN}) \text{MOD } 2\pi \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1 \quad (22)$$

representando $\Delta\Omega_{AN}$ la separación longitudinal entre pases ascendentes sucesivos a través del plano ecuatorial. En ese caso, la función de densidad de probabilidad de Ω viene dada por:

$$p_{\Omega}(G) = \sum_{k=0}^{N-1} P(\Omega = \Omega_k) \delta(G - \Omega_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta(G - \Omega_k) \quad (22a)$$

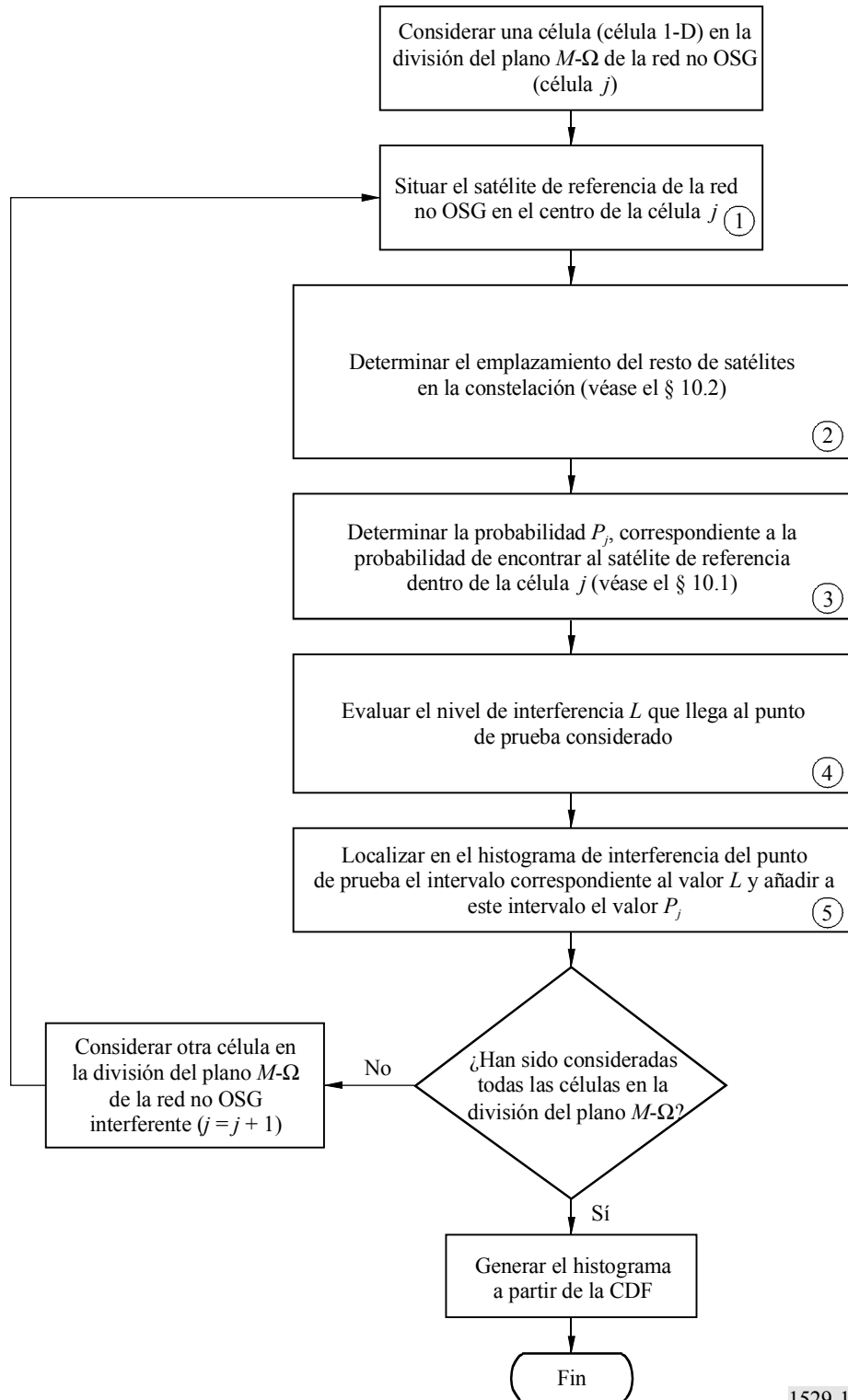
siendo $\delta(\)$ la función delta de Dirac. Por último, considerando la ecuación (21) y la independencia estadística de M y Ω , se obtiene:

$$p_{\mathbf{x}}(\eta, G) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta(G - \Omega_k) \quad \begin{matrix} \text{para } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{matrix} \quad (23)$$

Además, en el caso particular de satélites con trayectoria repetida, la aplicación del método analítico supone variar la posición del satélite de referencia de manera que se consideran todos los valores del par (M, Ω) con $M \in (-\pi, \pi)$ y $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$. Ello se hace discretizando el intervalo $(-\pi, \pi)$ (donde M toma diversos valores) en pequeños intervalos y creando en el plano M - Ω un conjunto de células unidimensionales (células 1-D) que se definen mediante estos pequeños intervalos y un valor determinado de $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$. Al igual que antes, es importante calcular la probabilidad de que el satélite de referencia se encuentre dentro de alguna de estas células 1-D.

El organigrama de la Fig. 12 representa el procedimiento de aplicación del método analítico a los satélites con trayectoria repetida.

FIGURA 12

Organigrama del método analítico (satélites con trayectoria repetida)

NOTA 1 – Este procedimiento también puede aplicarse a satélites con trayectorias no repetidas. En este caso, se considera que Ω es una variable aleatoria continua, uniformemente distribuida a lo largo del intervalo $(-\pi, \pi)$ e independiente de M y el plano M - Ω se divide en pequeñas células rectangulares. La probabilidad de hallar un satélite de referencia dentro de una célula rectangular (célula j) en el plano M - Ω definido por $M \in (M_m, M_M)$, $\Omega \in (\Omega_m, \Omega_M)$, puede obtenerse integrando $p_x(\eta, G)$ que, en este caso, viene dado por:

$$p_x(\eta, G) = \frac{1}{4\pi^2} \quad \text{para } \begin{matrix} -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{matrix} \quad (24)$$

10.1 Probabilidad de que el satélite de referencia se encuentre dentro de una célula determinada

Como se ha indicado anteriormente, la aplicación del método analítico a satélites con trayectoria repetida supone variar la posición del satélite de referencia, por consiguiente se consideran todos los valores del par (M, Ω) con $M \in (-\pi, \pi)$. Ello se realiza discretizando el intervalo $(-\pi, \pi)$ (donde M toma diversos valores) en pequeños intervalos y creando en el plano M - Ω , un conjunto de células unidimensionales (células 1-D) definidas por estos pequeños intervalos y cualquier valor determinado de $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$. La probabilidad de que se encuentre un satélite de referencia dentro de una célula 1-D determinada (célula j) definida, por ejemplo, por los puntos en el plano M - Ω que satisfacen la condición $\{M_m < M \leq M_M, \Omega = \Omega_i\}$ puede determinarse a partir de la ecuación (23) y viene dada por:

$$P_j = P(M_m < M \leq M_M, \Omega = \Omega_i) = \frac{M_M - M_m}{2\pi N} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (25)$$

NOTA 1 – Como se ha indicado antes, también es posible aplicar esta técnica a satélites con trayectorias no repetidas. En este caso, se considera que Ω es una variable aleatoria continua uniformemente distribuida a lo largo del intervalo $(-\pi, \pi)$ e independiente de M . A continuación se divide el plano M - Ω en pequeñas células rectangulares. La probabilidad de que el satélite de referencia se encuentre dentro de una célula rectangular en el plano M - Ω (célula j), definida por $M \in (M_m, M_M)$, $\Omega \in (\Omega_m, \Omega_M)$ puede obtenerse de la ecuación (24) y viene dada por:

$$P_j = P(M_m < M \leq M_M, \Omega_m < \Omega \leq \Omega_M) = \frac{(M_M - M_m)(\Omega_M - \Omega_m)}{4\pi^2} \quad (26)$$

10.2 Determinación de la posición de todos los satélites en la constelación

Este punto utiliza la misma notación que el § 5. Sea $\mathbf{x} = (M, \Omega)^T$ el vector que caracteriza la posición del satélite de referencia. Como en este caso se conoce la anomalía media del satélite de referencia (no la latitud como antes), existe sólo una configuración de constelación asociada con el par (M, Ω) . Para determinar las posiciones del resto de satélites en la configuración de la constelación, deben calcularse las siguientes cantidades para: $i = 0, \dots, N_{\text{Satporplano}} - 1$ y $j = 0, \dots, N_{\text{planos}} - 1$:

$$M_i^j = M + i\beta + j\lambda \quad (27)$$

$$E_i^j = M_i^j + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin(nM_i^j) \quad (28)$$

$$v_i^j = 2 \arctg \left(k \operatorname{tg} \frac{E_i^j}{2} \right) \quad (29)$$

$$r_i^j = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos(v_i^j)} \quad (30)$$

$$\gamma_i^j = (v_i^j + \omega)_{MOD 2\pi} \quad (31)$$

$$\theta_i^j = \arcsen(\sen \delta \sen(\gamma_i^j)) = f_1(\gamma_i^j) \quad (32)$$

$$\phi_{si}^j = \arccos \left[\frac{\cos(\gamma_i^j)}{\cos(f_1(\gamma_i^j))} \right] \text{sgn}(\gamma_i^j) \quad (33)$$

$$\phi_i^j = (\phi_{si}^j + \Omega_g + j\psi)_{MOD 2\pi} \quad (34)$$

En la expresión anterior, Ω_g es la longitud del nodo ascendente correspondiente al plano orbital del satélite de referencia que puede expresarse en términos de la longitud Ω del nodo ascendente cuando el satélite de referencia se encuentra en el perigeo y de la anomalía media del satélite de referencia M , como:

$$\Omega_g = (\Omega - M\Delta\Omega_{AN} / 2\pi)_{MOD 2\pi} \quad (35)$$

siendo $\Delta\Omega_{AN}$ la separación longitudinal entre pases ascendentes sucesivos a través del plano ecuatorial. Obsérvese que, como cabía esperar, cuando el satélite de referencia se encuentra en el perigeo, $M = 0$ y por consiguiente $\Omega_g = \Omega$.

Por último, el vector que define la posición del i -ésimo satélite en el j -ésimo plano viene dado por:

$$\mathbf{p}_i^j = \begin{pmatrix} r_i^j \cos(\theta_i^j) \cos(\phi_i^j) \\ r_i^j \cos(\theta_i^j) \sen(\phi_i^j) \\ r_i^j \sen(\theta_i^j) \end{pmatrix} \quad (36)$$

10.3 Elección de los incrementos de la anomalía media

El valor del incremento de la anomalía media ΔM depende del valor de los incrementos de la anomalía verdadera Δv , que se eligen de acuerdo con los mismos criterios indicados en el § 6 para la elección de los incrementos de longitud y latitud. Considerando la relación no lineal entre la anomalía media y la anomalía verdadera, puede demostrarse fácilmente que si se desea una cuantificación uniforme de la anomalía media, el incremento de la anomalía media deberá satisfacer la desigualdad:

$$\frac{\Delta M}{\Delta v} \leq \min_v \frac{dM}{dv} = \frac{1-e}{k} \quad (37)$$

siendo Δv el incremento de anomalía verdadera (máximo) necesario.

NOTA 1 – Para satélites con trayectorias no repetidas, en cuyo caso se considera que Ω es una variable aleatoria continua, distribuida uniformemente a lo largo del intervalo $(-\pi, \pi)$ e independiente de M , los incrementos $\Delta\Omega$ se eligen de acuerdo con los mismos criterios indicados en el § 6 para seleccionar los incrementos de la longitud y la latitud.

10.4 Comentarios

Pueden hacerse las siguientes observaciones con respecto al procedimiento del § 10:

- El procedimiento también puede aplicarse a satélites con trayectorias no repetidas, en cuyo caso Ω se modela como una variable aleatoria uniformemente distribuida a lo largo del intervalo $(-\pi, \pi)$.
- Trabajando en el plano $M-\Omega$ es posible aprovechar la cierta simetría que puede existir en la constelación de satélites, reduciendo de esa forma el tiempo de cálculo. En este caso, puede ser conveniente trabajar en el plano $M-\Omega_g$ en vez de en el plano $M-\Omega$. Obsérvese que en caso de satélites con trayectoria repetida, M y Ω_g no son variables aleatorias estadísticamente independientes. De hecho, a partir de las ecuaciones (23) y (35) se obtiene:

$$p_{\Omega_g|M=\eta}(G) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta \left(G - \left(\Omega_k - \frac{\eta \Delta \Omega_{AN}}{2\pi} \right) \text{MOD } 2\pi \right)$$

y, considerando adicionalmente la fórmula (21):

$$p_{M\Omega_g}(\eta, G) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta \left(G - \left(\Omega_k - \frac{\eta \Delta \Omega_{AN}}{2\pi} \right) \text{MOD } 2\pi \right) \quad \begin{array}{l} \text{para } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{array}$$

En el caso de satélites con trayectoria no repetida, considerando la ecuación (35) y el hecho de que Ω está uniformemente distribuida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y es estadísticamente independiente de M , puede demostrarse que Ω_g también está uniformemente distribuida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y es estadísticamente independiente de M . En este caso:

$$p_{M\Omega_g}(\eta, G) = \frac{1}{4\pi^2} \quad \begin{array}{l} \text{para } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{array}$$

- Trabajar en el plano $M-\Omega$ o en los planos $M-\Omega_g$ exige un mayor número de células que trabajar en el plano $\phi-\theta$. De hecho, las células del plano $\phi-\theta$ se recorren más de una vez (al menos dos). En particular, las células del plano $\phi-\theta$ tienen una latitud próxima al máximo valor δ se recorren varias veces.
- Los conceptos de **PPII** y **RPII** descritos en los § 3, 6 y 7 (aconsejando la utilización conjunta de rejillas de cuantificación fina y gruesa) también pueden aplicarse. En este caso, los **PPII** deben determinarse en el plano $\phi-\theta$ y a continuación transferirse al plano $M-\Omega$ donde se definen las **RPII**.

APÉNDICE 1

AL ANEXO 1

Función de densidad de probabilidad de la posición de un satélite no OSG

Para obtener una expresión analítica de la función de densidad de probabilidad $p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta)$ de la posición de $\mathbf{x}$ de un satélite no OSG, considérese en primer lugar la orientación de una órbita terrestre elíptica, ilustrada en la Fig. 13, donde la inclinación δ es el ángulo formado entre el plano de la órbita y el plano ecuatorial. La ascensión recta del nodo ascendente (RAAN) Ω se mide hacia

siendo v la denominada anomalía verdadera asociada a la posición del satélite. En este sistema de referencia, conociendo δ y RAAN Ω , la posición del satélite se caracteriza por su distancia r al centro de la Tierra y el desplazamiento angular γ . En este Apéndice, $(x)_{MOD 2\pi}$ toma valores en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

FIGURA 13
Orientación de una órbita terrestre elíptica


$$\gamma = \left(\omega + 2 \arctg \left[k \operatorname{tg} \left(\frac{E}{2} \right) \right] \right) \bmod 2\pi \quad (39)$$
$$k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (40)$$
$$M_0 + \frac{2\pi}{T}(t - t_e) = E - e \sin(E) \quad (41)$$

El término de la izquierda de la ecuación (41) corresponde a la anomalía media del satélite M , siendo M_0 su valor en un instante de referencia t_e y T el periodo de revolución del satélite. La anomalía excéntrica E es una función periódica de periodo T . El método consiste en modelar E como una variable aleatoria y medir la probabilidad $P(E \in \Delta)$ por la fracción del periodo T durante la cual $E(t)$ toma valores en el intervalo Δ . Ello es equivalente a considerar en la ecuación (41) que t es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, T)$. Esta hipótesis establece una correspondencia entre porcentaje de tiempo y probabilidad, garantizando que los resultados obtenidos con el método analítico corresponden a los que se lograrían mediante métodos de simulación temporales con un tiempo de simulación infinito. A partir de estas hipótesis y de la relación indicada en la ecuación (41) es posible determinar la función de densidad de probabilidad de E que, para E definida módulo 2π , viene dada por:

$$p_E(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1 - e \cos(\varepsilon)}{2\pi} & \text{para } -\pi < \varepsilon \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (42)$$

De la misma forma, utilizando la ecuación (42) y la relación en la ecuación (39), se obtuvo la función de densidad de probabilidad de γ que viene dada por:

$$p_\gamma(\Gamma) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{2\pi} \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Gamma - \omega}{2}\right)}{k^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Gamma - \omega}{2}\right)} \right]^2 & \text{para } -\pi < \Gamma \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (43)$$

Para determinar $p_x(\Phi, \Theta)$ es necesario considerar la posición del satélite en un sistema de referencia geoestacionario, como se ilustra en la Fig. 14 donde el satélite está situado en la posición P con una latitud θ y longitud φ que vienen dadas por:

$$\varphi = (\varphi_s + \Omega_g) \text{MOD } 2\pi \quad (44)$$

siendo φ_s la variación de la longitud debida al desplazamiento angular γ y Ω_g la longitud de la línea de nodos, que varía con el movimiento de rotación de la Tierra y con la regresión nodal del nodo ascendente. La longitud de la línea de nodos Ω_g puede expresarse de la forma siguiente:

$$\Omega_g = (\Omega_0 + (\Omega_e + \Omega_r)t) \text{MOD } 2\pi \quad (45)$$

siendo Ω_0 la longitud de la línea de nodos en el instante inicial y Ω_e y Ω_r , respectivamente, la velocidad angular de la Tierra y la regresión angular del nodo ascendente. Considerando que ambas velocidades angulares, Ω_e y Ω_r , son constantes, la longitud Ω_g puede modelarse adecuadamente como una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Para expresar φ_s y θ en función de γ , considérese la geometría de la Fig. 14, a partir de la cual es fácil observar que:

$$\overline{OP} \sin(\theta) = \overline{OP} \sin(\gamma) \sin(\delta) \quad (46)$$

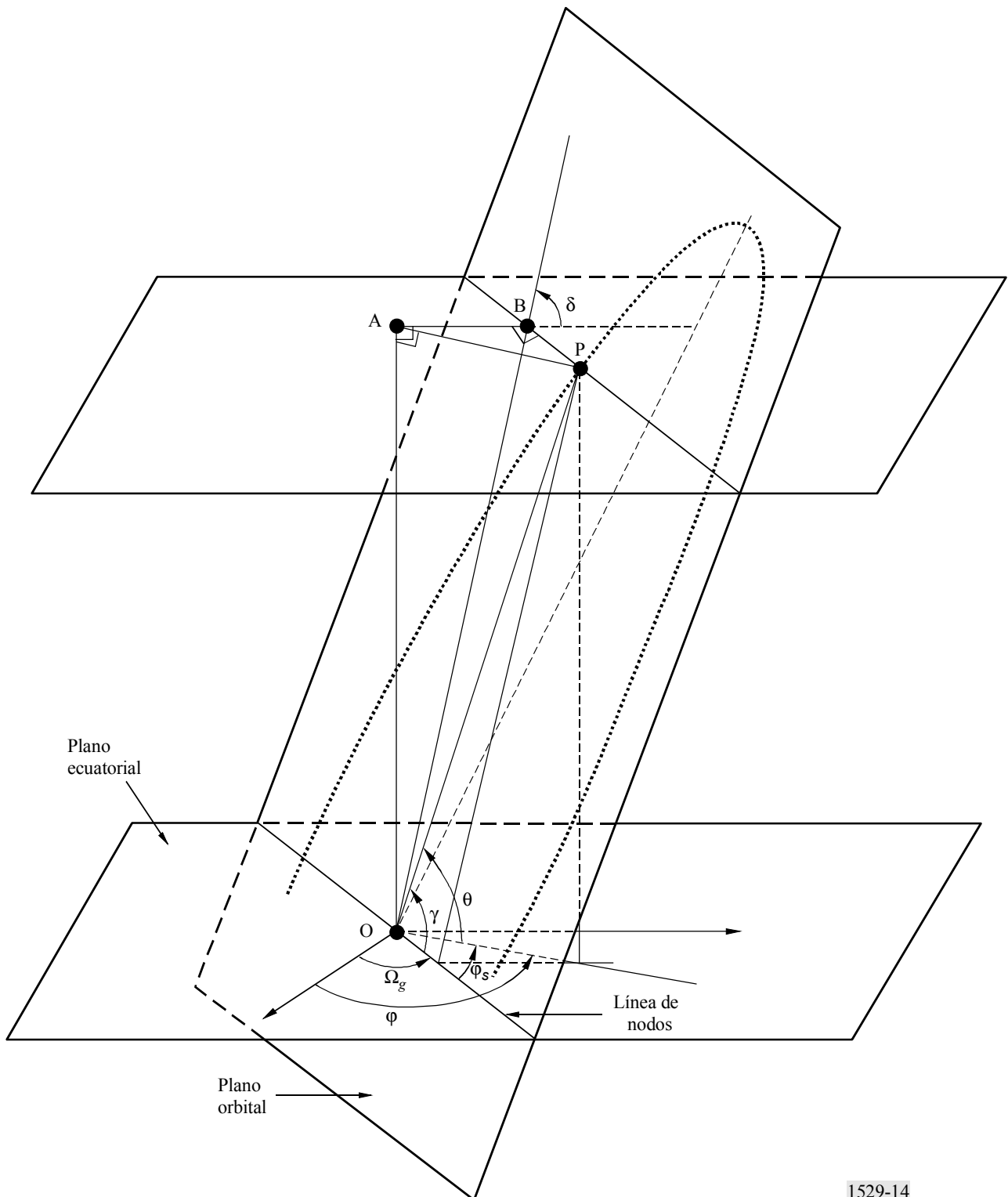
$$\overline{OP} \cos(\gamma) = \overline{OP} \cos(\theta) \cos(\varphi_s) \quad (47)$$

o

$$\sin(\theta) = \sin(\gamma) \sin(\delta) \quad (48)$$

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\varphi_s) \quad (49)$$

FIGURA 14
Geometría del problema



A partir de la ecuación (48), se obtiene:

$$\theta = \arcsen(\sen \delta \sen \gamma) = f_1(\gamma) \quad (50)$$

y de la ecuación (49), teniendo en cuenta la ecuación (50) se obtiene,

$$\phi_s = \arccos\left[\frac{\cos \gamma}{\cos(f_1(\gamma))}\right] \text{sgn}(\gamma) = f_2(\gamma) \quad (51)$$

siendo $\text{sgn}(\)$ la función Signo que se incluyó para ampliar la validez de la igualdad a la gama $\gamma \in (-\pi, \pi)$.

Además, considerando las ecuaciones (44) y (51), se obtiene:

$$\phi = (\phi_s + \Omega_g) \text{MOD } 2\pi = (f_2(\gamma) + \Omega_g) \text{MOD } 2\pi \quad (52)$$

Suponiendo que la longitud de la línea de nodos Ω_g y el desplazamiento angular γ son variables aleatorias estadísticamente independientes y dado que Ω_g está distribuida uniformemente en $(-\pi, \pi)$, puede demostrarse que la variable aleatoria ϕ también está distribuida uniformemente en $(-\pi, \pi)$ para cualquier valor de γ , es decir:

$$p_{\phi|\gamma=\Gamma}(\Phi) = p_{\phi}(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{para } -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (53)$$

Obsérvese que como ϕ es estadísticamente independiente de γ , también es estadísticamente independiente de $\theta = f_1(\gamma)$. Por consiguiente, la fdp de la posición $\mathbf{x}$ del satélite no OSG puede expresarse de la forma siguiente:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\phi}(\Phi) p_{\theta}(\Theta) \quad (54)$$

La función de densidad de probabilidad $p_{\theta}(\Theta)$ de la latitud Θ , puede obtenerse utilizando la ecuación (50) y considerando que $p_{\gamma}(\Gamma)$ viene dado por la ecuación (43). Se obtiene entonces:

$$p_{\theta}(\Theta) = p_{\theta|AM}(\Theta)P(AM) + p_{\theta|DM}(\Theta)P(DM) \quad (55)$$

donde $p_{\theta|AM}(\Theta)$ y $p_{\theta|DM}(\Theta)$ son las funciones de densidad de probabilidad de la latitud del satélite en modo ascendente y modo descendente, respectivamente. Estas funciones de densidad de probabilidad condicional vienen dadas por:

$$p_{\theta|AM}(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sen^2 \delta - \sen^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sen \delta}{(1+k^2) \sen \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (56)$$

y

$$p_{\theta|DM}(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sen^2 \delta - \sen^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sen \delta}{(1+k^2) \sen \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (57)$$

siendo $P(AM)$ y $P(DM)$ la probabilidad de que el satélite esté en modo ascendente y en modo descendente, respectivamente, que vienen dadas por:

$$P(AM) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 d\Theta \quad (58)$$

y

$$P(DM) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 d\Theta \quad (59)$$

Si se realizan las integrales de las fórmulas (58) y (59), se obtiene:

$$P(AM) = h(\omega) - h(-\omega) \quad (60)$$

$$P(DM) = h(\pi - \omega) - h(-\pi + \omega) \quad (61)$$

siendo:

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\alpha(\omega)}{k}\right) - \frac{ke}{\pi} \left(\frac{\alpha(\omega)}{\alpha^2(\omega) + k^2} \right) + \frac{1 + \operatorname{sgn}(\omega - \pi/2)}{2} \quad (62)$$

con:

$$\alpha(\omega) = \frac{1 - \sin \omega}{\cos \omega} \quad (63)$$

En las ecuaciones (57) a (59),

$$g(\Theta) = \cos \omega \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta} + \sin \omega \sin \Theta \quad (64)$$

y k viene dado por la ecuación (40).

Finalmente, a partir de las fórmulas (54), (53) y (55) a (59), se obtiene:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)P(AM) + p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)P(DM) \quad (65)$$

siendo $p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)$ y $p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)$ las funciones de densidad de probabilidad de la posición del satélite (longitud y latitud) en modo ascendente y en modo descendente, respectivamente. Estas funciones de densidad de probabilidad condicional vienen dadas por:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (66)$$

et

$$p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (67)$$

Alternativamente, la fórmula (65) puede escribirse de la siguiente forma:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right)^2 + \left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right)^2 \right] & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (68)$$

En el caso particular de órbitas circulares ($e = 0 \rightarrow k = 1$), las ecuaciones (66) y (67) se reducen a:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{para } -\delta < \Theta \leq \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (69)$$

Obsérvese que para la obtención de la ecuación (69) se consideró que:

$$P(AM) = P(DM) = \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos(\Theta)}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{para } -\delta < \Theta < \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (70)$$

Las ecuaciones (68) y (70) pueden utilizarse, por ejemplo, para determinar la probabilidad de que un satélite se encuentre en una región determinada del espacio.

También se obtienen funciones de densidad de probabilidad como la que aparece en el ejemplo de la Fig. 2.