国　　际　　电　　信　　联　　盟

ITU-R

国际电联无线电通信部门

ITU-R P.1057-4 建议书
(07/2015)

与无线电波传播建模相关的概率分布

P 系列
无线电波传播

国际电信联盟

前言

无线电通信部门的职责是确保卫星业务等所有无线电通信业务合理、平等、有效、经济地使用无线电频谱，不受频率范围限制地开展研究并在此基础上通过建议书。

无线电通信部门的规则和政策职能由世界或区域无线电通信大会以及无线电通信全会在研究组的支持下履行。

知识产权政策（IPR）

ITU-R的IPR政策述于ITU-R第1号决议的附件1中所参引的《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策》。专利持有人用于提交专利声明和许可声明的表格可从http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en获得，在此处也可获取《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策实施指南》和ITU-R专利信息数据库。

ITU-R 系列建议书

（也可在线查询 **http://www.itu.int/publ/R-REC/en**）

系列	标题
BO	卫星传送
BR	用于制作、存档和播出的录制；电视电影
BS	广播业务（声音）
BT	广播业务（电视）
F	固定业务
M	移动、无线电定位、业余和相关卫星业务
P	无线电波传播
RA	射电天文
RS	遥感系统
S	卫星固定业务
SA	空间应用和气象
SF	卫星固定业务和固定业务系统间的频率共用和协调
SM	频谱管理
SNG	卫星新闻采集
TF	时间信号和频率标准发射
V	词汇和相关问题

说明：该ITU-R建议书的英文版本根据ITU-R第1号决议详述的程序予以批准。

电子出版
2016年，日内瓦

ITU-R P.1057-4 建议书

与无线电波传播建模相关的概率分布

（1994-2001-2007-2013-2015年）

范围

本建议书描述与无线电传播建模和预测有关的各种概率分布。

国际电联无线电通信全会，

考虑到

a) 无线电波的传播主要涉及随机媒介，因此有必要通过统计方法分析传播现象；

b) 在大多数情况下，有可能通过已知的统计分布，对各种传播参数的时间与空间变化作出满意地描述；

c) 因此至关重要的是了解统计传播研究中应用最为普遍的概率分布基本属性，

建议

1 附件1中提供的与传播建模相关的统计信息须用于无线电通信业务的规划和系统性能参数的预测。

2 应使用附件2中提供的分步程序，通过对数正态余补累积分布模拟余补累积分布。

附件 1

与无线电波传播建模相关的概率分布

1 引言

经验表明，仅有接收信号平均值方面的资料不足以描述无线电通信系统的性能。时间、空间和频率的变化亦应考虑在内。

有用信号和干扰的动态表现，在分析系统可靠性和选择调制类型等系统参数时，发挥着决定性作用。最为关键的是要了解信号波动的范围与速率，以便能够规定调制类型、发射功率、干扰保护比、分集措施、编码方法等参数。

描述通信系统的性能，一般通过观察信号波动的时间序列并将信号波动视为随机过程即可。但为预测无线电系统的性能而为信号波动建模，则还要了解无线电波与大气（中性大气层和电离层）之间的互动机制。

大气组成和物理状态的时空变化非常快。因此，波互动建模，需大量使用统计方法来定义各类物理参数，描述大气及定义信号表现的电参数，以及建立参数间关系的互动流程。

下文提供了最重要的、有关概述分布的一些总体信息。这些信息为无线电通信研究组建议书使用的各种传播预测统计方法，提供了共同的背景。

2 概率分布

随机流程一般使用概率密度函数或余补累积分布函数描述。概率密度函数，在此用$p(x)$表示变量x，在无穷区间x与$x + dx$间，x的概率为$p(x)\,dx$。余补累积分布函数，用$F(x)$ 表示，它给出了变量值小于x时的概率，即两函数间的关系如下：

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

或

$$F(x) = \int_{c}^{x} p(t)\ \mathrm{d}t$$

式中

c 是*t* 可取的最小值。

下述分布是最重要的：

– 正态或高斯分布；
– 对数正态分布；
– 瑞利分布；
– 对数正态和瑞利分布的组合；
– Nakagami-Rice分布（Nakagami *n*分布）；
– 伽玛分布和指数分布；
– Nakagami *m*分布；
– 皮尔森 χ^2分布。

3 正态分布

此分布适用于任何征候的连续变量。概率密度的类型为：

$$p(x) = \mathrm{e}^{-T(x)} \tag{1}$$

$T(x)$为非负二阶多项式。如果使用平均值m和标准方差σ，则$p(x)$可写为普通形式：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

因此：

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3}$$

且：

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

图1中的实线代表函数$p(x)$和$F(x)$，m等于零，σ等于单一。相同条件下余补累积正态分布$F(x)$通常在表中使用简短的形式。表1给出了一系列x或$F(x)$取整值的x与$F(x)$间关系。

表 1

x	**1 – *F*(*x*)**	***x***	**1 – *F*(*x*)**
0	0.5	1.282	10^{-1}
1	0.1587	2.326	10^{-2}
2	0.02275	3.090	10^{-3}
3	1.350×10^{-3}	3.719	10^{-4}
4	3.167×10^{-5}	4.265	10^{-5}
5	2.867×10^{-7}	4.753	10^{-6}
6	9.866×10^{-10}	5.199	10^{-7}
		5.612	10^{-8}

为了实际计算，$F(x)$可用模拟函数表示，例如下式对正数x有效，且相对误差小于2.8×10^{-3}：

$$1 - F(x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}\left(0.661\,x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}\right)} \tag{5}$$

正态分布主要出现在大量随机原因的累积效应对某一参量的数值产生影响的情况下，且这些随机原因中的每一个重要性均不高。

在传播过程中涉及的大部分物理参量（功率、电压、衰减时间等）基本上都是正数参量，因此不能直接使用正态分布表示。另一方面，此分布在两类重要情况下使用：

– 表示参量在其平均值附近波动（闪烁）；

– 表示某参量的对数。这样我们便可得到下文中研究的对数正态分布。

存在一个所谓正态坐标的图示已经上市，即在此分类中的正态分布用直线表示。基至对于非正态分布的表达，也经常使用这些图示。

4 对数正态分布

此分布为对数存在正态分布的正数变量分布。因此，可直接写出概率密度和余补累积密度：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{7}$$

但是，在这些关系中，m和σ 并非变量 x的平均和标准方差，而是此变量对数的平均和标准方差。

对数正态分布经常与传播相连，主要是针对与功率、场强电平或时间相关的参量。功率或场强电平通常仅用分贝表示，这样有时对对数正态分布的参考不过是正态分布参考。不建议如此使用。对时间而言（例如衰减时长），由于自然变量为秒或分而不是其对数，所以可永远明确地使用对数正态分布。

由于对数正态分布变量的倒数也呈对数正态分布，此分布有时会出现在各类降雨率（时间的倒数）中。例如，它可被用于表示降雨率分布。

与正态分布相比，可认为对数正态分布是指变量值，这些变量数值由众多做为个体来讲重要性不大，但会产生放大效应的原因构成。

如果从数字方面考虑，对数正态分布极不对称，与正态分布完全不同。特别是平均值、中值和最可能值（称作模式）均不相同（见图1中的虚线）。

数字变量x的特性数量为：

– 最可能值： $\exp\,(m - \sigma^2)$；

– 中值： $\exp\,(m)$；

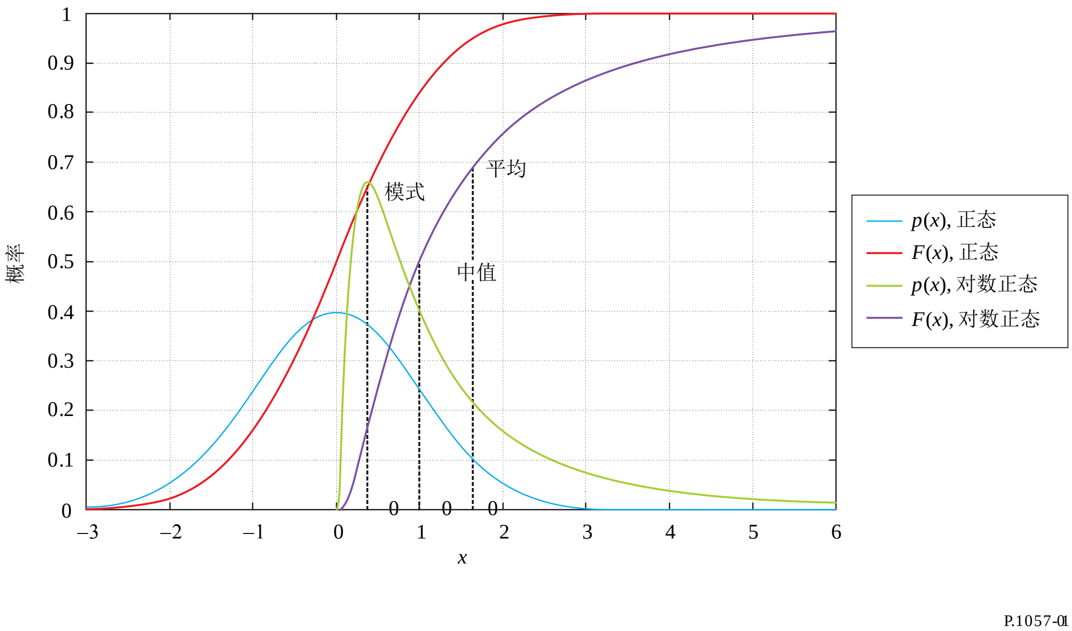
– 平均值： $\exp\left(m + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$；

– 平方根值： $\exp\,(m + \sigma^2)$；

– 标准偏差： $\exp\left(m + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\,(\sigma^2) - 1}$ 。

图1

正态和对数正态分布



5 瑞利分布

瑞利分布适用于正连续变量，与正态分布的关连如下。呈零平均值的两独立变量y和z的二维正态分布，且标准方差σ 相同的情况下，随机变量

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

表现为瑞利分布。x的最或然值为σ。瑞利分布表示某矢量长度的分布，该矢量为大量类似振幅且相位均匀分布的矢量之和。

概率密度和余补累积分布的公式为：

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

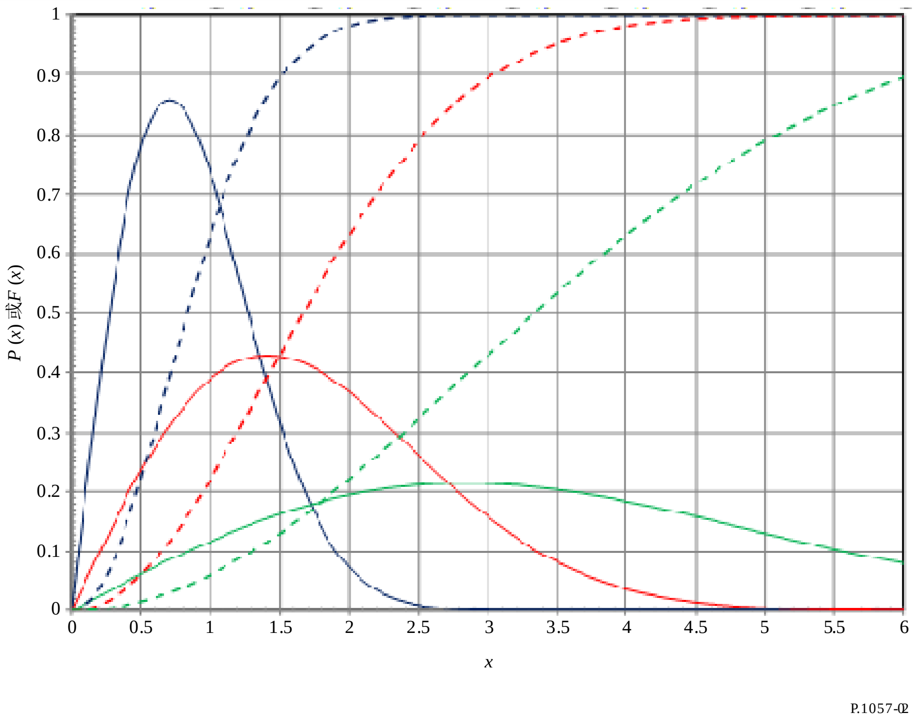
$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

图2给出三种不同b值得函数$p(x)$和$F(x)$的示例。

图2

瑞利分布

三种不同b值：蓝 $b = 1$；红 $b = 2$；绿 $b = 4$的函数，
$p(x)$ 以实线表示，$F(x)$ 以虚线表示



各类变量的特征值如下：

– 最或然值： $\frac{b}{\sqrt{2}}$；

– 中值： $b\sqrt{\ln 2} = 0.833b$；

– 平均值： $\frac{b}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.886b$；

– 平方根值： b；

– 标准方差： $b\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} = 0.463b$。

瑞利分布通常仅在源头，即在x的较小值，附近使用。在这种情况下：

$$F(x) \approx \frac{x^2}{b^2} \tag{11}$$

此公式可理解为：随机变量X的值小于x的概率与该值的平方成正比。如果该变量为电压，则其平方表示信号的功率。换言之，以分贝为单位，每出现十种概率功率会下降

10 dB。此属性通常被用于查找接收电平是否至少呈渐近性的瑞利分布。但应注意到，其它分布可能会有相同的表现。

瑞利分布特别会在无主宰散射分量的独立和任意地点上的散射物造成的散射中出现。

脚注：$b = \sigma.\sqrt{2}$

6 对数正态分布和瑞利分布的组合

在某些情况下，随机变量的分布可视为两种分布，即长期变量对数正态分布和短期变量瑞利分布的组合。瞬时值的分布可通过考虑瑞利变量值来获取，其中变量平均值（平均平方值）本身为具备对数正态分布的随机值变量。

对数正态分布和瑞利分布组合的概率密度函数为：

$$\mathrm{p}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -kx^2 \exp\left[-2(\sigma u + m) \right] - 2(\sigma u + m_l) - \frac{u^2}{2} \right\} \mathrm{d}\,u \tag{12}$$

对数正态分布和瑞利分布组合的累积分布为：

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{ -kx^2 exp[-2(\sigma u + m)] - \frac{u^2}{2} \right\} \tag{13}$$

其中m和σ用来指定正态分布的平均值和标准方差。

k的值取决于对σ和m的解释。

1) 如果σ和m是最可能的瑞利分布值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k = 1/2$；

2) 如果σ和m是瑞利分布中值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k = \ln 2$；

3) 如果σ和m是瑞利分布平均值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k = \pi/4$；

4) 如果σ和m是瑞利分布均方根值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k = 1$。

瑞利对数正态分布组合的平均值、均方根、标准方差、中值和最可能的值是：

平均值*E*：

$$\boldsymbol{E} = \int_0^\infty x\sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\left[\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-kx^2[-2(\sigma u+m)]-2(\sigma u+m)-\frac{u^2}{2}\right\}du\right]dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

均方根值*RMS*：

$$RMS = \sqrt{\int_0^\infty x^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\left[\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-kx^2 exp[-2(\sigma u+m)]-2(\sigma u+m)-\frac{u^2}{2}\right\}du\right]dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\exp(m+\sigma^2)$$

标准方差*SD*：

$$SD = \sqrt{\frac{1}{k}exp[2(m+\sigma^2)]-\frac{\pi}{4k}exp\left[2\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{exp(\sigma^2)-\frac{\pi}{4}}$$

中值：

中值是下列方程式的解x的值：

$$\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-kx^2 exp[-2(\sigma u+m)] = \frac{u^2}{2}\right\}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-kx^2 exp[-2(\sigma u+m)]-\frac{u^2}{2}\right\}du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

最可能的值：

最可能的值（即众数）是下列方程式的解x的值：

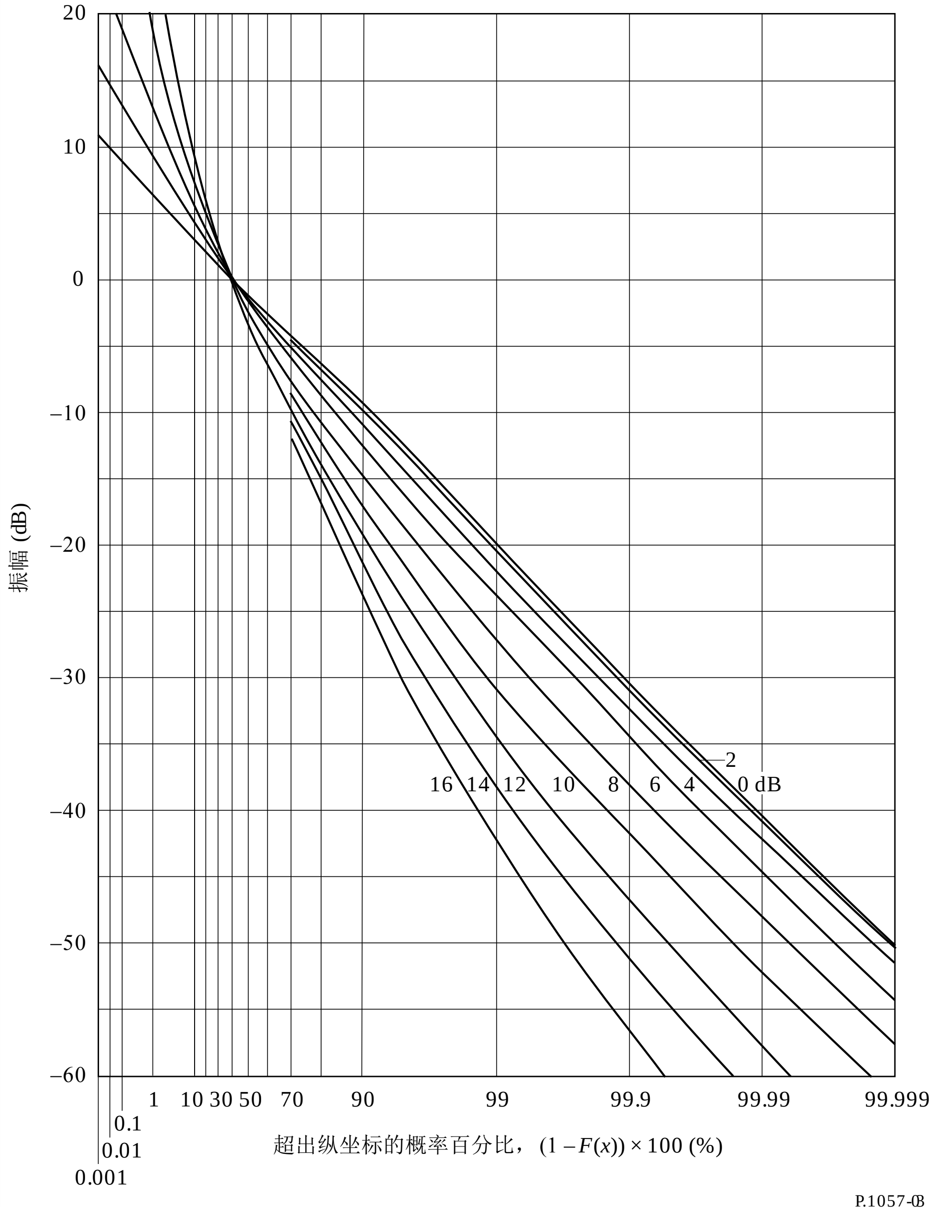
$$\int_{-\infty}^{\infty}\{1-2kx^2\exp[-2(\sigma u+m)]\}\exp\left\{-kx^2\exp[-2(\sigma u+m)]-2(\sigma u+m)-\frac{u^2}{2}\right\}\mathrm{d}u = 0$$

图3中的图表显示了一系列标准方差值的分布，其中m的值为零。

此分布主要出现非均匀媒介传播中，此时后者的特性中具有不可忽略的长期变量，例如：对流层散射的情况。

图3

正态分布和瑞利分布的组合
（将对数正态分布的标准方差作为参数）



7 Nakagami-Rice分布（Nakagami n分布）（见注1）

注 1 – 勿与Nakagami *m*分布混淆。

Nakagami-Rice分布亦源于正态分布，是对瑞利分布的概括。可将其看作是矢量长度的分布，其中所述矢量为固定矢量之和且其长度呈瑞利分布。

或者，在具有两个独立变量*x*和*y*且使用相同标准方差σ的二维正态分布中，与此分布中心外一固定点分布相交的矢量长度，将呈Nakagami-Rice分布。

如果 *a* 用于指定固定矢量的长度，且σ为瑞利矢量的最或然长度，则概率密度公式为：

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

式中I_0为经修订的第一类零阶贝塞尔函数（Bessel functions）。

此分布取决于两种参数，但为处理传播问题，有必要选择固定矢量振幅a与随机矢量平方根振幅$\sigma\sqrt{2}$之间的关系。此关系取决于拟采用的应用种类。两类主要应用如下：

a) 固定矢量的功率为常数，但固定和随机分量的总功率不同

研究粗糙表面光反射的影响，或考虑固定分量外的多径分量时，平均功率的计算使用：$(a^2 + 2\sigma^2)$。该分布通常使用K定义：

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{dB} \tag{15}$$

即，固定矢量功率与随机分量之比。

b) 固定和随机分量的总功率为常数，但两个分量会发生变化

为研究大气中的多径传播问题，可认为固定矢量功率之和及随机矢量的平均功率为常数，因为随机矢量所载功率源来自固定矢量的功率。如果总功率为单一，则一有：

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1 \tag{16}$$

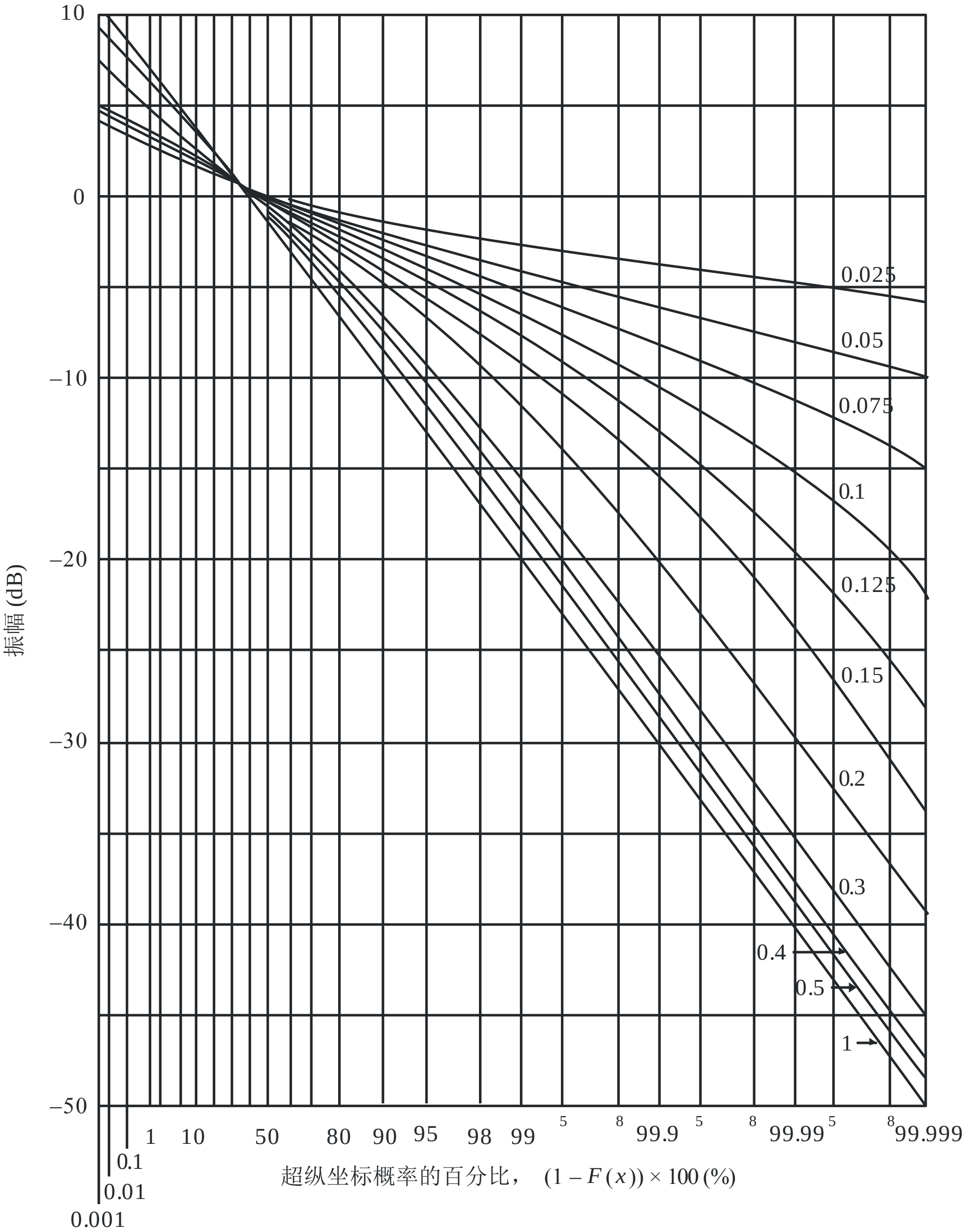
且随机矢量承载的那部分功率等于$2\,\sigma^2$。如果X用于指定合成矢量的瞬时振幅，且x为此振幅的数值，则瞬时电平大于x的概率使用下述公式计算：

$$\text{Prob}\,(X > x) = 1 - F(x) = 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \tag{17}$$

图4所示为随机矢量承载的不同功率值的分布情况。

图4

恒定总功率的Nakagami-Rice分布
（随机矢量所载功率为参数）



为方便实际应用，振幅使用分贝计量，概率的计量方式应使瑞利分布可用直线表示。可以看出，当随机矢量功率值大于0.5时，曲线接近的限值呈瑞利分布。其原因在于，在这种情况下，固定矢量的振幅与随机矢量的振幅同阶，基本无法区分。另外，图中显示该部分内小值的振幅分布倾向于正态分布。

虽然振幅具有Nakagami-Rice分布，但相位概率密度函数为：

$$p(\theta)=\frac{1}{2\pi}\left\{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos\theta}{\sigma}e^{\frac{a^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\left[1+erf\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\right\}\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

其中：

$$erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt \tag{19}$$

8 伽玛分布和指数分布

与此前源于高斯分布的各种分布不同，伽玛分布基于指数分布，是对指数分布的概括。此分布适用于正非限定性变量。概率密度为：

$$p(x)=\frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{20}$$

式中Γ为二阶尤拉函数（Euler's Function）。

此分布取决于两个参数α和ν。但α仅是变量x的计量参数。变量的特征值如下：

– 平均值： $\dfrac{\nu}{\alpha}$

– 平方根值： $\dfrac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– 标准方差： $\dfrac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

表达余补累积分布的整数无法用闭式评估，但ν的整数值除外。相反，可使用下述扩展表达式：

$x<<1$的极数逼近：

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha\,x)^{\nu}\left[1+\frac{\alpha\,x}{\nu+1}+\frac{(\alpha\,x)^2}{(\nu+1)\,(\nu+2)}+....\right] \tag{21}$$

$x>>1$的渐近逼近：

$$1-F(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha\,x)^{\nu-1}\left[1+\frac{\nu-1}{\alpha\,x}+\frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{(\alpha\,x)^2}+....\right] \tag{22}$$

ν等于1的情况，为指数分配。对于整数ν，渐进扩展的项数是固定的，且明确的给出了伽玛分布。

传播中，ν的有用值为1×10^{-2} 至1×10^{-4}阶中的很小值。零附近ν值的计算公式如下：

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu \tag{23}$$

因此，可将ν写为小值，而$\alpha\, x$的值不太小：

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \tag{24}$$

实际计算时，可找到与上述整数近似的值，例如下述数值：

$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0.68 + \alpha\, x + 0.28 \log \alpha\, x} \tag{25}$$

在$\nu < 0.1$且$\alpha\, x > 0.03$的范围内有效。

用小ν值补充伽玛函数余补累积分布的情况如图5所示。可以发现，比零大许多的x变量概率总是很小。鉴于降雨时间总百分比通常在2%至10%这一范围内，此现象专门解释了为何要使用伽玛分布表示降雨率。

9 Nakagami *m*分布（见注1）

注 1 – 此节中的m表示Nakagami m分布的一个参数；并非本附件前几节中的平均值。

此分布适用于非限定性正值。概率密度等于：

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\, \Omega^m} x^{2m-1}\, e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{26}$$

Ω为计量参数，为x^2的平均值。

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{27}$$

此分布与上文提到的分布存在着多种关系：

– 如果某变量呈Nakagami m分布，则此变量的平方呈伽玛分布；
– 当$m = 1$时，得到的是瑞利分布；
– 当$m = 1/2$时，得到的是单侧正态分布。

因此可将Nakagami m分布和Nakagami-Rice分布视作对瑞利分布的两种不同概括。应当注意，对于非常低的信号电平，Nakagami m分布的斜率接近取决于参数m的值，而与限值斜率不变的Nakagami-Rice分布不同（每十种概率为10 dB）。图6所示为参数m各值的累积Nakagami m分布。

图5

伽马分布（α = 1, ν ≤ 0.1）

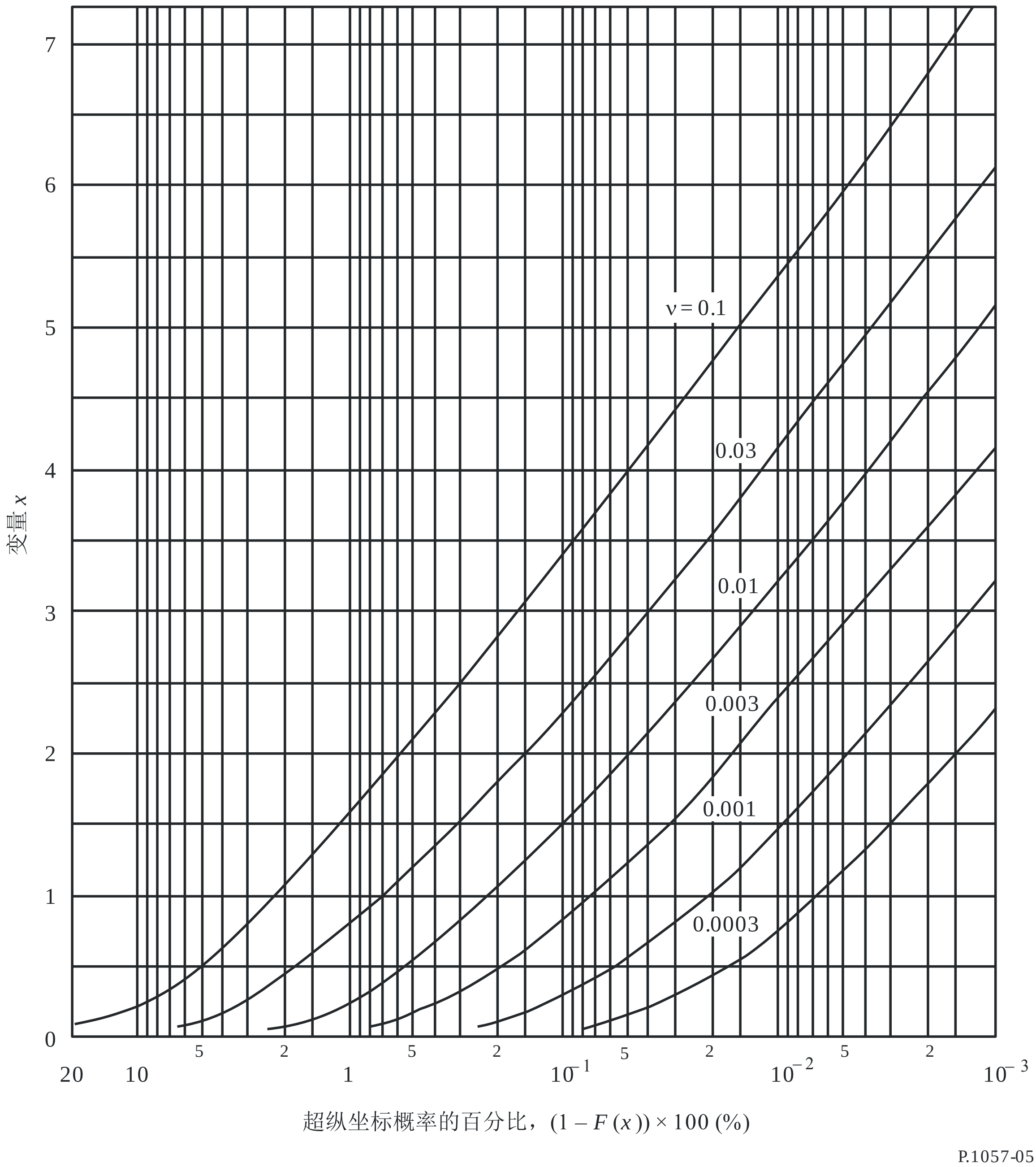
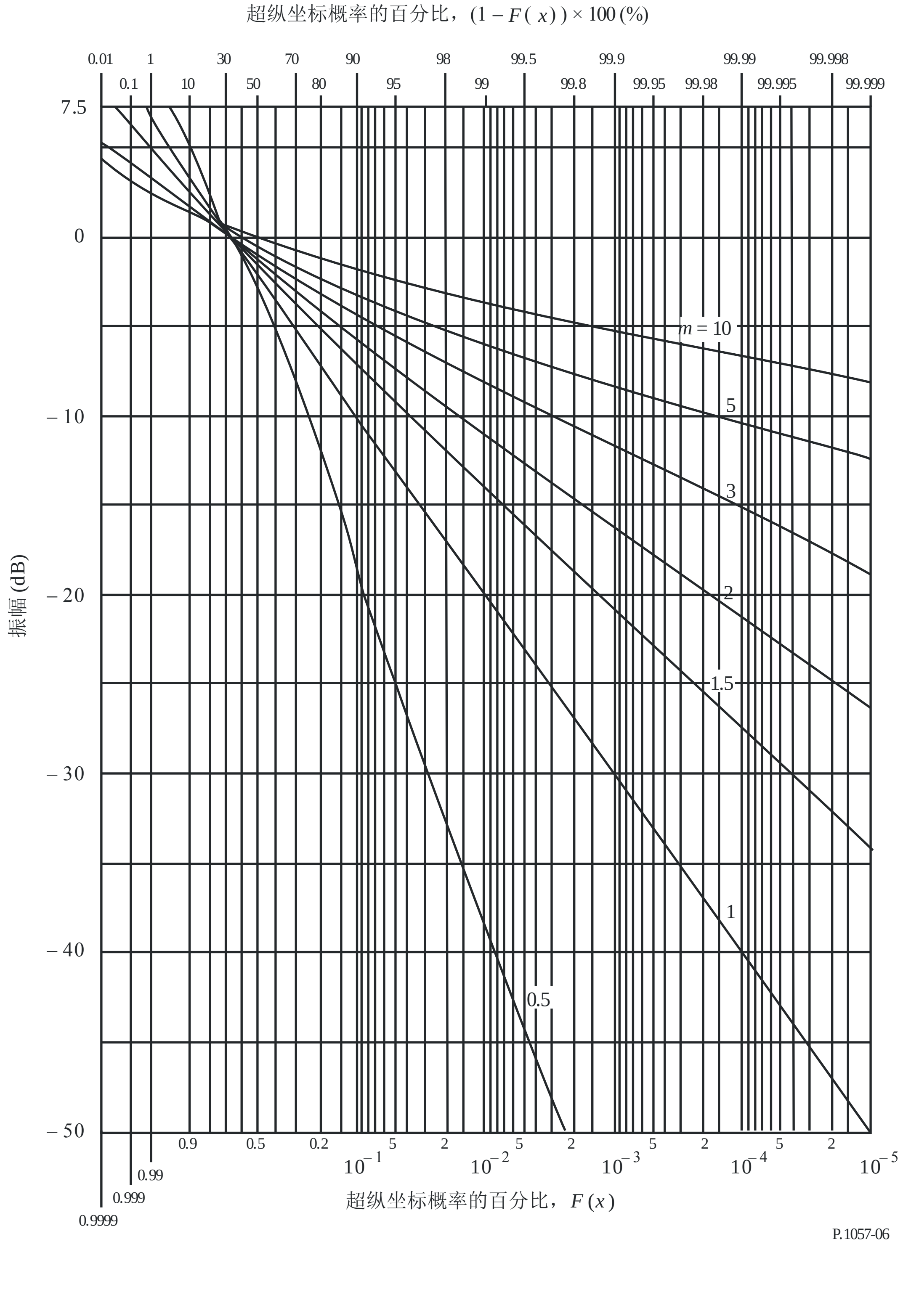


图6

Nakagami-*m* 分布（$\overline{x^2} = 1$）



P.1057-06

10 皮尔森χ^2 分布

通过下式计算概率密度：

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\ e^{\frac{-\chi^2}{2}}\ (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \qquad (28)$$

χ^2为非限定性正变量，且正整数参数ν为分布自由度的度数。Γ表示Euler函数的第二阶。根据ν的奇偶性，可得到：

$$\nu\text{为偶数：}\quad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)! \qquad (29)$$

$$\nu\text{为奇数：}\ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (30)$$

余补累积分布的计算公式为：

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}}\ t^{\frac{\nu}{2}-1}\,\mathrm{d}t \qquad (31)$$

平均和标准方差公式为：

$$m = \nu \qquad (32)$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \qquad (33)$$

χ^2分布的一项基本属性为，当n个x_i变量的平均m_i和标准方差σ_i呈高斯分布时，变量值：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \qquad (34)$$

呈χ^2 分布，自由度的角度为n。具体讲，小高斯变量的平方呈χ^2分布，自由度为1度。

如果若干独立变量呈χ^2分布，则其和亦呈χ^2分布，且自由度的度数等于各变量自由度之和。

χ^2分布与伽玛分布并无本质区别。它们之间的相互转换可使用下述公式：

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha\, x \tag{35}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{36}$$

与之相似，从χ^2分布转换为Nakagami-*m*分布可使用下述公式：

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega}\, x^2 \tag{37}$$

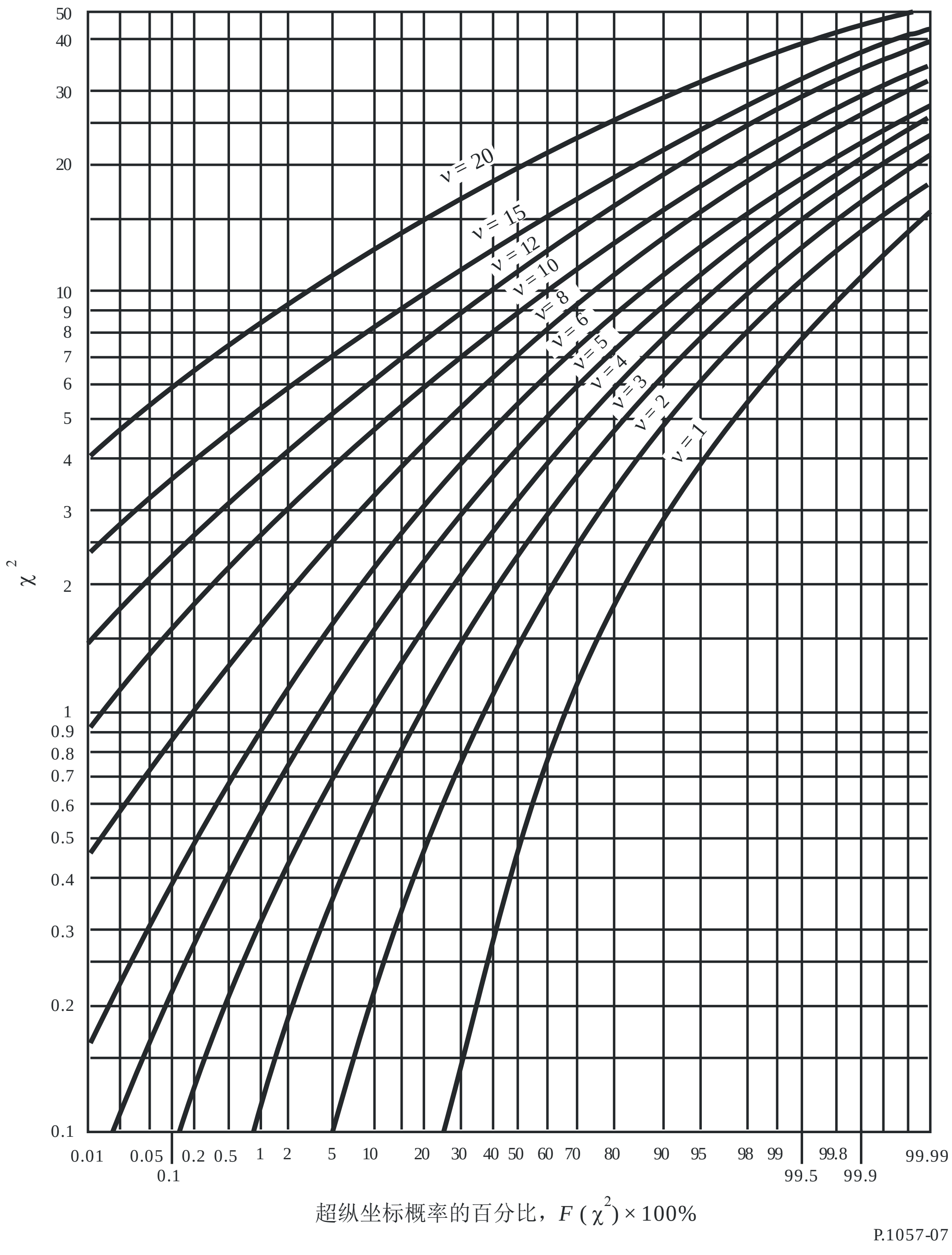
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{38}$$

统计测试中使用χ^2分布来确定某参量（降雨率、衰减等）的一系列试验值是否可通过统计分布建模。

图7为一系列ν值分布的图形表示。

图7

χ^2 分布


50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
χ²
ν = 20
ν = 15
ν = 12
ν = 10
ν = 8
ν = 6
ν = 5
ν = 4
ν = 3
ν = 2
ν = 1
0.01
0.05
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
20
30
40
50
60
70
80
90
95
98
99
99.5
99.8
99.9
99.99
超纵坐标概率的百分比，F (χ²) × 100%
P.1057-07

附件 2

通过对数正态余补累积分布模拟余补累积分布的分步程序

1 背景

对数正态累积分布定义如下：

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{39}$$

或与之等效的：

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t \tag{40}$$

与此类似，对数正态余补累积分布定义如下：

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{41}$$

或与之等效的：

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t = Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) \tag{42}$$

其中$Q(.)$是正态余补累积概率积分。参数m和σ可以从一系列n对(G_i, x_i)中估算得出，如下段所述。

2 步骤

对两个对数正态参数m和σ估算如下：

步骤 1：建立一n 对 (G_i,x_i) 集合，其中G_i 是超过x_i 的概率。

步骤 2：将n对集合从 (G_i,x_i) 转换为 $(Z_i, \ln x_i)$，其中：

$$Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i) \text{ 或与之等效的，} \quad Z_i = Q^{-1}(G_i)$$

步骤 3：通过执行线性方程的最小平方拟合确定变量m 和σ：

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

如下：

$$\sigma = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

____