الاتحـــاد الدولـــي للاتصـــالات

ITU-R

قطاع الاتصالات الراديوية في الاتحاد الدولي للاتصالات

التوصيـــة ITU-R P.1057-3
(2013/09)

التوزيعات الاحتمالية المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

السلسلة P
انتشار الموجات الراديوية

الاتحاد الدولي للاتصالات

تمهيـــد

يضطلع قطاع الاتصالات الراديوية بدور يتمثل في تأمين الترشيد والإنصاف والفعالية والاقتصاد في استعمال طيف الترددات الراديوية في جميع خدمات الاتصالات الراديوية، بما فيها الخدمات الساتلية، وإجراء دراسات دون تحديد لمدى الترددات، تكون أساساً لإعداد التوصيات واعتمادها.

ويؤدي قطاع الاتصالات الراديوية وظائفه التنظيمية والسياساتية من خلال المؤتمرات العالمية والإقليمية للاتصالات الراديوية وجمعيات الاتصالات الراديوية بمساعدة لجان الدراسات.

سياسة قطاع الاتصالات الراديوية بشأن حقوق الملكية الفكرية (IPR)

يرد وصف للسياسة التي يتبعها قطاع الاتصالات الراديوية فيما يتعلق بحقوق الملكية الفكرية في سياسة البراءات المشتركة بين قطاع تقييس الاتصالات وقطاع الاتصالات الراديوية والمنظمة الدولية للتوحيد القياسي واللجنة الكهرتقنية الدولية (ITU-T/ITU-R/ISO/IEC) والمشار إليها في الملحق 1 بالقرار ITU-R 1. وترد الاستمارات التي ينبغي لحاملي البراءات استعمالها لتقديم بيان عن البراءات أو للتصريح عن منح رخص في الموقع الإلكتروني http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en حيث يمكن أيضاً الاطلاع على المبادئ التوجيهية الخاصة بتطبيق سياسة البراءات المشتركة وعلى قاعدة بيانات قطاع الاتصالات الراديوية التي تتضمن معلومات عن البراءات.

سلاسل توصيات قطاع الاتصالات الراديوية

(يمكن الاطلاع عليها أيضاً في الموقع الإلكتروني http://www.itu.int/publ/R-REC/en)

السلسلة	العنـــوان
BO	البث الساتلي
BR	التسجيل من أجل الإنتاج والأرشفة والعرض؛ الأفلام التلفزيونية
BS	الخدمة الإذاعية (الصوتية)
BT	الخدمة الإذاعية (التلفزيونية)
F	الخدمة الثابتة
M	الخدمة المتنقلة وخدمة التحديد الراديوي للموقع وخدمة الهواة والخدمات الساتلية ذات الصلة
P	انتشار الموجات الراديوية
RA	علم الفلك الراديوي
RS	أنظمة الاستشعار عن بُعد
S	الخدمة الثابتة الساتلية
SA	التطبيقات الفضائية والأرصاد الجوية
SF	تقاسم الترددات والتنسيق بين أنظمة الخدمة الثابتة الساتلية والخدمة الثابتة
SM	إدارة الطيف
SNG	التجميع الساتلي للأخبار
TF	إرسالات الترددات المعيارية وإشارات التوقيت
V	المفردات والمواضيع ذات الصلة

ملاحظة: *تمت الموافقة على النسخة الإنكليزية لهذه التوصية الصادرة عن قطاع الاتصالات الراديوية بموجب الإجراء الموضح في القرار ITU-R 1.*

النشر الإلكتروني
جنيف، 2014

التوصيـــة ITU-R P.1057-3

التوزيعات الاحتمالية المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

(2013-2007-2001-1994)

مجال التطبيق

تصف هذه التوصية مختلف التوزيعات الاحتمالية ذات الصلة بنمذجة وتنبؤات انتشار الموجات الراديوية.

إن جمعية الاتصالات الراديوية للاتحاد الدولي للاتصالات،

إذ تضع في اعتبارها

أ) أن انتشار الموجات الراديوية مرتبط أساساً بوسط عشوائي، مما يجعل من الضروري تحليل ظواهر الانتشار باستعمال طرائق إحصائية؛

ب) أن من الممكن، في معظم الحالات، وصف تغيرات معلمات الانتشار في الزمان والمكان وصفاً مرضياً بواسطة توزيعات إحصائية معروفة؛

ج) أن من المهم إذاً معرفة الخصائص الأساسية للتوزيعات الاحتمالية الأكثر استعمالاً في الدراسات الإحصائية للانتشار،

توصي

1 بأنه ينبغي استخدام المعلومات الإحصائية ذات الصلة بنمذجة الانتشار الواردة في الملحق 1 في تخطيط خدمات الاتصالات الراديوية والتنبؤ بمعلمات أداء الأنظمة؛

2 بأنه ينبغي استخدام إجراء خطوة فخطوة الوارد في الملحق 2 من أجل تقريب التوزيع التراكمي التكميلي بواسطة توزيع تراكمي تكميلي لوغاريتمي طبيعي؛

الملحق 1

التوزيعات الاحتمالية المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

1 مقدمة

أظهرت التجربة أن المعلومات عن القيم المتوسطة للإشارات المستقبِلة لا تكفي لتوصيف أداء أنظمة الاتصالات الراديوية. ويجب كذلك أن تُؤخذ في الاعتبار التغيرات في الزمان والمكان والتردد.

ويؤدي السلوك الدينامي للإشارات المطلوبة والإشارات المسببة للتداخل دوراً حاسماً في تحليل موثوقية الأنظمة وفي اختيار معلمات الأنظمة، مثل نمط التشكيل. ومن الضروري معرفة مدى أهمية وسرعة تقلبات الإشارات للتمكن من تحديد معلمات من قبيل نمط التشكيل وقدرة الإرسال ونسبة الحماية من التداخلات وإجراءات التنوع وطريقة التشفير، إلخ.

ولوصف أداء أنظمة الاتصال، يكفي في كثير من الأحيان ملاحظة السلاسل الزمنية لتقلبات الإشارات وتوصيف هذه التقلبات كعملية عشوائية. لكن، غير أن استعمال نمذجة تقلبات الإشارات للتنبؤ بأداء الأنظمة الراديوية يتطلب أيضاً معرفة آليات التفاعل البيني للموجات الراديوية مع الغلاف الجوي (الغلاف الجوي المتعادل والأيونوسفير).

وتتغير تركيبة الغلاف الجوي وحالته المادية كثيراً حسب المكان والزمان. ولذلك تتطلب نمذجة التفاعل البيني للموجات استعمال الطرائق الإحصائية بتوسع لتمييز مختلف المعلمات المادية التي تصف الغلاف الجوي وكذلك المعلمات الكهربائية التي تحدد سلوك الإشارات وعمليات التفاعل البيني التي تربط هذه المعلمات فيما بينها.

وفيما يلي بعض المعلومات العامة عن أهم التوزيعات الاحتمالية. وقد يوفر ذلك خلفية مشتركة للطرائق الإحصائية للتنبؤ بالانتشار المستعملة في توصيات لجان دراسات الاتصالات الراديوية.

2 التوزيع الاحتمالي

غالباً ما توصف العمليات العشوائية إما بدالة الكثافة الاحتمالية أو دالة توزيع تراكمي. وتكون دالة الكثافة الاحتمالية، المشار إليها هنا بالعلامة $p(x)$ للمتغير x، بحيث أن الاحتمال لكي يأخذ المتغير x قيمة في الفاصل المتناهي الصغر بين x و$x + dx$ يكون $p(x)\ dx$. وتعطي دالة التوزيع التراكمية المسماة $F(x)$ احتمال أن يأخذ المتغير قيمة أصغر من x. أي تكون العلاقة بين الدوال كما يلي:

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

أو

$$F(x) = \int_{c}^{x} p(t)\ \ \mathrm{d}t$$

حيث:

c هي الحد الأدنى للقيم التي يمكن أن تأخذها t.

وفيما يلي أهم التوزيعات:

- توزيع طبيعي أو غوسي؛
- توزيع لوغاريتمي طبيعي؛
- توزيع رايلي؛
- توزيع مركب لوغاريتمي طبيعي ورايلي؛
- توزيع ناكاغامي–رايس (توزيع n لناكاغامي)؛
- توزيع غاما وتوزيع أسي؛
- توزيع m لناكاغامي؛
- توزيع χ^2 لبيرسون.

3 التوزيع الطبيعي

ينطبق هذا التوزيع على متغير مستمر بأي إشارة جبرية. تكون كثافة الاحتمال من نمط:

$$p(x) = \mathrm{e}^{-T(x)} \qquad (1)$$

حيث $T(x)$ دالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية غير سالبة. فإذا استعملنا كمعلمات المتوسط m والانحراف المعياري σ، فإن $p(x)$ تُكتب بالطريقة المعتادة التالية:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

وبالتالي:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right] dt = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3}$$

مع:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-t^2}\, dt \tag{4}$$

وتمثل الخطوط المتصلة في الشكل 1 الدالتين $p(x)$ و$F(x)$ حيث m تساوي صفراً وσ تساوي الواحد الصحيح. ويُجدول التوزيع الطبيعي التراكمي $F(x)$ في شكل مختصر لنفس الظروف. ويعطي الجدول 1 التقابل بين x و$F(x)$ لبعض قيم x أو $F(x)$ التقريبية.

الجـــدول 1

x	**1 – F(x)**	**x**	**1 – F(x)**
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1{,}350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3{,}167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2{,}867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9{,}866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

لأغراض الحسابات العملية، يمكن تمثيل $F(x)$ بدوال تقريبية، فمثلاً تعتبر الدالة التالية صالحة لمتغير x موجب مع خطأ نسبي أقل من ($2{,}8 \times 10^{-3}$):

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}\left(0.661\,x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}\right)} \tag{5}$$

ويُصادف التوزيع الطبيعي أساساً عندما تكون قيم المقدار المدروسة ناتجة عن الأثر الإضافي لعدة مسببات عشوائية، كل منها ذات أهمية ضئيلة نسبياً.

وفي الانتشار، تكون معظم الكميات الفيزيائية المأخوذة في الاعتبار (القدرة، فرق الجهد، وقت الخبو، إلخ.) كميات موجبة أساساً، وبالتالي لا يُمكن أن تُمثل مباشرة بتوزيع طبيعي. ومن جانب آخر فإن هذا التوزيع يُستعمل في حالتين مهمتين:

– لتمثيل تقلبات مقدار ما حول قيمته المتوسطة (التلألؤ)؛

– لتمثيل لوغاريتم مقدار ما. عندئذ نحصل على توزيع لوغاريتمي عادي سترد دراسته فيما بعد.

وتتاح تجارياً مخططات يُقال عن إحدى إحداثياتها إنها طبيعية، أي التدريج بحيث يمثل التوزيع الطبيعي بخط مستقيم. ويكثر استعمال هذه المخططات حتى لتمثيل التوزيعات غير الطبيعية.

4 التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

هو توزيع متغير موجب يكون للوغاريتمية توزيع طبيعي. ويمكن إذاً أن نكتب مباشرة دالة كثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي كما يلي:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{7}$$

غير أن m وσ في هاتين المعادلتين هما المتوسط والانحراف المعياري للوغاريتم المتغير x وليس للمتغير x ذاته.

ويرتبط توزيع اللوغاريتم الطبيعي في كثير من الأحيان بالانتشار، وذلك أساساً للمقادير المرتبطة إما بسوية قدرة أو شدة مجال أو بزمن. ولا يعبر عموماً عن سويات القدرة أو شدة المجال إلا بالديسيبل، ولذلك يشار في بعض الأحيان إلى التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي باعتباره مجرد توزيع طبيعي. ولا يوصى بهذا الاستعمال. وفي حالة الزمن (مثلاً فترات الخبو)، يُستعمل دائماً التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي صراحةً لأن المتغير الطبيعي هو الثانية أو الدقيقة وليس لوغاريتمها.

وبما أن مقلوب المتغير الذي له توزيع لوغاريتمي عادي يكون له توزيع لوغاريتمي عادي أيضاً، فإن هذا التوزيع يُصادف في بعض الحالات لمعدلات (القيم المقلوبة للزمن). فعلى سبيل المثال، يُستعمل هذا التوزيع لتمثيل توزيعات معدلات هطول الأمطار.

وبالمقارنة مع التوزيع الطبيعي، يمكن اعتبار أن التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي يعني أن القيم العددية للمتغير ناتجة عن عدة أسباب ذات أهمية مفردة ضئيلة، لكن ذات أثر تضاعفي.

وخلافاً للتوزيع الطبيعي، يكون التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي من حيث القيمة العددية لا تناظرياً إلى أقصى حد. وبوجه خاص فإن متوسط القيمة والقيمة المتوسطة والقيمة الأكثر احتمالاً (التي تُسمى عادة المنوال) ليست متماثلة (انظر الشكل 1).

وتكون الكميات المميزة للمتغير العددي x كما يلي:

– القيمة الأكثر احتمالاً: $\exp(m - \sigma^2)$؛

– القيمة المتوسطة: $\exp(m)$؛

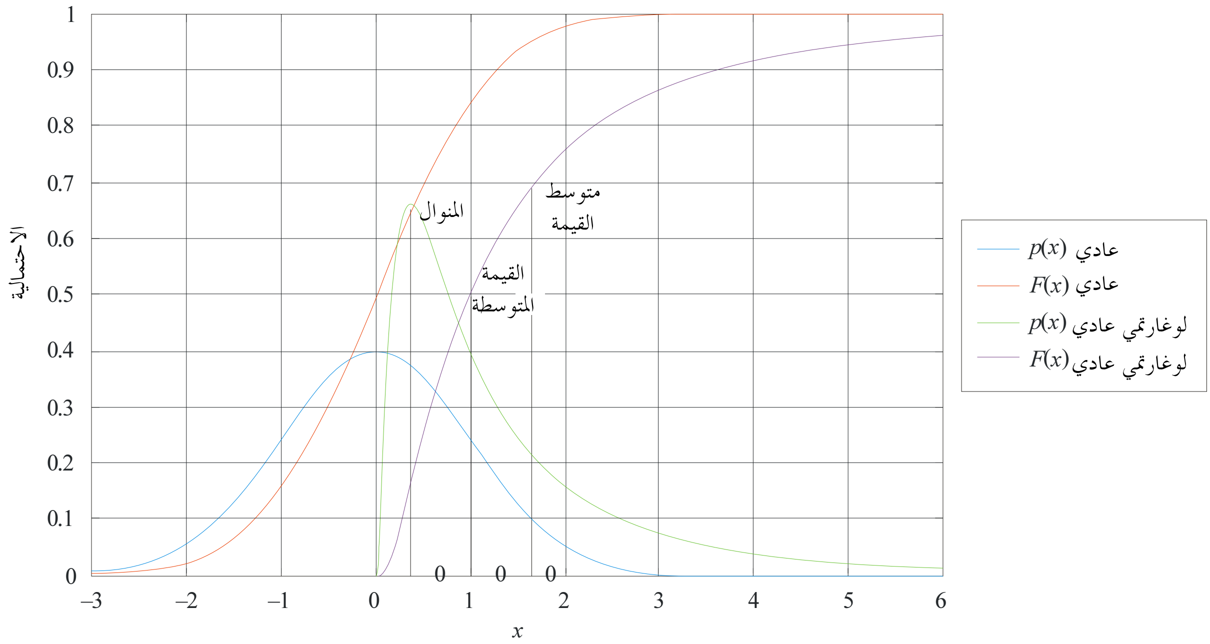
– متوسط القيمة: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$؛

– قيمة جذر متوسط التربيع: $\exp\left(m + \sigma^2\right)$؛

– الانحراف المعياري: $\exp\left(\mathrm{m} + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\left(\sigma^2\right) - 1}$.

الشـــكل 1

التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي



P.1057-01

5 توزيع رايلي

ينطبق توزيع رايلي على متغير مستمر موجب. ويرتبط توزيع رايلي بالتوزيع الطبيعي كما يلي. فعلى اعتبار وجود توزيع طبيعي ثنائي الأبعاد لمتغيرين مستقلين y و z بمتوسط صفر ونفس الانحراف المعياري σ وعلى ذلك يكون المتغير العشوائي x كما يلي:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

ويكون لهذا المتغير العشوائي توزيع رايلي. والقيمة الأكثر احتمالاً للمتغير x تساوي σ. ويمثل توزيع رايلي توزيع طول المتجه الذي هو مجموع عدد كبير من المتجهات المتماثلة الاتساع والتي يكون لأطوارها توزيع منتظم.

وتُعطى دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمي بواسطة:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

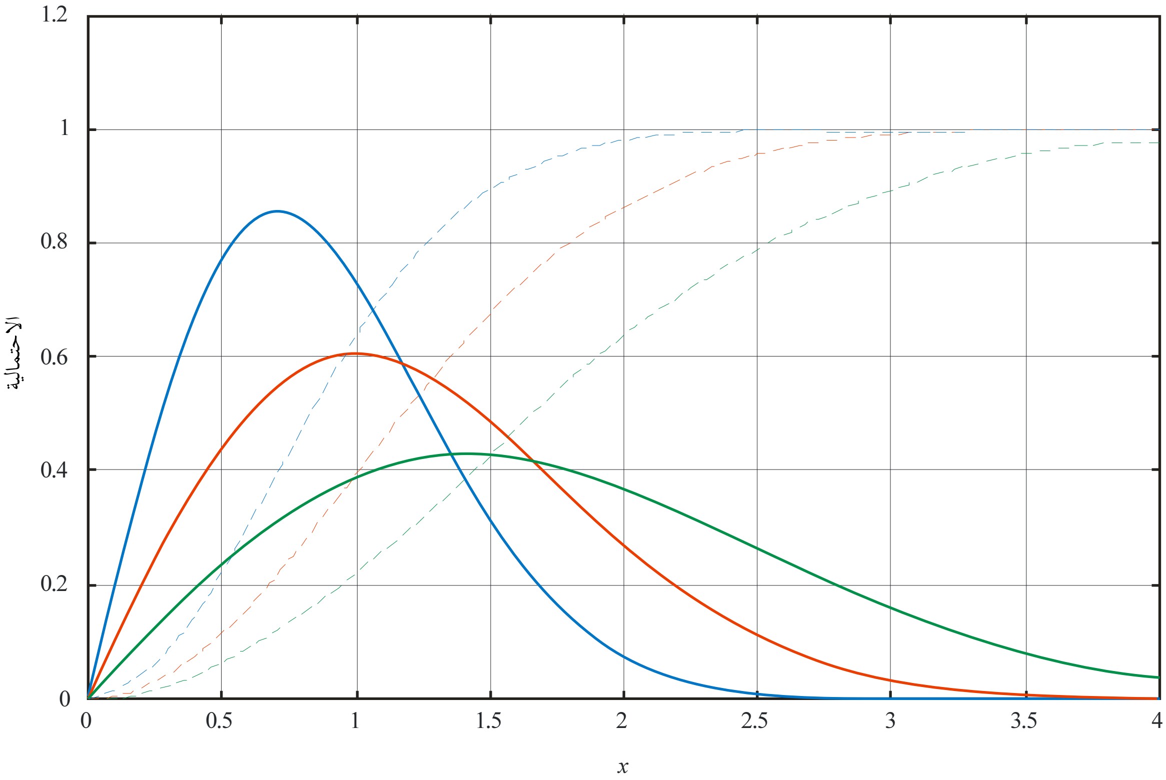
ويعطي الشكل 2 أمثلة لهاتين الدالتين $p(x)$ و $F(x)$ لثلاث قيم مختلفة لـ b.

الشـــكل 2

توزيع رايلي

تظهر $p(x)$ كخطوط متصلة وتظهر $F(x)$ كخطوط متقطعة

لثلاث قيم مختلفة لـ b: b اللون الأزرق=1؛ وb باللون الأحمر = 2، وb باللون الأخضر = 4



P.1057-02

وتتمثل القيم المميزة للمتغير فيما يلي:

- القيمة الأكثر احتمالاً: $\frac{b}{\sqrt{2}}$؛
- القيمة الوسطى: $\frac{b}{2}\ln 2 \approx 0.833b$؛
- متوسط القيمة: $\frac{b}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.886b$؛
- قيمة جذر متوسط التربيع: b؛
- الانحراف المعياري: $b\sqrt{1-\pi/4}\, b\sqrt{1-\pi/4} \approx 0.463b$.

وغالباً ما يُستعمل توزيع رايلي بالقرب من نقطة الأصل، أي لقيم x المنخفضة. وفي هذه الحالة يكون:

$$F(x) \approx \frac{x^2}{b^2} \tag{11}$$

ويمكن تفسير هذه الصيغة على النحو التالي: احتمال أن تكون للمتغير العشوائي X قيمة أصغر من x تتناسب مع مربع هذه القيمة. فإذا كان المتغير المعني عبارة عن فرق جهد، فإن مربعه يمثل قدرة الإشارة. بتعبير آخر، وبمقياس الديسيبل، فإن القدرة تتناقص بقيمة 10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال. غالباً ما تُستعمل هذه الخاصية لمعرفة ما إذا كان لسوية مستقبِلة توزيع رايلي، على الأقل بصورة تقريبية. لكن يجب ملاحظة أن توزيعات أخرى يمكن أن يكون لها نفس السلوك.

ويحدث توزيع رايلي على وجه الخصوص في الانتشار من عوامل انتشار مستقلة عشوائية الموقع لا تهيمن عليها أي مكونات انتشار.

حاشية: $b = \sigma.\sqrt{2}$

6 التوزيع المركب من لوغاريتمي عادي ورايلي

في بعض الحالات، يمكن اعتبار أن توزيع متغير عشوائي ناتج عن تركيب توزيعين، أي توزيع لوغاريتمي عادي للتغيرات على المدى الطويل وتوزيع رايلي للتغيرات على المدى القصير. ويتم الحصول على توزيع القيم اللحظية بافتراض متغير رايلي يكون متوسط قيمته (أو قيمة جذر متوسط التربيع) هو نفسه متغير عشوائي ذو توزيع طبيعي لوغاريتمي.

وإذا تم استعمال m وσ لتسمية المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي المصاحب للتوزيع اللوغاريتمي العادي، فإننا نحصل على التوزيع التالي:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-x^2 \, e^{-2\,\sigma u} - \frac{u^2}{2} \right] du \qquad (12)$$

في هذه المعادلة، يُعبر عن الانحراف المعياري σ بالنيبرات. وإذا استُعملت σ' للإشارة إلى قيمته بالديسيبل، يكون لدينا:

$$\sigma = 0{,}115\ \sigma' \qquad (13)$$

ويبين الشكل 3 تمثيلاً بيانياً لهذا التوزيع لعدد من قيم الانحراف المعياري، حيث m تساوي صفراً.

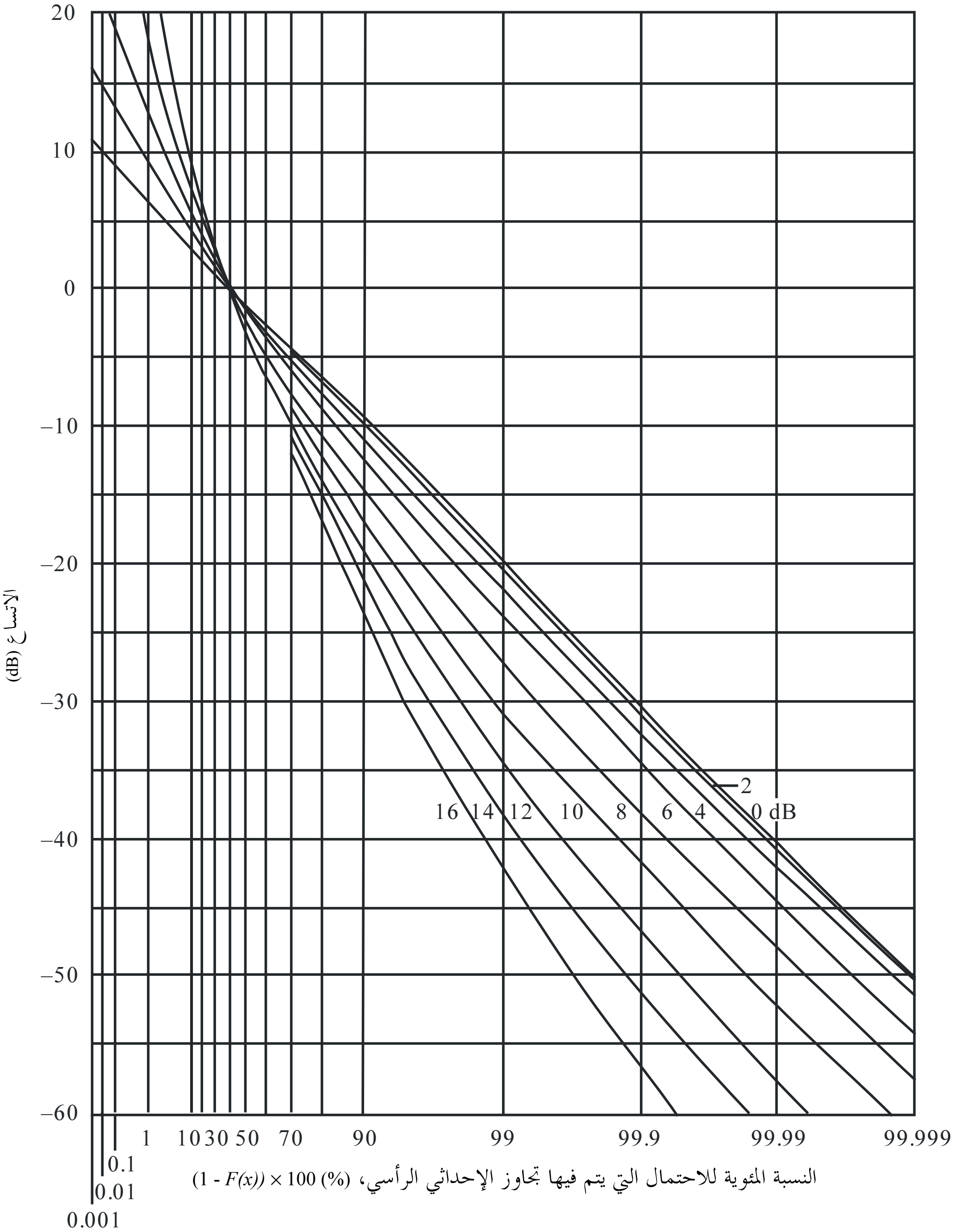
وفيما يلي القيم المميزة للمتغير x:

- القيمة الأكثر احتمالاً للمتغير x: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$؛
- القيمة الوسطى للمتغير x: $\ln(\sqrt{ln2})$؛
- متوسط القيمة للمتغير x: $\ln(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$؛
- قيمة جذر متوسط التربيع للمتغير x: 0؛
- الانحراف المعياري للمتغير x: $\ln\left(\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}\right)$.

ويحدث هذا التوزيع أساساً في الانتشار عبر لا تجانسات الوسط عندما يكون لخصائص هذا الوسط تغيرات لا يُستهان بها على المدى الطويل، كما يحدث في الانتشار التروبوسفيري مثلاً.

الشـــكل 3

التوزيع المركب من توزيع طبيعي لوغاريتمي وتوزيع رايلي (مع اعتبار الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي كمعلمة)



P.1057-0 3

7 توزيع ناكاغامي–رايس (توزيع n لناكاغامي) (انظر الملاحظة 1)

الملاحظـــة 1 – يجب عدم الخلط بين هذا التوزيع وتوزيع m لناكاغامي.

يُشتق توزيع ناكاغامي–رايس كذلك من التوزيع الطبيعي، وهو يعمم توزيع رايلي. ويمكن النظر إلى هذا التوزيع على أنه توزيع لطول متجه عبارة عن مجموع متجه ثابت ومتجه لطوله توزيع رايلي. بمعنى آخر بافتراض وجود توزيع طبيعي ثنائي الأبعاد بمتغيرين مستقلين x وy ولهما نفس الانحراف المعياري σ، فإن طول المتجه الذي يصل بين نقطة على التوزيع بنقطة ثابتة خلاف مركز التوزيع يكون له توزيع ناكاغامي–رايس.

إذا استعملت a للإشارة إلى طول متجه ثابت، وσ الطول الأكثر احتمالاً لمتجه رايلي، فإن كثافة الاحتمال تُعطى بواسطة:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

حيث I_0 هي دالة بيسيل المعدلة من النوع الأول ومن رتبة صفر.

ويتوقف هذا التوزيع على معلمتين لأغراض مشاكل الانتشار، من الضروري اختيار العلاقة بين الاتساع a للمتجه الثابت واتساع جذر متوسط التربيع $\sigma\sqrt{2}$ للمتجه العشوائي. وتتوقف هذه العلاقة على التطبيق المزمع. والتطبيقان الرئيسيان هما التاليان:

أ) القدرة في المتجه الثابت عبارة عن مقدار ثابت، لكن القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي متغيرة

إذا درسنا تأثير شعاع معكوس بواسطة سطح غير منتظم، والنظر في مكونات متعددة المسير إضافة إلى مكون ثابت، فإن متوسط القدرة يساوي $(a^2 + 2\sigma^2)$. ويعرف التوزيع عادة بمعلمة K.

$$K = 10 \log \left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{dB} \tag{15}$$

وهذه المعلمة عبارة عن النسبة بين القدرة في المتجه الثابت والقدرة في المكون العشوائي.

ب) القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي ثابتة لكن كلا المكونين متغيران

إذا درسنا الانتشار بمسيرات متعددة عبر الغلاف الجوي، يمكن اعتبار أن مجموع القدرة المنقولة بالمتجه الثابت ومتوسط القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي يكون ثابتاً، بما أن القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تأتي من قدرة المتجه الثابت. وإذا أخذنا القدرة الإجمالية على أنها تساوي الواحد الصحيح، عندئذ نحصل على:

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1 \tag{16}$$

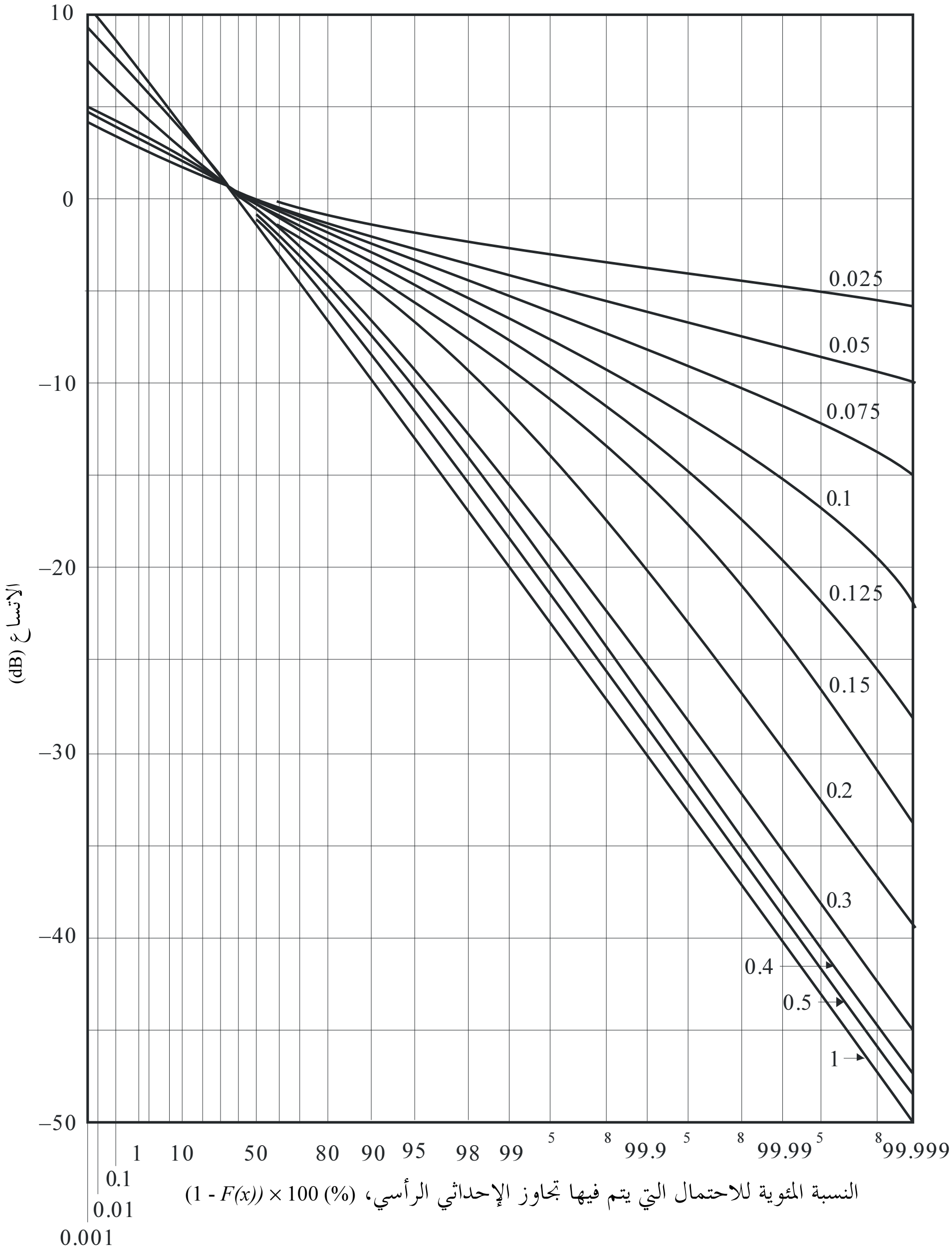
عندئذ تكون أجزاء القدرة الإجمالية المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تساوي $2\sigma^2$. ومن جانب آخر، إذا استعملت X للإشارة إلى الاتساع اللحظي للمتجه الناتج واستعملت x للإشارة إلى قيمة رقمية لهذا الاتساع، فإننا نجد أن احتمال الحصول على سوية لحظية أكبر من x يُعطى بواسطة:

$$\text{Prob}\ (X > x) = 1 - F(x) = 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \tag{17}$$

ويبين الشكل 4 هذا التوزيع لمختلف قيم أجزاء القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي.

الشـــكل 4

توزيع ناغاكامي–رايس لقدرة إجمالية ثابتة (مع جزء القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي كمعلمة)



P.1057-04

ولأغراض التطبيقات العملية، تم استعمال مقياس ديسيبل للاتساعات، وبالنسبة للاحتمالات تم استعمال مقياس بحيث يُمثل توزيع رايلي بواسطة خط مستقيم. ونرى أنه بالنسبة لقيم جزء القدرة في المتجه العشوائي التي تزيد عن 0,5، تقترب المنحنيات من حد يقابل توزيع رايلي. والسبب في ذلك هو أن المتجه الثابت في هذه الحالة له اتساع بنفس رتبة اتساع المتجه العشوائي ولا يمكن التمييز بينهما عملياً. ومن جانب آخر، بالنسبة للقيم الصغرى من هذا الجزء، يمكن إظهار أن توزيع الاتساع يتجه نحو توزيع طبيعي.

وفي حين أن للاتساع توزيع ناغاكامي–رايس فإن دالة كثافة الاحتمال للطور هي:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a\cos\theta}{\sigma}\,e^{\frac{a^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\left[1 + erf\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\right\}\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

حيث:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \tag{19}$$

8 توزيع غاما والتوزيع الأسي

على عكس التوزيعات السابقة التي تشتق من التوزيع الغوسي، فإن توزيع غاما يشتق من التوزيع الأسي الذي يشكل تعميماً له. وهو يطبق على متغير موجب غير محدود. وتكون دالة كثافة الاحتمال هي:

$$p(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)}\,x^{\nu-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{20}$$

وتمثل Γ دالة أولر من الدرجة الثانية.

ويتوقف هذا التوزيع على معلمتين α وν. لكن α ليست سوى معلمة قياس للمتغير x. والقيم المميزة للمتغير هي التالية:

– القيمة المتوسطة: $\frac{\nu}{\alpha}$

– قيمة جذر متوسط التربيع: $\frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– الانحراف المعياري: $\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

ولا يمكن تقييم التكامل المعبر عن التوزيع التراكمي بشكل صريح، ما عدا للقيم الصحيحة لـ ν. ومن جهة أخرى تعتبر التمديدات التالية ممكنة:

التقريب التسلسلي للمتغير $x << 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^\nu\left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + \dots\right] \tag{21}$$

والتقريب المقارب للمتغير $x >> 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^{\nu-1}\left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + \dots\right] \tag{22}$$

بالنسبة لـ ν تساوي الواحد الصحيح، نجد التوزيع الأسي. وبالنسبة لقيم ν الصحيحة، يكون للتمديد المقارب عدد محدود من الشروط ويعطي التوزيع غاما بشكل صريح.

وفي الانتشار، تكون القيم ذات الأهمية لـ ν قيماً منخفضة جداً، بين 1×10^{-2} و1×10^{-4}. وبالنسبة لـ ν في جوار صفر، يكون:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu \tag{23}$$

عند ذلك يمكن أن نكتب بالنسبة لقيم ν صغيرة وαx ليست صغيرة جداً.

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \tag{24}$$

وللحسابات العملية، يمكن العثور على تقريب للتكامل السابق، كالآتي على سبيل المثال:

$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0.68 + \alpha x + 0.28 \log \alpha x} \tag{25}$$

وهو ما يعد صالحاً في حالة $\nu < 0,1$ و$\alpha x > 0,03$.

ويبين الشكل 5 التوزيع التراكمي لدالة غاما التكميلية لقيم ν الصغيرة. ويلاحظ أن هناك احتمالاً قليلاً أن يكون المتغيرة x أكبر بكثير من الصفر. وذلك ما يفسر على الخصوص استعمال توزيع غاما لتمثيل معدلات هطول المطر، إذ إن النسبة المئوية الإجمالية لوقت هطول المطر تتراوح على العموم بين 2 و10%.

9 توزيع m لناكاغامي (انظر الملاحظة 1)

الملاحظـــة 1 – في هذه الفقرة، تدل m على معلمة لتوزيع m لناكاغامي وليس على متوسط قيمة مثلما هو الحال في الفقرات السابقة من هذا الملحق.

يطبق هذا التوزيع على متغير موجب غير محدود. وكثافة الاحتمال تساوي:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\,\Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{26}$$

Ω معلمة سلمية تساوي متوسط قيمة x^2.

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{27}$$

لهذا التوزيع علاقات مختلفة مع التوزيعات السابقة:

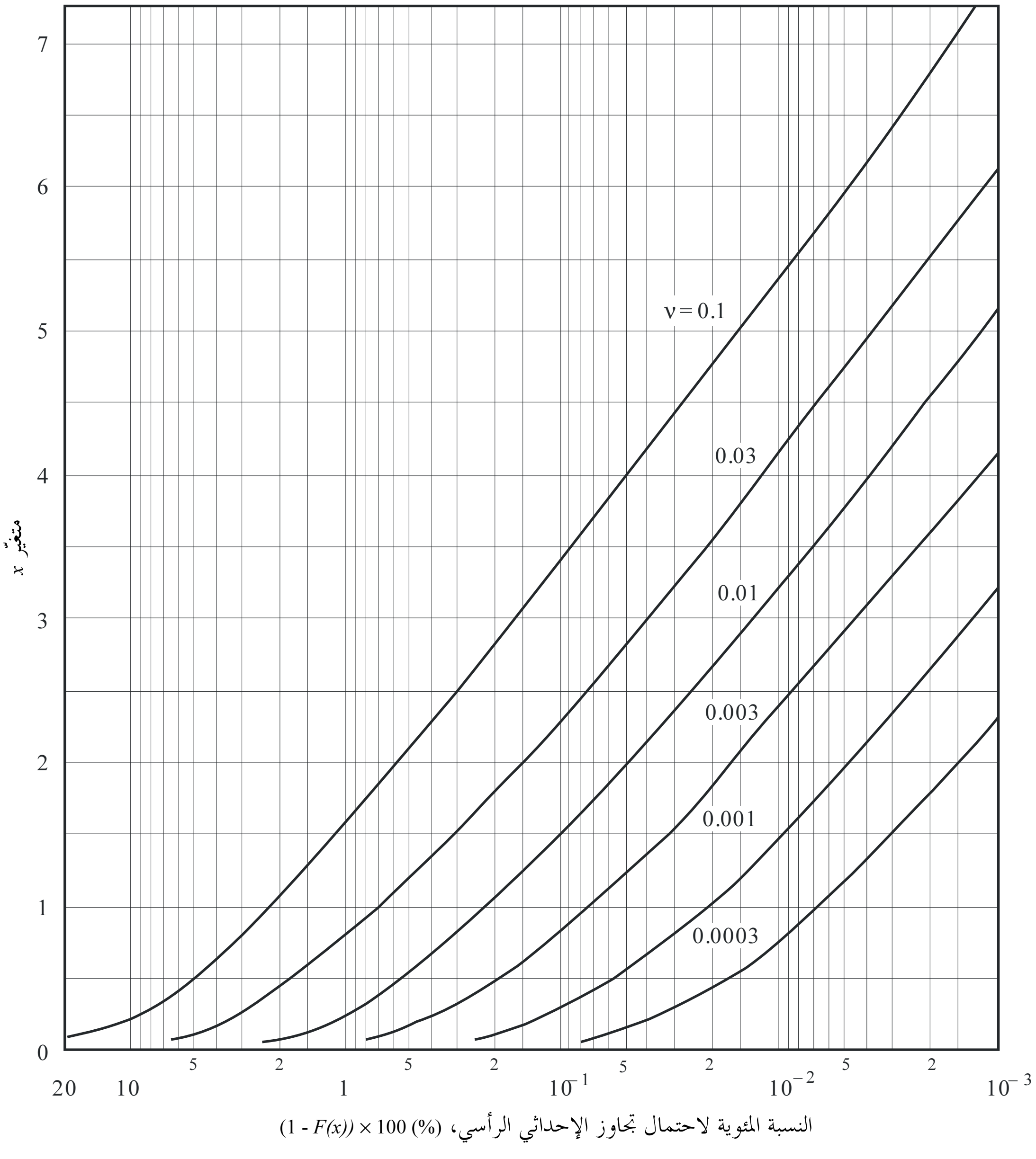
- إذا كان لمتغير ما توزيع m لناكاغامي، فإن مربع هذا المتغير يكون له توزيع غاما؛
- عندما تكون $m = 1$، نحصل على توزيع رايلي؛
- عندما تكون $m = 1/2$، نحصل على توزيع غوسي أحادي الاتجاه.

إذاً يمكن اعتبار التوزيع m لناكاغامي وتوزيع ناكاغامي–رايس كتعميمين مختلفين لتوزيع رايلي. وتجدر ملاحظة أنه، بالنسبة لسويات الإشارة المنخفضة جداً، يؤول التوزيع m لناكاغامي نحو قيمة تتوقف على المعلمة m، على عكس توزيع ناكاغامي–

رايس الذي يكون الميل الحدي فيه متساوياً عادة (10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال). ويبين الشكل 6 دالة التوزيع التراكمي *m* لناكاغامي لمختلف قيم المعلمة *m*.

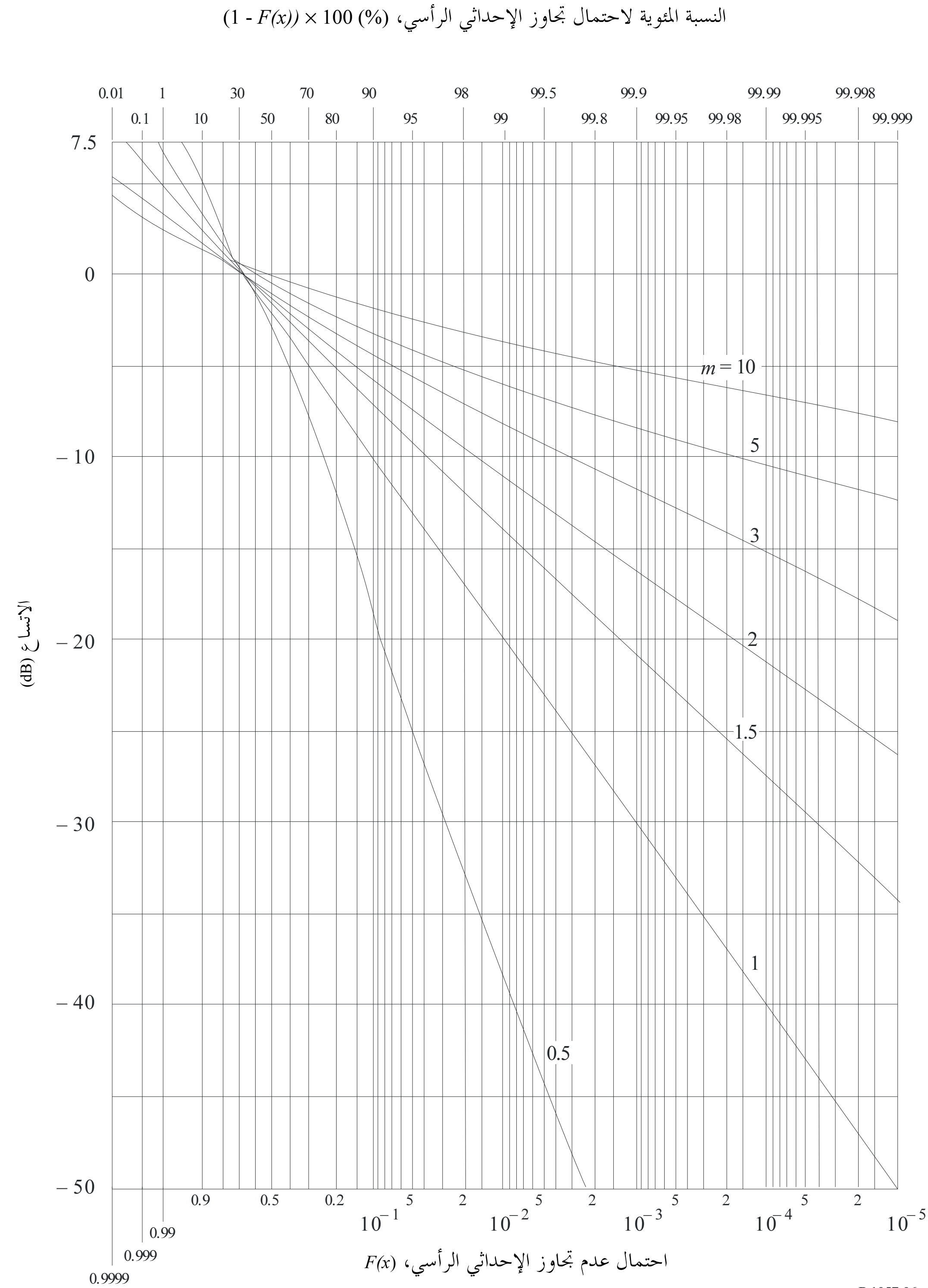
الشـــكل 5

توزيع غاما ($\alpha = 1, \nu \leq 0,1$)



الشـــكل 6

التوزيع *m* لناكاغامي ($\overline{x^2} = 1$)



P.1057-06

10 توزيع χ^2 لبيرسون

تُعطى كثافة الاحتمال بواسطة العلاقة:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\ e^{\frac{-\chi^2}{2}}\ (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \tag{28}$$

وتكون χ^2 عبارة عن متغير موجب غير محدد، والمعلمة ν، وهي عدد صحيح موجب، يُدعى عدد درجات حرية التوزيع. ويمثل الرمز Γ دالة أولر من الدرجة الثانية. وحسب تعادلية ν، نحصل على:

ν زوجي:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)! \tag{29}$$

ν فردي:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{30}$$

ويُعطى التوزيع التراكمي بواسطة:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}}\ t^{\frac{\nu}{2}-1}\ dt \tag{31}$$

ويكون متوسط القيمة والانحراف المعياري كما يلي:

$$m = \nu \tag{32}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \tag{33}$$

وهناك خاصية أساسية للتوزيع χ^2 وهي أنه: إذا كان لعدد n من المتغيرات x_i توزيعات غوسية بمتوسط m_i وانحراف معياري σ_i، فإن المتغير:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{34}$$

يكون له توزيع χ^2 بعدد n من درجات الحرية. وعلى الخصوص، يكون لمربع متغير غوسي صغير توزيع χ^2 بدرجة واحدة من الحرية.

وإذا كان لعدة متغيرات مستقلة توزيعات χ^2، يكون لمجموعها كذلك توزيع χ^2 بعدد درجات حرية يساوي مجموع درجات الحرية لكل المتغيرات.

ولا يختلف توزيع χ^2 أساساً عن توزيع غاما. ويتم التحول من الواحد إلى الآخر بواسطة المعادلتين:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha x \tag{35}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{36}$$

وبنفس الطريقة يتم التحول من توزيع χ^2 إلى توزيع m لناكاغامي بواسطة:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2 \tag{37}$$

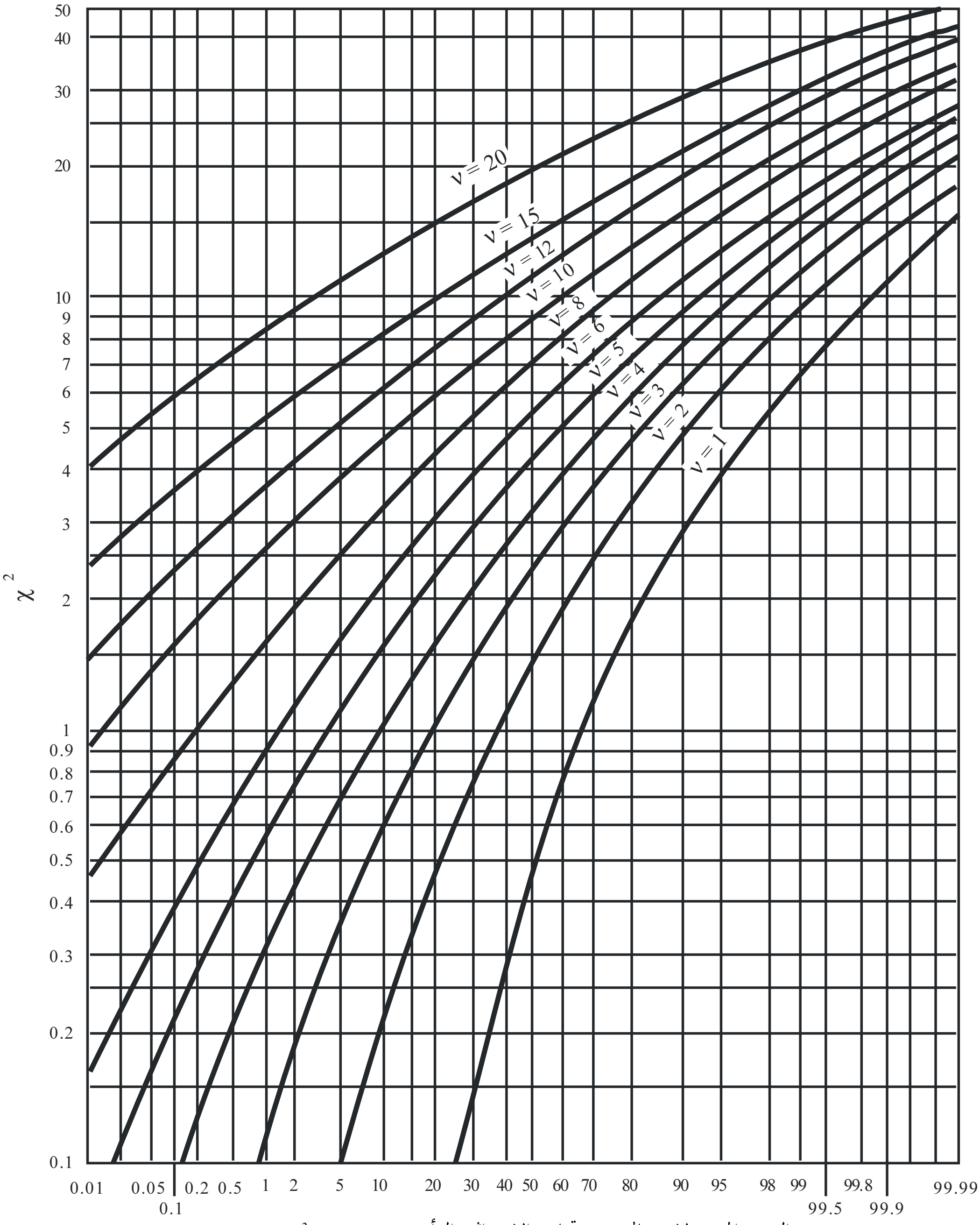
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{38}$$

ويُستعمل التوزيع χ^2 في اختبارات إحصائية لتحديد ما إذا كانت مجموعة القيم التجريبية لمقدار (كثافة المطر، التوهين، إلخ.) يمكن أن تُنمذج بواسطة توزيع احتمال معين.

ويقدم الشكل 7 تمثيلاً بيانياً لهذا التوزيع لعدد من قيم ν.

الشــــكل 7

توزيع χ^2



P.1057-07

الملحق 2

إجراء الخطوة فخطوة من أجل تقريب التوزيع التراكمي التكميلي بواسطة توزيع تراكمي تكميلي طبيعي لوغاريتمي

1 معلومات أساسية

يعرف التوزيع التراكمي الطبيعي اللوغاريتمي كما يلي:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \tag{39}$$

أو على نحو مكافئ:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t \tag{40}$$

وبالمثل، يعرف التوزيع التراكمي التكميلي الطبيعي اللوغاريتمي كما يلي:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \tag{41}$$

أو على نحو مكافئ:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t = Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right) \tag{42}$$

حيث $Q(.)$ هو تكامل الاحتمال التراكمي التكميلي الطبيعي. ويمكن تقدير المعلمتين m وσ من مجموعة من أزواج n من (G_i, x_i) على النحو الموصوف في الفقرة التالية.

2 الإجراء

يُجرى تقدير المعلمتين اللوغاريتميتين الطبيعيتين m وσ كما يلي:

الخطوة 1: إنشاء مجموعة أزواج n من (G_i, x_i) حيث G_i هي الاحتمال الذي تتجاوزه x_i.

الخطوة 2: تحويل مجموعة الأزواج n من (G_i, x_i) إلى $(Z_i, \ln x_i)$ حيث:

$Z_i = Q^{-1}(G_i)$، أو على نحو مكافئ، $Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i)$

$Z_i = Q^{-1}(G_i)$، أو على نحو مكافئ، $Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i)$

الخطوة 3: تحديد المتغيرين m و σ منح خلال إجراء المطابقة بالمربعات الصغرى للدالة الخطية:

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

كما يلي:

$$\sigma = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} Z_i^{2} - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^{2}}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$