

RECOMMANDATION UIT-R P.1057-2

**Modélisation de la propagation des ondes radioélectriques:
distributions de probabilité**

(1994-2001-2007)

Domaine de compétence

La modélisation de la propagation des ondes radioélectriques nécessite d'avoir largement recours à des méthodes statistiques. La présente Recommandation donne des informations d'ordre général sur les distributions de probabilité les plus importantes, afin d'établir un contexte commun pour les méthodes statistiques de prévision de la propagation utilisées dans les Recommandations des Commissions d'études des radiocommunications.

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

considérant

- a) que la propagation des ondes radioélectriques est surtout associée à un milieu aléatoire, d'où la nécessité d'analyser les phénomènes de propagation à l'aide de méthodes statistiques;
- b) que, dans la plupart des cas, il est possible de décrire de façon satisfaisante les variations dans le temps et dans l'espace des paramètres de propagation par des distributions statistiques connues;
- c) qu'il est donc important de connaître les propriétés fondamentales des distributions de probabilité les plus courantes utilisées pour l'étude statistique des phénomènes de propagation,

recommande

- 1** d'utiliser les données statistiques relatives à la modélisation de la propagation fournies dans l'Annexe 1 pour la planification des services de radiocommunication et la prévision des paramètres de qualité de fonctionnement des systèmes de radiocommunication.
- 2** d'utiliser la procédure par étapes d'approximation d'une distribution cumulative complémentaire par une distribution cumulative complémentaire log-normale, décrite en Annexe 2.

Annexe 1**Distributions de probabilité et modélisation de la propagation
des ondes radioélectriques****1 Introduction**

L'expérience a montré que les informations sur les valeurs moyennes des signaux reçus ne suffisent pas à caractériser la qualité de fonctionnement des systèmes de radiocommunication. Il faut également tenir compte des variations dans le temps, dans l'espace et en fonction de la fréquence.

Le comportement dynamique des signaux utiles et des signaux brouilleurs joue un rôle décisif dans l'analyse de la fiabilité des systèmes et dans le choix des paramètres des systèmes, comme le type de modulation. Il est essentiel de connaître l'importance et la rapidité des fluctuations des signaux pour pouvoir définir certains paramètres, type de modulation, puissance d'émission, rapport de protection contre les brouillages par exemple, la méthode de codage et les paramètres de diversité, etc.

Pour décrire la qualité de fonctionnement des systèmes de communication, il suffit souvent d'observer les séries temporelles des fluctuations des signaux et de caractériser ces fluctuations comme un processus stochastique. Toutefois, si l'on veut utiliser la modélisation des fluctuations des signaux pour prévoir la qualité de fonctionnement des systèmes radioélectriques, il faut également connaître les mécanismes d'interaction des ondes radioélectriques avec l'atmosphère (atmosphère neutre et ionosphère).

La composition et l'état physique de l'atmosphère varient beaucoup dans l'espace et dans le temps. La modélisation de l'interaction des ondes radioélectriques suppose donc une large utilisation de méthodes statistiques pour définir divers paramètres physiques décrivant l'atmosphère, comme les paramètres électriques définissant le comportement des signaux et les processus d'interaction qui lient ces paramètres entre eux.

On trouvera par la suite quelques données générales sur les distributions de probabilité les plus importantes. Ces informations serviront peut-être de dénominateur commun aux méthodes statistiques de prévision de la propagation utilisées dans les Recommandations des Commissions d'études des radiocommunications.

2 Distributions de probabilité

Les processus stochastiques sont en général décrits par une fonction de densité de probabilité ou une fonction de distribution cumulative. La fonction de densité de probabilité, désignée ici par $p(x)$ pour la variable x , est telle que la probabilité pour que x prenne une valeur dans l'intervalle infinitésimal entre x et $x + dx$ est $p(x) dx$. La fonction de distribution cumulative désignée par $F(x)$ donne la probabilité pour que la variable prenne une valeur inférieure à x . La relation entre les fonctions est donc la suivante:

$$p(x) = \frac{d}{dx} [F(x)]$$

ou:

$$F(x) = \int_c^x p(t) dt$$

où c est la limite inférieure des valeurs que t puisse prendre.

Les distributions les plus importantes sont les suivantes:

- distribution normale ou de type gaussien,
- distribution log-normale,
- distribution de Rayleigh,
- distribution combinée log-normale et de Rayleigh,
- distribution de Nakagami-Rice (distribution n de Nakagami),
- distribution gamma et distribution exponentielle,
- distribution m de Nakagami,
- distribution en χ^2 de Pearson.

3 Distribution de type gaussien ou normale

Cette distribution s'applique à une variable continue de signe quelconque. La densité de probabilité est du type:

$$p(x) = e^{-T(x)} \tag{1}$$

$T(x)$ étant un polynôme du second degré non négatif. Si on utilise comme paramètres la moyenne m et l'écart type σ , $p(x)$ se met sous la forme usuelle:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

d'où:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right] dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \tag{3}$$

avec:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \tag{4}$$

La fonction de distribution cumulative normale $F(x)$ est généralement tabulée sous forme réduite, c'est-à-dire en prenant m nul et σ égal à l'unité. Dans ce cas, le Tableau 1 donne la correspondance entre x et $F(x)$ pour quelques valeurs rondes soit de x soit de $F(x)$.

TABLEAU 1

x	$1 - F(x)$	x	$1 - F(x)$
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1,350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3,167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2,867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9,866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

Pour les calculs pratiques, on peut représenter $F(x)$ par des fonctions approchées, par exemple, la suivante, valable pour x positif avec une erreur relative inférieure à $2,8 \times 10^{-3}$:

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi} \left(0,661 x + 0,339 \sqrt{x^2 + 5,51} \right)} \tag{5}$$

La distribution gaussienne se rencontre surtout lorsque les valeurs de la grandeur considérée résultent de l'effet additif de nombreuses causes aléatoires, chacune d'elles ayant une importance relativement faible.

En propagation, la plupart des grandeurs physiques qui interviennent (puissance, tension, durée d'un évanouissement, etc.) sont des grandeurs essentiellement positives et, par suite, ne peuvent être représentées directement par une distribution gaussienne. Par contre, cette distribution intervient dans deux cas importants:

- pour représenter les fluctuations d'une grandeur autour de sa valeur moyenne (scintillation);
- pour représenter le logarithme d'une grandeur. On obtient alors la distribution log-normale étudiée plus loin.

Il existe dans le commerce des diagrammes dont l'une des coordonnées est dite gaussienne, c'est-à-dire que la graduation est telle qu'une distribution gaussienne est représentée par une droite. Ces diagrammes sont utilisés très couramment, même pour la représentation des distributions non gaussiennes.

4 Distribution log-normale

C'est la distribution d'une variable positive dont le logarithme a une distribution gaussienne. On peut donc écrire directement la fonction de densité de probabilité et la fonction de distribution cumulative:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (6)$$

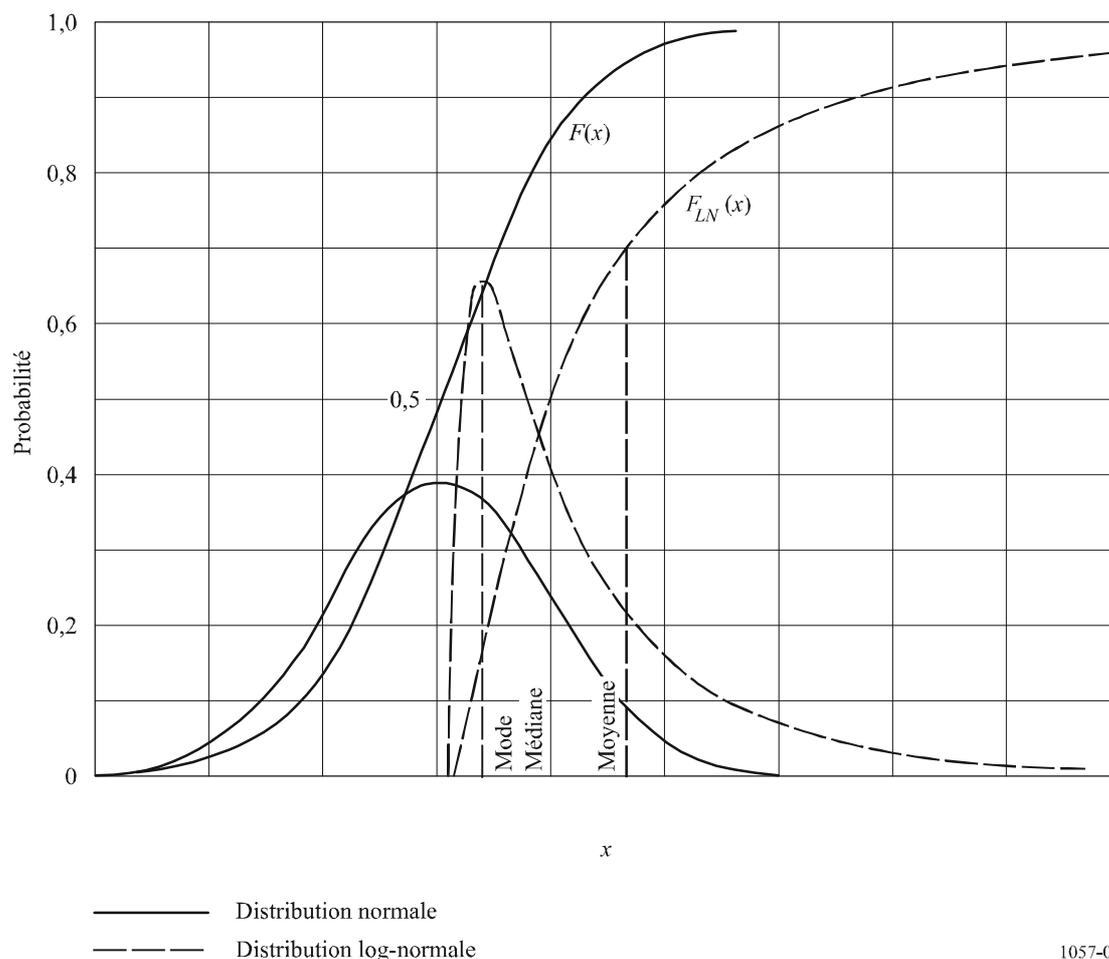
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (7)$$

Cependant, dans ces relations, m et σ sont la moyenne et l'écart type, non de la variable x mais du logarithme de cette variable. Les grandeurs caractéristiques de la variable x s'en déduisent sans difficulté. On trouve:

- valeur la plus probable: $\exp(m - \sigma^2)$
- valeur médiane: $\exp(m)$
- valeur moyenne: $\exp \left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right)$
- valeur quadratique moyenne: $\exp(m + \sigma^2)$
- écart type: $\exp \left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$

Contrairement à la distribution gaussienne, la distribution log-normale est extrêmement dissymétrique. En particulier, la valeur moyenne, la valeur médiane et la valeur la plus probable (souvent appelée mode) ne sont pas identiques (voir la Fig. 1).

FIGURE 1
Distribution normale et log-normale



La distribution log-normale se rencontre très souvent en propagation, principalement pour des grandeurs qui sont liées soit à un niveau de puissance ou de champ soit à une durée. Dans le cas des niveaux de puissance ou de champ, l'expression de ceux-ci en décibels étant généralement la seule utilisée, on parle plutôt d'une distribution normale des niveaux. Dans le cas des durées (par exemple, des durées d'évanouissement), la distribution log-normale est utilisée sous forme explicite car la variable naturelle est la seconde ou la minute et non leur logarithme.

Comme l'inverse d'une variable ayant une distribution log-normale a également une distribution log-normale, cette distribution se rencontre dans certains cas pour des débits (inverses d'une durée). Par exemple, elle est utilisée pour représenter la distribution des intensités de la pluie, au moins pour les intensités de pluie faibles et moyennes.

Par référence à la distribution gaussienne, on peut considérer que l'intervention de la distribution log-normale signifie que les valeurs numériques de la variable résultent de l'action de nombreuses causes de faible importance individuelle, mais agissant de façon multiplicative.

5 Distribution de Rayleigh

La distribution de Rayleigh s'applique à une variable continue positive non limitée. Elle est liée à la distribution gaussienne de la façon suivante. Etant donné une distribution gaussienne

bidimensionnelle à deux variables indépendantes y et z de moyenne nulle et de même écart type σ , la variable aléatoire:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (8)$$

a une distribution de Rayleigh et la valeur la plus probable de x est égale à σ . Comme x représente la longueur d'un vecteur joignant un point d'une distribution gaussienne bidimensionnelle au centre de cette distribution, on peut en déduire que la distribution de Rayleigh représente la distribution de la longueur d'un vecteur qui est la somme d'un grand nombre de vecteurs d'amplitudes faibles et dont les phases ont une distribution uniforme.

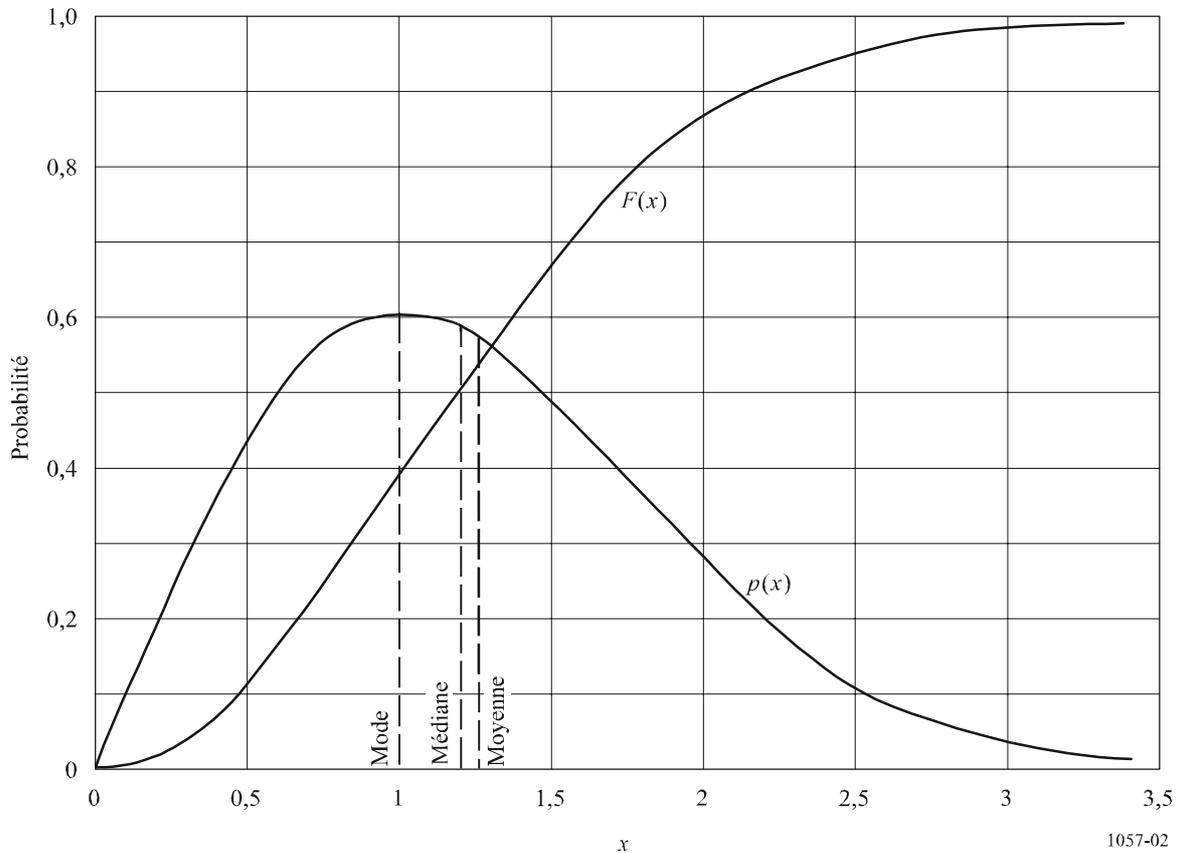
La fonction de densité de probabilité et la fonction de distribution cumulative sont données par:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

La Fig. 2 représente ces fonctions $p(x)$ et $F(x)$.

FIGURE 2
Distribution de Rayleigh



Les valeurs caractéristiques de la variable sont les suivantes:

- valeur la plus probable: σ
- valeur médiane: $\sigma\sqrt{2\ln 2} = 1,18 \sigma$
- valeur moyenne: $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,25 \sigma$
- valeur quadratique moyenne: $\sigma\sqrt{2} = 1,41 \sigma$
- écart type: $\sigma\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0,655 \sigma$

Notez que σ est l'écart type de la distribution gaussienne à laquelle est liée la distribution de Rayleigh.

La distribution de Rayleigh est souvent utilisée seulement au voisinage de l'origine, c'est-à-dire pour les faibles valeurs de x . Dans ce cas, on a:

$$F(x) \cong \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (11)$$

Ce qui s'interprète de la façon suivante: la probabilité que la variable aléatoire X ait une valeur inférieure à x est proportionnelle au carré de cette valeur. Si la variable considérée est une tension, son carré représente la puissance du signal. En d'autres termes sur une échelle en décibels, la puissance décroît de 10 dB pour chaque décade de probabilité. Cette propriété est souvent utilisée pour savoir si un niveau reçu suit une distribution de Rayleigh, au moins asymptotiquement. Il faut noter, cependant, que d'autres distributions peuvent avoir le même comportement.

En particulier, la distribution de Rayleigh intervient dans les phénomènes de diffusion.

6 Distribution combinée log-normale et de Rayleigh

Dans certains cas, la distribution d'une variable aléatoire peut être considérée comme résultant de la combinaison de deux distributions, à savoir une distribution log-normale pour les variations à long terme et une distribution de Rayleigh pour les variations à court terme. La distribution des valeurs instantanées est obtenue en considérant une variable de Rayleigh dont la valeur moyenne (ou la valeur quadratique moyenne) est elle-même une variable aléatoire ayant une distribution log-normale.

Si on désigne par m et σ la moyenne et l'écart type de la distribution gaussienne associée à la distribution log-normale, on obtient la distribution suivante:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-x^2 e^{-2\sigma u} - \frac{u^2}{2}\right] du \quad (12)$$

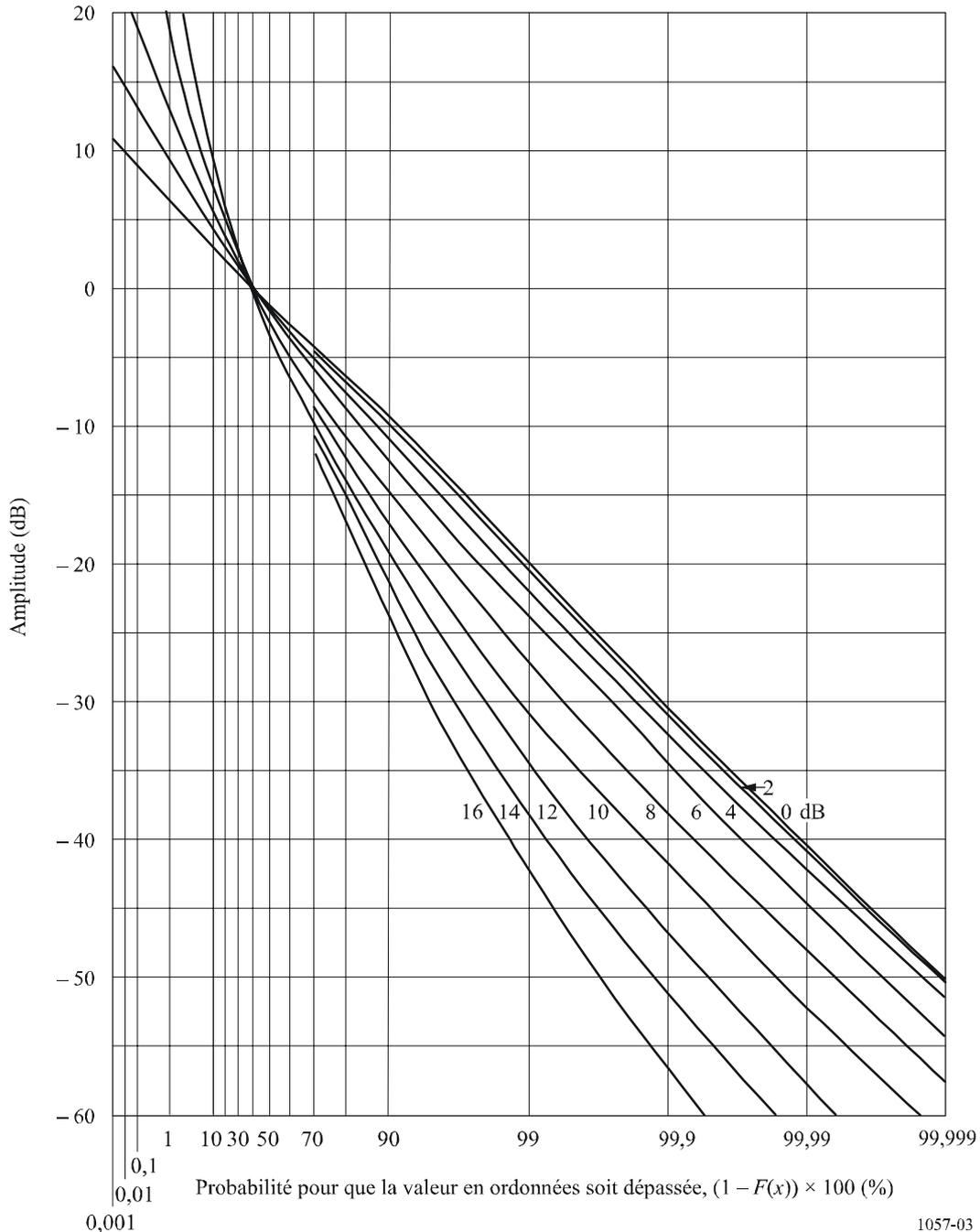
Dans cette formule, l'écart type σ est exprimé en népers. Si on désigne par σ' sa valeur en décibels, on a:

$$\sigma = 0,115 \sigma' \quad (13)$$

La Fig. 3 donne une représentation graphique de cette distribution pour un certain nombre de valeurs de l'écart type, la valeur de m étant prise égale à zéro.

Cette distribution intervient principalement dans la propagation par l'intermédiaire des hétérogénéités du milieu, lorsque les caractéristiques du milieu ont des variations à long terme non négligeables, comme, par exemple, en diffusion troposphérique.

FIGURE 3
Distribution combinée log-normale et de Rayleigh (avec, en paramètre, l'écart type de la distribution log-normale)



7 Distribution de Nakagami-Rice (distribution n de Nakagami) (voir la Note 1)

NOTE 1 – Ne pas confondre avec la distribution m de Nakagami.

La distribution de Nakagami-Rice se déduit également de la distribution gaussienne, et elle généralise la distribution de Rayleigh. Elle peut être considérée comme la distribution de la

longueur d'un vecteur qui serait la somme d'un vecteur fixe et d'un vecteur dont la longueur a une distribution de Rayleigh. De même, étant donné une distribution gaussienne bidimensionnelle à deux variables indépendantes x et y et de même écart type σ , la longueur d'un vecteur joignant un point de la distribution à un point fixe différent du centre de la distribution suit une distribution de Nakagami-Rice.

Si on désigne par a la longueur du vecteur fixe, et σ la longueur la plus probable du vecteur de Rayleigh, la densité de probabilité est donnée par:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right) \quad (14)$$

I_0 étant la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro.

Cette distribution dépend de deux paramètres mais, pour les applications aux problèmes de propagation, on est conduit à choisir une relation entre l'amplitude a du vecteur fixe et l'amplitude quadratique moyenne $\sigma\sqrt{2}$ du vecteur aléatoire. Cette relation dépend de l'application envisagée. Les deux applications principales sont les suivantes:

- a) La puissance dans le vecteur fixe est constante mais la puissance totale dans l'ensemble constitué par le vecteur fixe et par le vecteur aléatoire est variable

Si on étudie l'influence d'un rayon réfléchi par une surface rugueuse, ou si l'on veut prendre en compte des composantes multitrajets en plus d'une composante fixe, la puissance moyenne est donnée par la formule $(a^2 + 2\sigma^2)$. La distribution est souvent définie en fonction d'un paramètre K :

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dB} \quad (15)$$

qui représente le rapport entre les puissances du vecteur fixe et de la composante aléatoire.

- b) La puissance totale dans l'ensemble constitué par le vecteur fixe et par le vecteur aléatoire est constante mais les deux composantes varient

Si on étudie la propagation par trajets multiples à travers l'atmosphère, on peut considérer que la somme de la puissance transportée par le vecteur fixe et de la puissance moyenne transportée par le vecteur aléatoire est constante, puisque la puissance transportée par le vecteur aléatoire provient de celle du vecteur fixe. En prenant la puissance totale comme unité, on a alors:

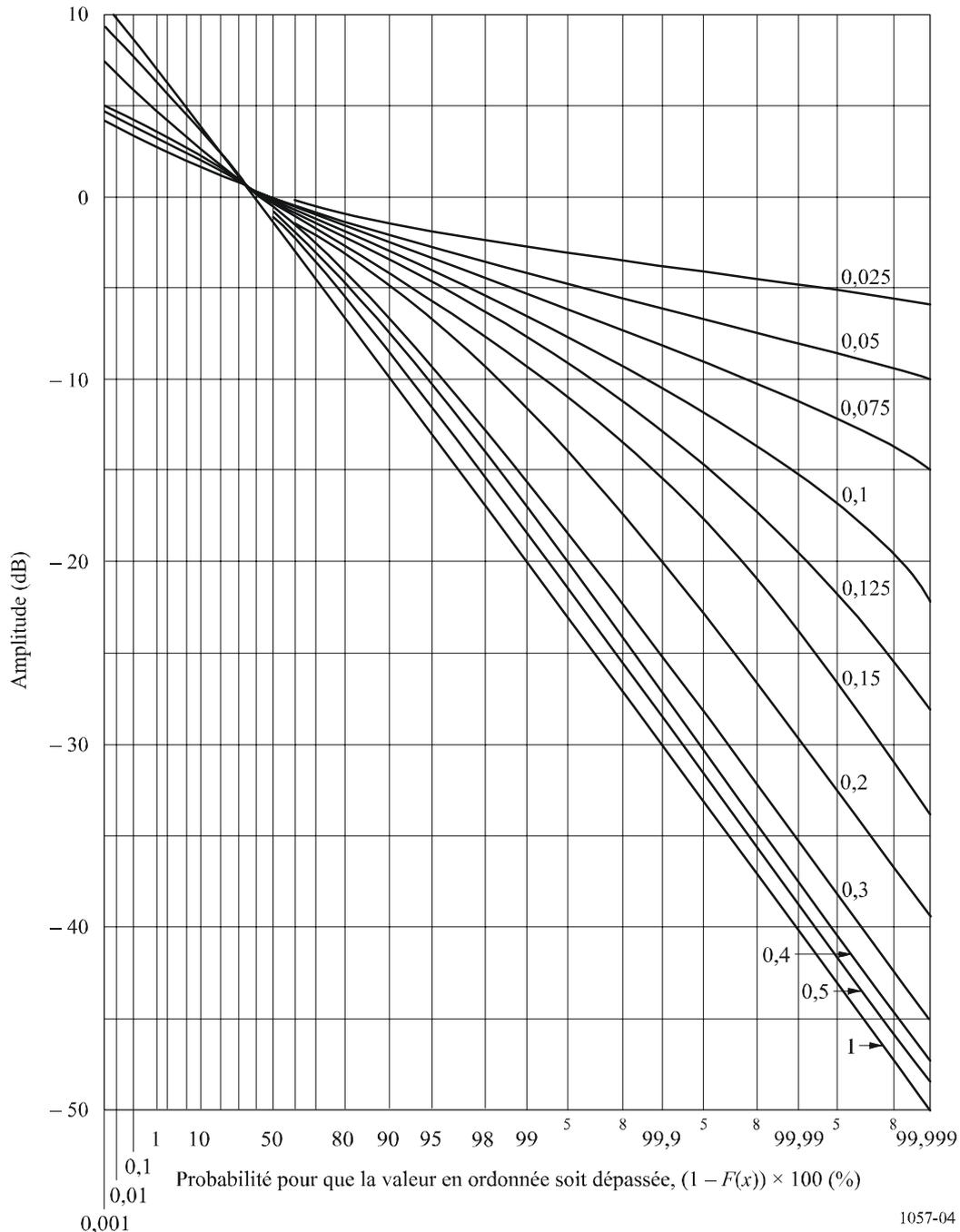
$$a^2 + 2\sigma^2 = 1 \quad (16)$$

et la fraction de la puissance totale transportée par le vecteur aléatoire est alors égale à $2\sigma^2$. D'autre part, en désignant par X l'amplitude instantanée du vecteur résultant et par x une valeur numérique de cette amplitude, on trouve que la probabilité d'un niveau instantané supérieur à x est donnée par:

$$\text{Prob}(X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} v \exp(-v^2) I_0\left(\frac{2va}{\sigma\sqrt{2}}\right) dv \quad (17)$$

La Fig. 4 montre cette distribution, pour différentes valeurs de la fraction de puissance transportée par le vecteur aléatoire.

FIGURE 4
Distribution de Nakagami-Rice pour une puissance totale constante (avec, en paramètre, la fraction de puissance transportée par le vecteur aléatoire)



En vue des applications pratiques, on a utilisé pour les amplitudes une échelle en décibels et pour les probabilités une échelle telle qu'une distribution de Rayleigh soit représentée par une droite. On voit que, pour les valeurs de la fraction de la puissance du vecteur aléatoire supérieures à environ 0,5, les courbes approchent d'une limite qui correspond à une distribution de Rayleigh. Ceci provient du fait que, dans ce cas, le vecteur fixe a une amplitude du même ordre de grandeur que celle du vecteur aléatoire et il ne se distingue pratiquement plus de celui-ci. Par contre, pour les

petites valeurs de cette fraction, on peut montrer que la distribution de l'amplitude tend vers une distribution gaussienne.

8 Distribution gamma et distribution exponentielle

Contrairement aux distributions précédentes qui dérivent de la distribution gaussienne, la distribution gamma dérive de la distribution exponentielle dont elle constitue une généralisation. Elle s'applique à une variable positive et non limitée. La fonction de densité de probabilité est:

$$p(x) = \frac{\alpha^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\alpha x} \tag{18}$$

où Γ représente la fonction d'Euler de second ordre.

Cette distribution dépend de deux paramètres α et v . Cependant, α est seulement un paramètre d'échelle de la variable x . Les valeurs caractéristiques de la variable sont les suivantes:

- valeur moyenne: $\frac{v}{\alpha}$
- valeur quadratique moyenne: $\frac{\sqrt{v(1+v)}}{\alpha}$
- écart type: $\frac{\sqrt{v}}{\alpha}$

L'intégrale exprimant la distribution cumulative ne peut être évaluée sous forme explicite, sauf pour les valeurs entières de v . En revanche, on peut donner les développements suivants:

Développement en série pour $x \ll 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^v \left[1 + \frac{\alpha x}{v+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(v+1)(v+2)} + \dots \right] \tag{19}$$

Développement asymptotique pour $x \gg 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{v-1} \left[1 + \frac{v-1}{\alpha x} + \frac{(v-1)(v-2)}{(\alpha x)^2} + \dots \right] \tag{20}$$

Pour v égal à l'unité, on trouve la distribution exponentielle. Pour v entier, le développement asymptotique possède un nombre fini de termes et donne la distribution gamma sous forme explicite.

En propagation, les valeurs intéressantes de v sont les valeurs très faibles, de l'ordre de 1×10^{-2} à 1×10^{-4} . Or, pour v voisin de zéro, on a:

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \simeq \frac{v}{\Gamma(v+1)} \simeq v \tag{21}$$

Par suite, on peut écrire pour v petit et αx pas trop petit:

$$1 - F(x) \simeq v \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{22}$$

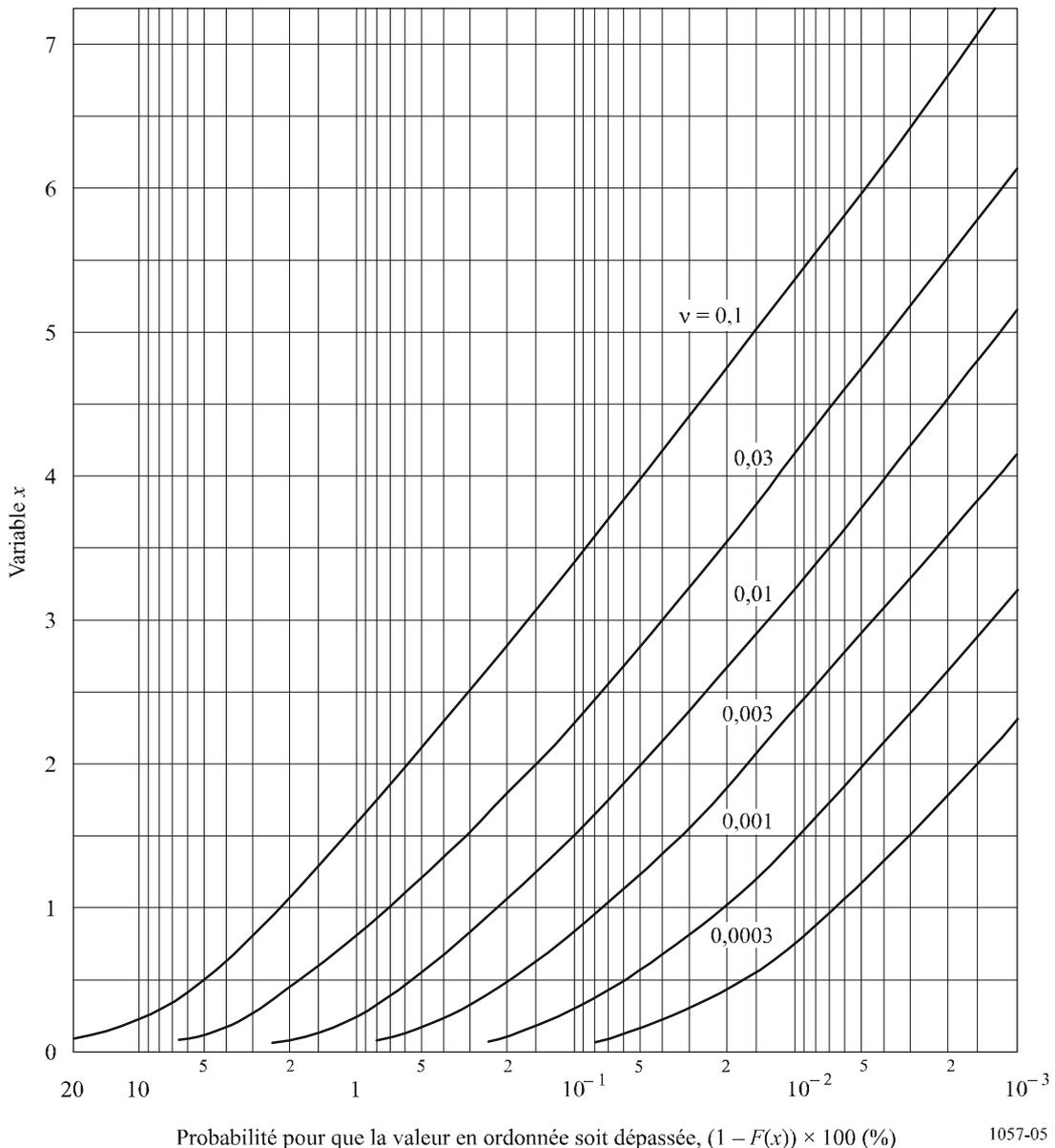
Pour le calcul pratique, on peut trouver une approximation de l'intégrale ci-dessus, par exemple, la suivante:

$$1 - F(x) \approx v \frac{e^{-\alpha x}}{0,68 + \alpha x + 0,28 \log \alpha x} \quad (23)$$

qui est valable pour $v < 0,1$ et $\alpha x > 0,03$.

La distribution cumulative de la fonction gamma complémentaire pour les petites valeurs de v est reproduite à la Fig. 5. On constate que la probabilité que la variable x ait une valeur significativement supérieure à zéro est toujours faible. C'est ce qui explique, en particulier, l'utilisation de la distribution gamma pour représenter l'intensité de pluie, puisque le pourcentage total de temps de pluie est, en général, de l'ordre de 2 à 10%.

FIGURE 5
Distribution gamma ($\alpha = 1, v \leq 0,1$)



9 Distribution m de Nakagami (voir la Note 1)

NOTE 1 – Dans ce paragraphe, m indique un paramètre de la distribution m de Nakagami et non une valeur moyenne comme dans les paragraphes précédents de la présente Annexe.

Cette distribution s'applique à une variable positive non limitée. La densité de probabilité est égale à:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m) \Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{24}$$

Ω est un paramètre d'échelle qui est égal à la valeur moyenne de x^2 .

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{25}$$

Cette distribution a diverses relations avec les distributions précédentes:

- Si une variable a une distribution m de Nakagami, le carré de cette variable suit une loi gamma.
- Pour $m = 1$, on obtient une distribution de Rayleigh.
- Pour $m = 1/2$, on obtient une distribution gaussienne unilatérale.

La distribution m de Nakagami et la distribution de Nakagami-Rice peuvent donc être considérées comme deux généralisations différentes de la distribution de Rayleigh. Il faut noter que, pour les niveaux de signal très faibles, la pente de la distribution m de Nakagami tend vers une valeur qui dépend du paramètre m , contrairement à la distribution de Nakagami-Rice pour laquelle la pente limite est toujours la même (10 dB par décade de probabilité). La Fig. 6 montre la fonction de distribution cumulative m de Nakagami pour différentes valeurs du paramètre m .

10 Distribution en χ^2 de Pearson

La densité de probabilité est donnée par la relation:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} \tag{26}$$

La variable χ^2 est positive et illimitée, le paramètre v , qui est un nombre entier positif, est appelé le nombre de degrés de liberté de la distribution. Γ représente la fonction d'Euler de second ordre. Suivant la parité de v , on a:

$$v \text{ pair: } \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \left(\frac{v}{2}-1\right)! \tag{27}$$

$$v \text{ impair: } \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \left(\frac{v}{2}-1\right)\left(\frac{v}{2}-2\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \tag{28}$$

La distribution cumulative est donnée par:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{v}{2}-1} dt \tag{29}$$

La valeur moyenne et l'écart type sont:

$$m = v \quad (30)$$

$$\sigma = \sqrt{2v} \quad (31)$$

Une propriété essentielle de la distribution en χ^2 est la suivante: si n variables x_i suivent des distributions gaussiennes de moyenne m_i et d'écart type σ_i , la variable:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (32)$$

suit une distribution en χ^2 à n degrés de liberté. En particulier, le carré d'une variable réduite gaussienne suit une distribution en χ^2 à un degré de liberté.

Si plusieurs variables indépendantes suivent des distributions en χ^2 , leur somme suit aussi une distribution en χ^2 dont le nombre de degrés de liberté est égal à la somme des degrés de liberté de chacune des variables.

La distribution en χ^2 n'est pas essentiellement différente de la loi gamma. On passe de l'une à l'autre par les relations:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha x \quad (33)$$

$$\frac{v}{2} = n \quad (34)$$

De même on passe de la distribution en χ^2 à la distribution m de Nakagami par la transformation:

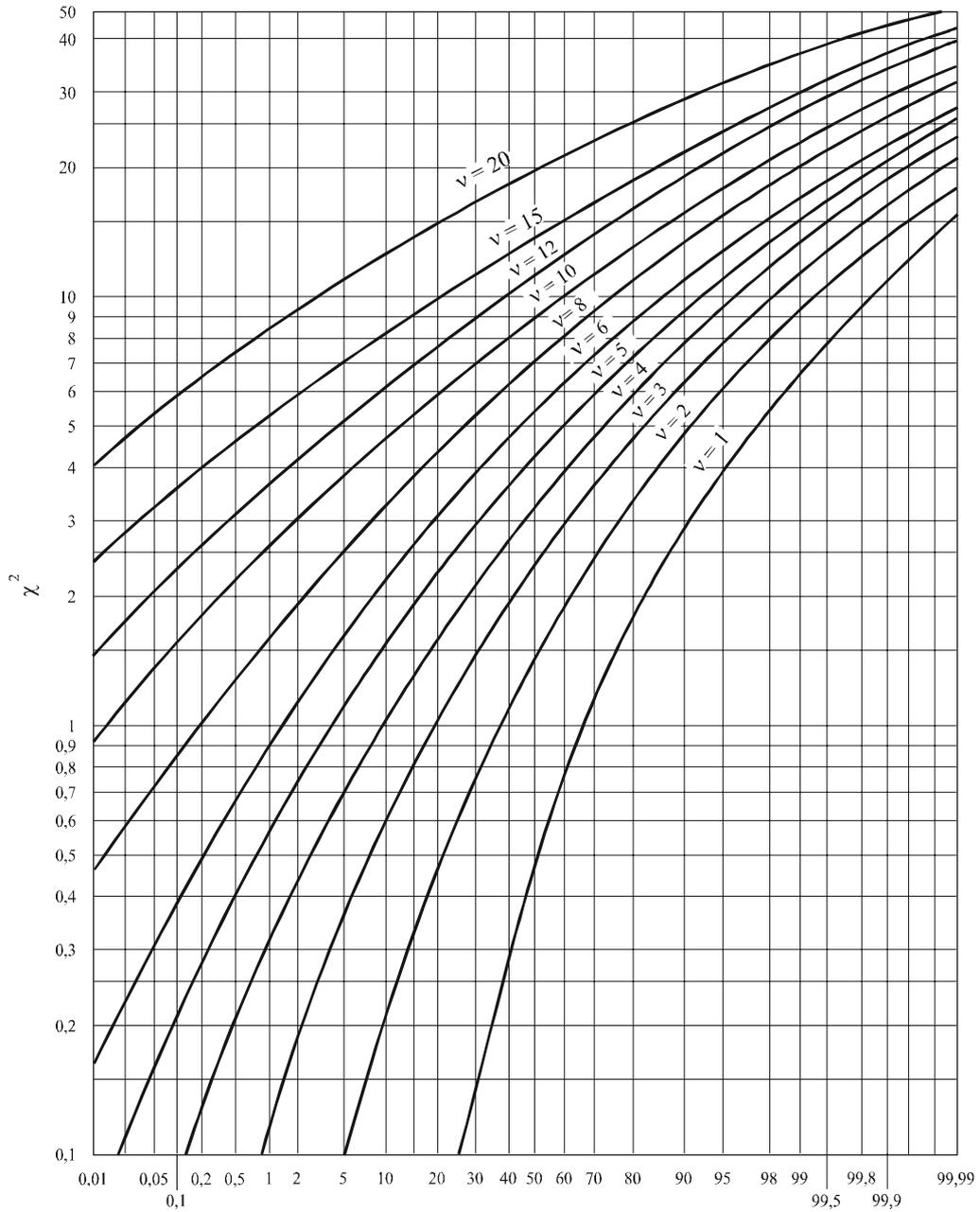
$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2 \quad (35)$$

$$\frac{v}{2} = m \quad (36)$$

La distribution en χ^2 est utilisée dans des tests statistiques servant à déterminer si un ensemble de valeurs expérimentales d'une grandeur (intensité de pluie, affaiblissement, etc.) peut être modélisé par une distribution de probabilité donnée.

La Fig. 7 donne une représentation graphique de cette distribution pour un certain nombre de valeurs de v .

FIGURE 7
Distribution en χ^2



Probabilité pour que la valeur en ordonnée ne soit pas dépassée, $F(\chi^2) \times 100\%$ 1057-07

Annexe 2

**Procédure par étapes d'approximation d'une distribution cumulative
complémentaire par une distribution cumulative
complémentaire log-normale**

1 Rappel

La distribution cumulative log-normale est définie comme suit:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{37}$$

ou, de façon équivalente:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \tag{38}$$

De manière analogue, la distribution cumulative complémentaire log-normale est définie comme suit:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{39}$$

ou, de façon équivalente:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \\
 &= Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{40}$$

où $Q(\cdot)$ est l'intégrale de la probabilité cumulative complémentaire normale. Les paramètres m et σ peuvent être calculés à partir d'un ensemble de n paires (G_i, x_i) comme décrit dans le paragraphe suivant.

2 Procédure

Calculer les deux paramètres de la distribution log-normale m et σ comme suit:

Etape 1: Construire l'ensemble de n paires (G_i, x_i) où G_i est la probabilité que x_i soit dépassé.

Etape 2: Transformer l'ensemble des n paires (G_i, x_i) en n paires $(Z_i, \ln x_i)$, où:

$$Z_i = \sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2G_i) \text{ ou, de manière équivalente, } Z_i = Q^{-1}(G_i)$$

Etape 3: Déterminer les variables m et σ en effectuant un ajustement par les moindres carrés à la fonction linéaire,

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

comme suit:

$$\sigma = \frac{n \sum_{i=1}^n Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n Z_i \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n \sum_{i=1}^n Z_i^2 - \left[\sum_{i=1}^n Z_i \right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^n Z_i}{n}$$
