RECOMENDACIÓN UIT-R BO.1212*

Cálculo de la interferencia total entre las redes de satélites geoestacionarios del servicio de radiodifusión por satélite

(1995)

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

a) que la implantación con éxito de sistemas de satélite en los planes del servicio de radiodifusión por satélite (SRS) de la Conferencia Administrativa Mundial de Radiocomunicaciones para la radiodifusión por satélite (Ginebra, 1977) (CAMR RS-77) y de la Primera reunión de la Conferencia Administrativa Mundial de Radiocomunicaciones sobre la utilización de la órbita de los satélites geoestacionarios y la planificación de los servicios espaciales que la utilizan (Ginebra, 1985) (CAMR-ORB-85) depende del cálculo preciso de la interferencia mutua entre redes de satélites;

b) que las redes de satélites geoestacionarios del SRS funcionan en las mismas bandas de frecuencias;

c) que la interferencia entre redes en el SRS contribuye al ruido de la red;

d) que es necesario proteger las redes del SRS contra la interferencia procedente de otras redes;

e) que el cálculo detallado de la interferencia mutua entre redes de satélites, debido a un incremento en la ocupación de la órbita, exige valores de discriminación por polarización más precisos resultantes de la utilización de polarizaciones distintas o idénticas por los sistemas deseado e interferente,

recomienda

1 que para calcular la interferencia total entre dos redes de satélites consideradas, se utilice el método descrito en el Anexo 1.

ANEXO 1

Cálculo de la interferencia total

Para evaluar la potencia producida en un punto dado por un solo satélite (enlace descendente) o en una posición de satélite dada por un emisor de estación terrena (enlace ascendente), puede emplearse el concepto de ganancia equivalente de cada enlace parcial.

---

* La Comisión de Estudio 6 de Radiocomunicaciones efectuó modificaciones de redacción en esta Recomendación en 2001 de conformidad con la Resolución UIT-R 44.

En cada enlace parcial intervienen dos antenas, ambas con características de emisión y de recepción copolares y contrapolares. Además, los efectos de propagación atmosférica, representados principalmente por la atenuación copolar y la discriminación contrapolar, influyen en el nivel neto de la señal.

La ganancia equivalente (en forma de relación de potencias) en un enlace parcial puede representarse por la siguiente aproximación:

$$
\begin{aligned}
G &= G_1 \cos^2 \beta + G_2 \operatorname{sen}^2 \beta \\
G_1 &= G_{tp}\, G_{rp}\, A + G_{tc}\, G_{rc}\, A + G_{tp}\, G_{rc}\, A\, X + G_{tc}\, G_{rp}\, A\, X \\
G_2 &= \left(\sqrt{G_{tp}\, G_{rc}\, A} + \sqrt{G_{tc}\, G_{rp}\, A}\right)^2 + G_{tp}\, G_{rp}\, A\, X + G_{tc}\, G_{rc}\, A\, X
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde:

β: para polarización lineal, es el ángulo de alineación relativa entre el plano de polarización de la señal recibida y el plano de polarización de la antena de recepción;

para polarización circular, se supone que $\beta = 0°$ corresponde a la transmisión y recepción copolares y $\beta = 90°$ a la transmisión y recepción contrapolares;

para los casos de polarización distintas (por ejemplo, antena de recepción deseada con polarización lineal y transmisión interferente con polarización circular, o viceversa), $\beta = 45°$

G_{tp}: aracterística de la ganancia copolar de la antena de transmisión expresada como relación de potencias (Recomendación UIT-R BO.652)

G_{tc}: característica de la ganancia contrapolar de la antena de transmisión expresada como relación de potencias

G_{rp}: característica de la ganancia copolar de la antena de recepción expresada como relación de potencias (Recomendación UIT-R BO.652)

G_{rc}: característica de la ganancia contrapolar de la antena de recepción expresada como relación de potencias

A: atenuación copolar relativa al enlace parcial interferente (expresado como relación de potencias ≤ 1)

X: discriminación por polarización cruzada relativa al enlace parcial interferente (expresado como relación de potencias ≤ 1):

$$X = 10^{-0{,}1\left[30 \log f - 40 \log(\cos \varepsilon_s) - 20 \log(-10 \log A)\right]} \qquad \text{para } 5° \leq \varepsilon_s \leq 60°$$

siendo:

f: frecuencia (GHz)

ε_s: ángulo de elevación del satélite visto desde la estación terrena (grados).

Cuando $\varepsilon_s > 60$º, se usa $\varepsilon_s = 60$º en el cálculo del valor de X.

(Véase el Apéndice 1 para determinar el ángulo de alineación relativa, β.)

En la expresión de G_1, se supone la suma en potencia de los términos. En las proximidades del eje principal de la transmisión deseada, puede ser más apropiada la suma en tensión de los dos primeros términos debido a la alineación de fase, pero fuera de este eje los efectos aleatorios aconsejan la suma en potencia. Sin embargo, como el segundo término es insignificante en las proximidades de este eje, el criterio de la suma en potencia no compromete la aproximación de este eje, el criterio de la suma en potencia no compromete la aproximación. La despolarización atmosférica es un efecto aleatorio, por lo que los dos últimos términos se suman en potencia.

En la expresión de G_2, se supone la adición en tensión de los dos primeros términos pues, en las proximidades del eje, cualquiera de ellos puede ser predominante y la alineación de fase de estos términos aconsejaría la suma en tensión. Fuera de este eje principal, el tercero y el cuarto términos son la contribución predominante, por lo que, aunque se justifica una suma en potencia de los dos primeros términos en esta región, como ocurría en el análisis, de G_1, la validez del modelo considerado no se compromete indebidamente manteniendo la suma en tensión en todas las regiones. Dado que la transición de la adición en tensión cerca del eje a adición en potencia fuera del eje es algo imprecisa, las expresiones indicadas parecen un compromiso razonable entre la exactitud y la sencillez, teniendo en cuenta los argumentos formulados.

Utilizando el concepto de ganancia equivalente, la potencia de la portadora deseada, C, o la potencia interferente de una sola fuente, I, en cada enlace parcial viene dada simplemente por:

$$C\ (\text{o}\ I) = P_T - L_{FS} - L_{CA} + G \qquad \text{dBW} \tag{2}$$

donde:

P_T: potencia de la antena de transmisión deseada (interferente) (dBW)

L_{FS}: pérdida en el espacio libre del enlace deseado (interferente) (dB)

L_{CA}: absorción con cielo despejado en el enlace deseado (interferente) (dB)

G: ganancia equivalente en el enlace deseado (interferente) (dB).

La potencia total interferente se obtiene sumando las potencias así calculadas para todas las fuentes de interferencia. La relación entre la potencia de la señal deseada y la potencia total interferente es la relación portadora/interferencia total C/I para el enlace descendente. La potencia total interferente y C/I para el enlace ascendente se obtiene en forma análoga, y los dos valores de C/I se combinan entonces para obtener la relación C/I combinada total.

Si la relación entre las potencias de la portadora deseada y de la señal interferente, calculadas ambas mediante la ecuación (2), debe evaluarse para el caso más desfavorable, es preciso tener en cuenta parámetros tales como las tolerancias de mantenimiento en posición del satélite, los errores de puntería de la antena del satélite y las condiciones de propagación. El mantenimiento en posición y los errores del haz de la antena transmisora del satélite que deben tenerse en cuenta son los que produzcan el nivel más bajo en recepción de la señal deseada y el nivel más alto en recepción de la señal del satélite interferente. Cuando el satélite interferente está en un ángulo de elevación inferior al del satélite que transmite la señal deseada, las condiciones más desfavorables de interferencia suelen producirse durante la explotación con tiempo despejado. A la inversa, si el satélite interferente está en un ángulo de elevación superior, la interferencia del caso más desfavorable suele producirse en condiciones de lluvia intensa.

APÉNDICE 1

AL ANEXO 1

Obtención del ángulo de alineación relativa β para polarización lineal

El presente Apéndice define el ángulo de polarización de una onda radioeléctrica polarizada linealmente y describe un método para calcular los ángulos de polarización y los ángulos de alineación relativa para los casos de interferencia de enlace descendente y enlace de conexión. Es necesario determinar los ángulos de alineación relativa para calcular la ganancia equivalente definida por la ecuación (1).

1 Definición de componentes principales y contrapolares de una onda radioeléctrica con polarización lineal

Por regla general, la polarización de una onda electromagnética radiada en una dirección determinada se define como la curva trazada por el vector de campo eléctrico instantáneo en un emplazamiento fijo, a una frecuencia concreta y en un plano perpendicular al sentido de propagación observado a lo largo de la dirección de propagación. Cuando no se indica el sentido, la polarización se considera que es la de la dirección de ganancia máxima. En la práctica, la polarización de la energía radiada varía con el sentido desde el centro de la antena de forma que distintas partes del diagrama de radiación pueden tener diferentes polarizaciones. La polarización puede ser lineal, circular o elíptica. Si el vector que describe el campo eléctrico en un punto del espacio en función del tiempo se dirige siempre a lo largo de una línea, se dice que el campo está linealmente polarizado. En el caso más general, la figura que traza el campo eléctrico es una elipse y entonces se dice que el campo tiene una polarización elíptica. Las polarizaciones lineal y circular son casos especiales de la polarización elíptica cuando la elipse se convierte en una línea o en un círculo, respectivamente. Para los cálculos de interferencia, tiene interés la polarización de campo lejano de la antena, donde la componente del campo E en el sentido de la propagación es despreciable, de forma que el vector de campo eléctrico neto puede descomponerse en dos componentes ortogonales (que varían en el tiempo) contenidas en un plano normal a la dirección de propagación radial saliente. En el caso de polarización lineal, deben definirse en primer lugar las direcciones de referencia de estas componentes ortogonales antes de determinar el ángulo de polarización. Una de estas direcciones de referencia se designa como dirección de la componente de polarización principal, mientras que la dirección de referencia ortogonal recibe el nombre de dirección de la componente contrapolar. Sorprendentemente, no existe una definición universalmente aceptada para estas direcciones de referencia. En el artículo «The Definition of Cross Polarization» de Arthur C. Ludwig aparecido en la publicación Transactions on Antennas and Propagation del IEEE de enero de 1973 aparecen algunas definiciones alternativas de las direcciones de las componentes principal y contrapolar. En este artículo, Ludwig señala las expresiones de los vectores unitarios para tres definiciones de contrapolarización distintas en términos de un sistema de coordenadas esféricas para el diagrama de radiación de antena, que es el sistema de coordenadas normalmente adoptado para las mediciones de antenas. Más adelante se describen brevemente estas tres definiciones. En el presente Apéndice el vector unitario $\boldsymbol{u_p}$ representa la dirección de referencia para la componente de polarización principal del vector de campo eléctrico, mientras que $\boldsymbol{u_c}$ representa la dirección de la componente contrapolar. En primer lugar, es conveniente considerar la transformación de los vectores entre los diversos sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y esféricas).

1.1 Transformación de vectores entre los sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas

La Fig. 1 representa tres sistemas de coordenadas y sus vectores unitarios asociados. La matriz de transformación para transformar un vector $\underline{\mathbf{A}}$ expresado en componentes rectangulares (A_x, A_y, A_z) en un vector expresado en componentes cilíndricas (A_ρ, A_φ, A_z) es la siguiente:

$$M_{rc} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La matriz de transformación para transformar un vector $\underline{\mathbf{A}}$ expresado en componentes cilíndricas (A_ρ, A_φ, A_z) en un vector expresado en componentes esféricas (A_r, A_θ, A_φ) es la siguiente:

$$M_{cs} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

La matriz de transformación para transformar un vector $\underline{\mathbf{A}}$ expresado en componentes rectangulares (A_x, A_y, A_z) en un vector expresado en componentes esféricas (A_r, A_θ, A_φ) es por consiguiente:

$$M_{rs} = M_{cs}\, M_{rc} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

de forma que, en términos de componentes:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

Como la matriz es ortogonal, la matriz para realizar una transformación de componentes esféricas (A_r, A_θ, A_φ) a componentes rectangulares (A_x, A_y, A_z) es simplemente la matriz traspuesta:

$$M_{sr} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

de forma que:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \tag{8}$$

Los vectores unitarios ($\boldsymbol{u_r}$, $\boldsymbol{u_\theta}$ y $\boldsymbol{u_\varphi}$) del sistema de coordenadas esféricas son, en coordenadas esféricas, los siguientes:

$$\boldsymbol{u_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u_\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u_r} = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\theta \cos\varphi \\ \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta\, \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\theta \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_\varphi} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

en coordenadas rectangulares.

1.2 Definiciones alternativas de las direcciones de referencia de la componente de polarización principal y de la componente contrapolar

Ludwig describe 3 definiciones para la polarización cruzada a partir de los vectores unitarios $\boldsymbol{i_{ref}}$ e $\boldsymbol{i_{cross}}$ (que aquí se denominan $\boldsymbol{u_p}$ y $\boldsymbol{u_c}$) de forma que el producto puntual del vector campo eléctrico $\underline{\mathbf{E}}$ (t, θ, φ) a lo largo de alguna dirección (θ, φ) en el diagrama de antena de campo lejano con estos vectores unitarios define, respectivamente, las componentes de polarización principal y contrapolar. En la dirección especificada en los ángulos de coordenadas esféricas (θ, φ), las componentes de polarización principal y contrapolar del vector campo eléctrico vienen dadas, por consiguiente, por:

$$E_p(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{u_p} \qquad E_c(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{u_c} \tag{11}$$

(Obsérvese que, por regla general, $\underline{\mathbf{E}}$, $\boldsymbol{u_p}$ y $\boldsymbol{u_c}$ variarán a su vez con θ y φ.)

En la Fig. 2 se representan los diagramas de polarización correspondientes a las tres definiciones para el caso en que la antena transmite con polarización horizontal a lo largo del eje de su haz principal.

En la primera definición, el vector unitario de referencia $\boldsymbol{u_p}$ se considera simplemente uno de los vectores base rectangulares del sistema de coordenadas del diagrama de antena mientras que $\boldsymbol{u_c}$ es otro de los vectores unitarios base. Por ejemplo, puede definirse:

$$\boldsymbol{u_p} = \boldsymbol{y_a} \qquad \boldsymbol{u_c} = \boldsymbol{x_a} \tag{12}$$

siendo $\boldsymbol{y_a}$ y $\boldsymbol{x_a}$ vectores unitarios en los sentidos positivos de y y x.

A partir de las matrices de transformación indicadas anteriormente, las componentes de coordenadas esféricas de estos vectores unitarios vienen dadas por las expresiones:

$$\boldsymbol{u_p} = \boldsymbol{y_a} = \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\varphi \cdot \boldsymbol{u_r} + \cos\theta \cdot \text{sen}\,\varphi \cdot \boldsymbol{u_\theta} + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{u_\varphi} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{u_c} = \boldsymbol{x_a} = \text{sen}\,\theta \cdot \cos\varphi \cdot \boldsymbol{u_r} + \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \boldsymbol{u_\theta} - \text{sen}\,\varphi \cdot \boldsymbol{u_\varphi} \tag{14}$$

Ludwig observa que esta definición da lugar a inexactitudes, puesto que en la práctica la polarización del campo radiado varía con la dirección desde el centro de la antena y señala igualmente que el campo lejano de la antena no es plano sino tangente a una superficie esférica. Por consiguiente, la segunda y tercera definiciones de Ludwig suponen vectores unitarios tangentes a una esfera. En su segunda definición, la dirección de polarización principal se elige de forma que coincida con uno de los vectores unitarios en coordenadas esféricas y la dirección contrapolar se elige de forma que coincida con otro de los vectores unitarios esféricos. Por ejemplo, puede elegirse:

$$\boldsymbol{u_p} = \boldsymbol{u}_\varphi \qquad \boldsymbol{u_c} = \boldsymbol{u}_\theta \tag{15}$$

En la tercera definición de Ludwig, las direcciones de las componentes principal y contrapolar se definen de acuerdo a la forma de medir normalmente el diagrama de polarización de una antena. En la Fig. 3 se describe el método de medición normalizado. El ángulo de polarización de la sonda β (ángulo entre $\boldsymbol{u}_\varphi$ y $\boldsymbol{u_p}$) se mide desde $\mathbf{u}_\varphi$ hacia $\boldsymbol{u}_\theta$. Cuando el campo transmitido tiene una polarización horizontal lineal (es decir, en el sentido +y) a lo largo del eje de puntería (θ = 0°), β pasa a ser igual a φ. Por consiguiente, las componentes principal y contrapolar en la dirección θ, φ vienen dadas por:

$$E_p(t) = \underline{\mathbf{E}}(t) \cdot \boldsymbol{u_p} \qquad E_c(t) = \underline{\mathbf{E}}(t) \cdot \boldsymbol{u_c} \tag{16}$$

de forma que el campo eléctrico, $\underline{\mathbf{E}}(t)$, en dicha dirección pueda expresarse como:

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = E_p(t) \cdot \boldsymbol{u_p} + E_c(t) \cdot \boldsymbol{u_c} = E_{pm} \cdot \cos(\omega t) \cdot \boldsymbol{u_p} + E_{cm} \cdot \cos(\omega t + \delta) \cdot \boldsymbol{u_c} \tag{17}$$

Ésta es la expresión general para una onda con polarización elíptica. Obsérvese que para que $\underline{\mathbf{E}}(t)$ esté linealmente polarizada, la fase de tiempo δ entre las dos componentes lineales ortogonales debe ser cero (o un múltiplo entero de π). Sin embargo, no es preciso que sean iguales las amplitudes de las componentes E_{pm} y E_{cm}.

Los vectores unitarios principal y contrapolar, $\boldsymbol{u_p}$ y $\boldsymbol{u_c}$, pueden expresarse en función de los vectores unitarios de coordenadas esféricas, $\boldsymbol{u}_\theta$ y $\boldsymbol{u}_\varphi$, y el ángulo β = φ (cuando el campo transmitido está polarizado en el sentido +y para θ = 0°) por:

$$\boldsymbol{u_p} = \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{u}_\theta + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{u}_\varphi \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u_c} = \cos\varphi \cdot \boldsymbol{u}_\theta - \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{u}_\varphi \tag{19}$$

Por último, expresando $\boldsymbol{u}_\theta$ y $\boldsymbol{u}_\varphi$ en coordenadas rectangulares como se ha indicado antes, pueden escribirse $\boldsymbol{u_p}$ y $\boldsymbol{u_c}$ en función de los vectores unitarios rectangulares del sistema de coordenada de la antena ($\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{y_a}, \boldsymbol{z_a}$) de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{u_p} = \operatorname{sen}\varphi \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} + \cos\varphi \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 \\ -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$= (\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) \cdot \boldsymbol{x_a} + (\cos\theta\operatorname{sen}(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2) \cdot \boldsymbol{y_a} - (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) \cdot \boldsymbol{z_a}$$

$$\boldsymbol{u_c} = \cos\varphi \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\varphi \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos(\varphi)^2 + \operatorname{sen}(\varphi)^2 \\ \cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$= (\cos\theta\cos(\varphi)^2 + \operatorname{sen}(\varphi)^2) \cdot \boldsymbol{x_a} + (\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) \cdot \boldsymbol{y_a} - (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) \cdot \boldsymbol{z_a}$$

Éstas son las expresiones para los vectores unitarios principal y contrapolar en el caso de una antena de satélite transmitiendo un campo con polarización lineal horizontal paralelo a $\boldsymbol{y_a}$ (es decir, un ángulo de polarización de $\gamma = 0°$). Ello significa que la dirección de polarización principal $\boldsymbol{u_p}$ se encuentra en la dirección de $\boldsymbol{y_a}$ (que está en el plano ecuatorial) sobre el eje de puntería de la antena para $\theta = 0°$ (como puede verse en la expresión anterior para $\boldsymbol{u_p}$ con $\theta = 0°$). Obsérvese que para ángulos fuera del eje, $\boldsymbol{u_p}$ no es paralelo a $\boldsymbol{y_a}$ puesto que su producto puntual no es igual a uno. Cuando el satélite no transmite con polarización horizontal, las direcciones principal y contrapolar para un ángulo de polarización transmitido γ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_p} &= \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \cdot \boldsymbol{u_\theta} + \cos(\varphi + \gamma) \cdot \boldsymbol{u_\varphi} \\ \boldsymbol{u_c} &= \cos(\varphi + \gamma) \cdot \boldsymbol{u_\theta} - \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \cdot \boldsymbol{u_\varphi} \end{aligned} \tag{22}$$

Por consiguiente, las componentes $\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{y_a}, \boldsymbol{z_a}$ son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_p}(\gamma) &= \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi \\ -\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix} + \cos(\varphi + \gamma) \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\,\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi\, \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) - \mathrm{sen}\,\varphi \cos(\varphi + \gamma) \\ \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi\, \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) + \cos\varphi \cos(\varphi + \gamma) \\ -\mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_c}(\gamma) &= \cos(\varphi + \gamma) \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi \\ -\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix} - \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\,\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \cos(\varphi + \gamma) + \mathrm{sen}\,\varphi\, \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \\ \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi \cos(\varphi + \gamma) - \cos\varphi\, \mathrm{sen}(\varphi + \gamma) \\ -\mathrm{sen}\,\theta \cos(\varphi + \gamma) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

Esta última definición para las direcciones de referencia de la polarización será la supuesta en los análisis por las razones expuestas en el artículo de Ludwig.

2 Descripción del sistema de coordenadas y matrices de transformación

Para realizar los cálculos del ángulo de polarización, se considerarán los cuatro tipos de sistemas de coordenadas ortonormales cartesianas representados en la Fig. 4; a saber: el sistema de coordenadas de punto del eje de puntería (denominado $\mathbf{R_b}$), el sistema de coordenadas de la estación terrestre ($\mathbf{R_p}$), el sistema de coordenadas de la antena del satélite ($\mathbf{R_a}$) y el sistema de coordenadas centrado en la Tierra ($\mathbf{R_g}$). Para calcular la interferencia, pueden considerarse conjuntamente los sistemas $\mathbf{R_b}$, $\mathbf{R_p}$ y $\mathbf{R_a}$ constituyendo el sistema del satélite «deseado». De forma similar, si está presente un sistema de satélite «interferente», contará con su propio satélite ($\mathbf{R_{a2}}$), estación terrena ($\mathbf{R_{p2}}$) y punto del eje de puntería ($\mathbf{R_{b2}}$), de forma que los sistemas $\mathbf{R_{b2}}$, $\mathbf{R_{p2}}$ y $\mathbf{R_{a2}}$ combinados constituyen el sistema de satélite «interferente». El sistema centrado en la tierra, $\mathbf{R_g}$, constituye un sistema intermedio para analizar una transformación entre cualquier par de los sistemas anteriores. En este punto se desarrollan las matrices de transformación para transformar un vector del sistema centrado en la tierra, $\mathbf{R_g}$, en cada uno de los otros sistemas. La determinación de estas matrices de transformación es fundamental para los cálculos puesto que una vez obtenidas es elemental el cálculo de los ángulos de polarización y los ángulos de alineación relativa. Para ayudar a comprender el método se presenta un ejemplo de cálculo.

2.1 Notación de los símbolos

A continuación se indican las definiciones de los símbolos así como los valores elegidos arbitrariamente para el cálculo del ejemplo:

Radio de la OSG (expresado en radios de la Tierra):	k	$= 6{,}61072$
Latitud de la estación terrena deseada (grados):	ψ_p	$= 20$
Longitud de la estación terrena deseada (grados):	λ_p	$= -80$
Latitud del punto del eje de puntería del satélite deseado (grados):	ψ_b	$= 10$
Longitud del punto del eje de puntería del satélite deseado (grados):	λ_b	$= -90$
Longitud del satélite deseado (grados):	λ_a	$= -100$
Latitud de la estación terrena interferente (grados):	ψ_{p2}	$= 45$
Longitud de la estación terrena interferente (grados):	λ_{p2}	$= -115$
Latitud del punto del eje de puntería del satélite interferente (grados):	ψ_{b2}	$= 35$
Longitud del punto del eje de puntería del satélite interferente (grados):	λ_{b2}	$= -85$
Longitud del satélite interferente (grados):	λ_{a2}	$= -110$

Para mayor claridad, los vectores unitarios aparecen en ***negrita y bastardilla***, los vectores con magnitudes distintas de 1 aparecen en **<u>negritas y subrayados</u>**, los vectores que representan las coordenadas de un punto en el espacio tridimensional aparecen simplemente <u>subrayados</u> y las matrices de transformación entre sistemas de coordenadas aparecen en **MAYÚSCULA Y NEGRITA**. Se supone que la unidad de distancia es un radio de la Tierra (6378,153 km).

NOTA – Para que la notación de los símbolos sea más clara se han utilizado excepcionalmente caracteres específicos y, según el periférico que se utilice, esos mismos caracteres podrían ser distintos de los que figuran en el texto publicado.

2.2 Sistema centrado en la Tierra $\mathbf{R_g}$

El sistema centrado en la Tierra tiene su origen en el centro de la misma, con el eje +z apuntando al Norte, el eje +x apuntando hacia el satélite y el eje +y apuntando 90° al Este del eje +x. Por consiguiente, sus vectores unitarios en los componentes $\mathbf{R_g}$ son:

$$\boldsymbol{x_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{z_g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y_g} = \boldsymbol{z_g} \times \boldsymbol{x_g} \qquad \boldsymbol{y_g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

siendo $\boldsymbol{z_g} \times \boldsymbol{x_g}$ el producto cruzado vectorial. Obsérvese que tanto $\boldsymbol{x_g}$ como $\boldsymbol{y_g}$ se encuentran en el plan ecuatorial.

2.3 Sistema centrado en la estación terrena deseada R_p

La vertical local en un punto determinado de la Tierra viene definida por el vector entre el centro de la Tierra y el punto de la Tierra considerado. En consecuencia, el vector unitario a lo largo de la vertical local en la estación terrena P tiene los siguientes componentes centrados en la Tierra:

$$\boldsymbol{lv} = \begin{bmatrix} \cos\psi_p \cos(\lambda_p - \lambda_s) \\ \cos\psi_p \,\mathrm{sen}(\lambda_p - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_p \end{bmatrix} \tag{26}$$

El punto sobre la Tierra P, el punto del eje de puntería B y el satélite S tienen las siguientes coordenadas en el sistema centrado en la Tierra:

$$\underline{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \cos\psi_p \cos(\lambda_p - \lambda_s) \\ \cos\psi_p \,\mathrm{sen}(\lambda_p - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_p \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \cos\psi_b \cos(\lambda_b - \lambda_s) \\ \cos\psi_b \,\mathrm{sen}(\lambda_b - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_b \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Consiguientemente, las componentes en el sistema centrado en la Tierra del vector de posición $\underline{\mathbf{PS}}$, que va desde la estación terrestre P al satélite S, son:

$$\underline{\mathbf{PS}} = \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{P}} \qquad \underline{\mathrm{PS}} = \begin{pmatrix} 5{,}728 \\ -0{,}321 \\ -0{,}342 \end{pmatrix} \tag{28}$$

El sistema de coordenadas de la estación terrena tiene su origen en la propia estación terrena y su eje +z dirigido hacia el satélite. Por lo tanto, el vector unitario a lo largo de su eje +z es:

$$\boldsymbol{z_p} = \frac{\underline{\mathbf{PS}}}{|\underline{\mathrm{PS}}|} \qquad \boldsymbol{z_p} = \begin{pmatrix} 0{,}997 \\ -0{,}056 \\ -0{,}06 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Su vector unitario en el eje x está dirigido a la izquierda de un observador situado en la estación terrena y frente al satélite (es decir, su sentido viene dado por el producto cruzado vectorial de la vertical local $\boldsymbol{lv}$ por el vector unitario $\boldsymbol{z_p}$):

$$\boldsymbol{x_p} = \frac{\boldsymbol{lv} \times \boldsymbol{z_p}}{|\boldsymbol{lv} \times \boldsymbol{z_p}|} \qquad \boldsymbol{x_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}729 \\ -0{,}685 \end{pmatrix} \tag{30}$$

(Obsérvese que $\boldsymbol{x_p}$ no puede determinarse mediante la ecuación anterior para el caso especial en el que el punto de la Tierra está situado en el punto subsatelital, puesto que $\boldsymbol{lv}$ y $\boldsymbol{z_p}$ son colineales. En esas circunstancias, simplemente se elige $\boldsymbol{x_p}$ igual a $\boldsymbol{y_g}$.)

Por último, el vector unitario en el sentido y positivo para completar el sistema dextrógiro se determina mediante el producto cruzado:

$$\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{z_p} \times \boldsymbol{x_p} \qquad \boldsymbol{y_p} = \begin{pmatrix} 0{,}082 \\ 0{,}683 \\ 0{,}726 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Puede verificarse que estos vectores unitarios constituyen un sistema dextrógiro cartesiano comprobando sus productos puntuales (es decir, dos vectores son perpendiculares entre sí únicamente si su producto puntual es cero).

$$\boldsymbol{x_p} \times \boldsymbol{y_p} = 0 \qquad \boldsymbol{x_p} \times \boldsymbol{z_p} = 0 \qquad \boldsymbol{y_p} \times \boldsymbol{z_p} = 0 \tag{32}$$

Cabe señalar además que, por regla general, $\boldsymbol{y_p}$ no se encuentra en la misma dirección que la vertical local $\boldsymbol{lv}$. De hecho, en este caso, el ángulo entre ambos vectores se determina a partir de la definición del producto puntual, es decir:

$$a\cos(\boldsymbol{lv} \times \boldsymbol{y_p}) = 57{,}325° \tag{33}$$

A continuación puede determinarse la matriz de transformación $\mathbf{M_p}$ para transformar un vector ***desde*** el sistema centrado en la Tierra, $\mathbf{R_g}$, al sistema centrado en la estación terrena, $\mathbf{R_p}$. Las filas de la matriz son las componentes x, y, y z de los vectores unitarios del sistema de la estación terrena. Por consiguiente:

$$\mathbf{M_p} = \begin{bmatrix} x_{p1} & x_{p2} & x_{p3} \\ y_{p1} & y_{p2} & y_{p3} \\ z_{p1} & z_{p2} & z_{p3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}729 & -0{,}685 \\ 0{,}082 & 0{,}683 & 0{,}726 \\ 0{,}997 & -0{,}056 & -0{,}06 \end{pmatrix} \tag{34}$$

donde $\boldsymbol{x_{p2}}$, por ejemplo, es la componente y del vector unitario $\boldsymbol{x_p}$.

Cabe recordar que una transformación de coordenadas ***no modifica la magnitud, el sentido o lo que representa un vector, simplemente cambia la base del mismo***. La expresión de un vector en las coordenadas de un sistema particular ***no supone*** que el vector tenga su cola en el origen de dicho sistema. Para expresar *las componentes de un vector* en el sistema centrado en la estación terrena cuando se especifica en el sistema centrado en la Tierra, se utiliza la ecuación matricial siguiente:

$$\underline{\mathbf{V_p}} = \mathbf{M_p} \cdot \underline{\mathbf{V_g}} \tag{35}$$

siendo $\underline{\mathbf{V_g}}$ el vector con las componentes expresadas en el sistema centrado en Tierra, $\mathbf{R_g}$, y $\underline{\mathbf{V_p}}$ el vector con las componentes expresadas en el sistema centrado en la estación terrena, $\mathbf{R_p}$. Para llevar a cabo la transformación inversa, del sistema $\mathbf{R_p}$ al sistema $\mathbf{R_g}$, es necesario determinar la inversa de la matriz $\mathbf{M_p}$. Como todas las matrices de transformación entre sistemas de coordenadas rectangulares son ortogonales, la matriz inversa es simplemente igual a la matriz traspuesta $\mathbf{M_p^T}$. Por consiguiente, la transformación inversa es:

$$\underline{\mathbf{V_g}} = \mathbf{M_p^T} \cdot \underline{\mathbf{V_p}} \tag{36}$$

Obsérvese que si se quieren determinar las *coordenadas de un punto* $\underline{W'}(x', y', z')$ en el sistema centrado en la estación terrena cuando se especifica como $\underline{W}(x, y, z)$ en el sistema centrado en la Tierra, se utiliza la fórmula:

$$\underline{W'} = \mathbf{M_p} \cdot (\underline{W} - \underline{P}) \tag{37}$$

siendo P las coordenadas centradas en la Tierra de la estación terrena determinadas en la ecuación (27).

2.4 Sistema centrado en la estación terrena interferente $\mathbf{R_{p2}}$

Se utiliza el mismo procedimiento que antes para determinar la matriz de transformación con objeto de transformar las coordenadas de un sistema centrado en la Tierra, $\mathbf{R_g}$, a las coordenadas de un sistema centrado en la estación terrena interferente, $\mathbf{R_{p2}}$.

El vector unitario a lo largo de la vertical local $\boldsymbol{lv_2}$ en la estación terrena interferente P_2 tiene las siguientes componentes en el sistema centrado en la Tierra ($\mathbf{R_g}$):

$$\boldsymbol{lv_2} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{p2}\cos(\lambda_{p2} - \lambda_s) \\ \cos\psi_{p2}\,\mathrm{sen}(\lambda_{p2} - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_{p2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{lv_2} = \begin{pmatrix} 0{,}683 \\ -0{,}183 \\ 0{,}707 \end{pmatrix} \tag{38}$$

(Obsérvese que se utiliza λ_g y no λ_{a2} puesto que el eje x de referencia para el sistema $\mathbf{R_g}$ se encuentra dirigido hacia el satélite «deseado» S.)

Las coordenadas relativas al centro de la Tierra del punto de la Tierra interferente P_2, del punto del eje de puntería del satélite interferente B_2 y del satélite interferente S_2 son:

$$\underline{P_2} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{p2}\cos(\lambda_{p2} - \lambda_s) \\ \cos\psi_{p2}\,\mathrm{sen}(\lambda_{p2} - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_{p2} \end{bmatrix} \qquad \underline{B_2} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{b2}\cos(\lambda_{b2} - \lambda_s) \\ \cos\psi_{b2}\,\mathrm{sen}(\lambda_{b2} - \lambda_s) \\ \mathrm{sen}\,\psi_{b2} \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\underline{S_2} = \begin{bmatrix} k\cos(\lambda_{s2} - \lambda_s) \\ k\,\mathrm{sen}(\lambda_{s2} - \lambda_s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los componentes con respecto al centro de la Tierra del vector de posición $\underline{\mathbf{P_2S_2}}$ desde la estación terrena P_2 al satélite S_2 son:

$$\underline{\mathbf{P_2S_2}} = \underline{\mathbf{S_2}} - \underline{\mathbf{P_2}} \qquad \underline{P_2S_2} = \begin{pmatrix} 5{,}827 \\ -0{,}965 \\ -0{,}707 \end{pmatrix} \qquad \left|\underline{P_2S_2}\right| = 5{,}949 \tag{40}$$

El sistema de coordenadas centrado en la estación terrena interferente tiene su origen en la estación terrena P_2 y su eje +z está dirigido hacia el satélite S_2. Por consiguiente, el vector unitario a lo largo de su eje +z es:

$$\boldsymbol{z_{p2}} = \frac{\underline{\mathbf{P_2S_2}}}{|\underline{P_2S_2}|} \qquad \boldsymbol{z_{p2}} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ -0{,}162 \\ 0{,}119 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Su vector unitario en el eje x está dirigido hacia la izquierda de un observador situado en la estación terrena y frente al satélite (es decir, su sentido viene dado por producto cruzado vectorial de la vertical local $\boldsymbol{lv_2}$ por el vector unitario $\boldsymbol{z_{p2}}$).

$$\boldsymbol{x_{p2}} = \frac{\boldsymbol{lv_2} \times \boldsymbol{z_{p2}}}{|\boldsymbol{lv_2} \times \boldsymbol{z_{p2}}|} \qquad \boldsymbol{x_{p2}} = \begin{pmatrix} 0{,}173 \\ 0{,}981 \\ 0{,}087 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Por último, el vector unitario, la dirección y positiva para completar el sistema dextrógiro se determina efectuando el producto cruzado:

$$\boldsymbol{y_{p2}} = \boldsymbol{z_{p2}} \times \boldsymbol{x_{p2}} \qquad \boldsymbol{y_{p2}} = \begin{pmatrix} 0{,}103 \\ -0{,}106 \\ 0{,}989 \end{pmatrix} \tag{43}$$

A continuación se puede determinar la matriz de transformación de $\mathbf{M_{p2}}$ para transformar un vector *del* sistema centrado en la Tierra, $\mathbf{R_g}$, *al* sistema centrado en la estación terrena interferente $\mathbf{R_{p2}}$.

$$\mathbf{M_{p2}} = \begin{bmatrix} x_{p2_1} & x_{p2_2} & x_{p2_3} \\ y_{p2_1} & y_{p2_2} & y_{p2_3} \\ z_{p2_1} & z_{p2_2} & z_{p2_3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M_{p2}} = \begin{pmatrix} 0{,}173 & 0{,}981 & 0{,}087 \\ 0{,}103 & -0{,}106 & 0{,}989 \\ 0{,}98 & -0{,}162 & -0{,}119 \end{pmatrix} \tag{44}$$

2.5 Sistema de coordenadas centrado en la antena del satélite deseado $\mathbf{R_a}$

El vector de posición desde el punto del eje de puntería B al satélite S tiene los siguientes componentes centrados en la Tierra:

$$\underline{\mathbf{BS}} = \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{B}} \qquad \underline{\mathrm{BS}} = \begin{pmatrix} 5{,}641 \\ -0{,}171 \\ -0{,}174 \end{pmatrix} \qquad \left|\underline{\mathrm{BS}}\right| = 5{,}646 \tag{45}$$

Por lo tanto, el vector unitario a lo largo de este vector de posición tiene las siguientes componentes centradas en la Tierra:

$$z_b = \frac{\underline{\mathbf{BS}}}{|\underline{\mathrm{BS}}|} \qquad z_b = \begin{pmatrix} 0{,}999 \\ -0{,}03 \\ -0{,}031 \end{pmatrix} \tag{46}$$

El sistema de coordenadas de la antena del satélite, $\mathbf{R_a}$, tiene su origen *en el satélite*, con el eje +z apuntado a lo largo del eje de puntería de la antena hacia el punto B y el eje +y dirigido al Este *en el plano ecuatorial* (véase la Fig. 4.) En consecuencia, el vector unitario a lo largo del eje +z es simplemente:

$$z_a = -z_b \qquad z_a = \begin{pmatrix} -0{,}999 \\ 0{,}03 \\ 0{,}031 \end{pmatrix} \tag{47}$$

El vector unitario a lo largo del eje +y, y_a, es perpendicular a z_a y a z_g para que se encuentre en el plano ecuatorial. Por consiguiente, utilizando el producto cruzado vectorial se obtiene:

$$y_a = \frac{z_a \times z_g}{\left|z_a \times z_g\right|} \qquad y_a = \begin{pmatrix} 0{,}0303 \\ 0{,}99954 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|y_a\right| = 1 \tag{48}$$

Y para completar el sistema cartesiano dextrógiro:

$$x_a = y_a \times z_a \qquad x_a = \begin{pmatrix} 0{,}031 \\ -9{,}32 \times 10^{-4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left|x_a\right| = 1 \tag{49}$$

Con objeto de verificar que se trata de un sistema dextrógiro y que y_a se encuentra en el plano ecuatorial, se calculan los productos puntuales siguientes:

$$\begin{aligned} x_a \times y_a &= 0 \\ x_a \times z_a &= 0 \qquad y_a \times z_g \\ y_a \times z_a &= 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Consiguientemente, la transformación desde un sistema centrado en la tierra $\mathbf{R_g}$ al sistema de la antena de satélite deseado $\mathbf{R_a}$ se realiza mediante la matriz:

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} x_{a1} & x_{a2} & x_{a3} \\ y_{a1} & y_{a2} & y_{a3} \\ z_{a1} & z_{a2} & z_{a3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M_A} = \begin{pmatrix} 0{,}031 & 9{,}32 \times 10^{-4} & 1 \\ 0{,}03 & 1 & 0 \\ -0{,}999 & 0{,}03 & 0{,}031 \end{pmatrix} \tag{51}$$

2.6 Sistema de coordenadas centrado en la antena del satélite interferente $\mathrm{R_{a2}}$

Para obtener la matriz de transformación, se sigue el mismo procedimiento que en el § 2.5.

El vector de posición desde el punto del eje de puntería B_2 al satélite interferente S_2 tiene las siguientes componentes centradas en la Tierra:

$$\underline{\mathbf{B_2 S_2}} = \underline{\mathbf{S_2}} - \underline{\mathbf{B_2}} \qquad \underline{B_2 S_2} = \begin{pmatrix} 5{,}719 \\ -1{,}36 \\ -0{,}574 \end{pmatrix} \qquad \left|\underline{B_2 S_2}\right| = 5{,}906 \tag{52}$$

El vector unitario a lo largo de su vector de posición tiene, por lo tanto, las siguientes componentes centradas en la Tierra:

$$z_{b2} = \frac{\underline{\mathbf{B_2 S_2}}}{|\underline{B_2 S_2}|} \qquad z_{b2} = \begin{pmatrix} 0{,}968 \\ -0{,}23 \\ -0{,}097 \end{pmatrix} \qquad |z_{b2}| = 1 \tag{53}$$

El sistema de coordenadas de la antena del satélite interferente, $\mathbf{R_{a2}}$, tiene su origen *en el satélite* S_2, con el eje +z apuntando a lo largo del eje de puntería de la antena hacia B_2 y el eje +y dirigido al Este *en el plano ecuatorial*. Por consiguiente, el vector unitario a lo largo del eje z es simplemente:

$$z_{a2} = -z_{b2} \qquad z_{a2} = \begin{pmatrix} -0{,}968 \\ 0{,}23 \\ 0{,}097 \end{pmatrix} \qquad |z_{a2}| = 1 \tag{54}$$

El vector unitario a lo largo del eje y, y_{a2}, es perpendicular a z_{a2} y también a z_g para que se encuentre en el plano ecuatorial. En consecuencia, utilizando el producto cruzado vectorial se tiene:

$$y_{a2} = \frac{z_{a2} \times z_g}{\left|z_{a2} \times z_g\right|} \qquad y_{a2} = \begin{pmatrix} 0{,}231 \\ 0{,}973 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |y_{a2}| = 1 \tag{55}$$

Y para completar el sistema cartesiano dextrógiro:

$$x_{a2} = y_{a2} \times z_{a2} \qquad x_{a2} = \begin{pmatrix} 0{,}094 \\ -0{,}022 \\ 0{,}995 \end{pmatrix} \qquad |x_{a2}| = 1 \tag{56}$$

En consecuencia, la transformación desde un sistema centrado en la Tierra, $\mathbf{R_g}$, al sistema centrado en la antena del satélite interferente, $\mathbf{R_{a2}}$, se realiza por la matriz:

$$\mathbf{M_{A2}} = \begin{bmatrix} x_{a2_1} & x_{a2_2} & x_{a2_3} \\ y_{a2_1} & y_{a2_2} & y_{a2_3} \\ z_{a2_1} & z_{a2_2} & z_{a2_3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M_{A2}} = \begin{pmatrix} 0{,}094 & -0{,}022 & 0{,}995 \\ 0{,}231 & 0{,}973 & 0 \\ -0{,}968 & 0{,}23 & 0{,}097 \end{pmatrix} \tag{57}$$

Con lo que ya se han obtenido todas las matrices de transformación necesarias.

3 Cálculo de los ángulos de polarización y de los ángulos de alineación relativa

Utilizando las anteriores matrices de transformación, pueden determinarse los ángulos de alineación relativa β_d y β_u para los casos de interferencia de enlaces descendente y ascendente, respectivamente.

3.1 Cálculo del ángulo de alineación relativa β_d para el caso del enlace descendente

En este caso es preciso determinar el ángulo de alineación entre las señales con polarización lineal en la estación terrena «deseada» P transmitidos desde el satélite «deseado», S, y un satélite interferente, S_2. Se supone que la estación terrena deseada P está apuntada hacia su propio satélite S. El problema puede dividirse en tres pasos:

Paso 1: Se calcula el ángulo de polarización ε_{d1} de la onda recibida del satélite deseado, S, transformando el vector de polarización principal transmitido, $\boldsymbol{u_p}$, definido en el sistema de coordenadas de la antena del satélite deseado, $\mathbf{R_a}$, al sistema de coordenadas $\mathbf{R_p}$ de la estación terrena deseada.

Paso 2: Se calcula el ángulo de polarización ε_{d2} de la onda recibida del satélite interferente, S_2, transformando el vector de polarización $\boldsymbol{u_{p2}}$, definido en el sistema de coordenadas del satélite interferente $\mathbf{R_{a2}}$, al sistema de coordenadas $\mathbf{R_p}$ de la estación terrena deseada.

Paso 3: Se determina la diferencia entre ε_{d1} y ε_{d2} para calcular el ángulo de alineación β_d (véase nuevamente la Fig. 4.)

El ángulo de polarización γ de una onda transmitida desde un satélite se especifica en un plano normal al eje de puntería de la antena (es decir, normal a $\boldsymbol{z_a}$). En este plano, dicho ángulo se considera positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje +y definido por $\boldsymbol{y_a}$ mirando en dirección de $\boldsymbol{z_a}$. Por consiguiente, un ángulo $\gamma = 0°$ representa un vector de polarización situado en el plano ecuatorial. Cabe recordar que la orientación de la polarización variará con la dirección angular de forma que la polarización de referencia de la antena es la polarización del campo $\underline{\mathbf{E}}$ en el eje de puntería (es decir, para un ángulo fuera del eje $\theta = 0°$). Para una posición angular (θ, φ) en el diagrama de campo lejano, las componentes principal y contrapolar del campo $\underline{\mathbf{E}}$ se definen a lo largo de los vectores unitarios ortogonales, $\boldsymbol{u_p}$ y $\boldsymbol{u_c}$, que son tangentes a una esfera en el punto (θ, φ). Por lo tanto, al calcular ε_{d1} y ε_{d2} es preciso determinar $\boldsymbol{u_p}$ (y $\boldsymbol{u_{p2}}$ en el caso del satélite interferente) en la dirección angular de la estación terrena receptora P. En la Fig. 4 aparece el diagrama detallado del sistema de coordenadas centrado en la antena del satélite. La posición angular de la estación terrena P en el sistema de la antena de satélite viene definida por los ángulos θ_a y φ_a. El ángulo θ_a es el ángulo fuera del eje de $\boldsymbol{-z_p}$ (que apunta hacia la estación terrena P) desde el eje $\boldsymbol{z_a}$ (que es el eje de puntería de la antena del satélite). El ángulo φ_a es el ángulo de orientación de la estación terrena o ángulo acimutal. Se trata del ángulo medido en el plano normal al eje de puntería (es decir, el plano $\boldsymbol{x_a}$, $\boldsymbol{-y_a}$) entre el eje $\boldsymbol{x_a}$ y la *proyección* de $\boldsymbol{-z_p}$ en el plano $\boldsymbol{x_a}$, $-\boldsymbol{y_a}$. φ_a tiene un valor positivo en el sentido de las agujas del reloj a partir del eje $\boldsymbol{x_a}$ mirando en dirección de $\boldsymbol{z_a}$. Estos ángulos se determinan transformando en primer lugar el vector unitario $-\boldsymbol{z_p}$ al sistema $\mathbf{R_a}$ para obtener sus componentes ($\boldsymbol{x_a}, \boldsymbol{y_a}, \boldsymbol{z_a}$).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_a} \\ \boldsymbol{y_a} \\ \boldsymbol{z_a} \end{bmatrix} = \mathbf{M_A} \cdot (-\boldsymbol{z_p}) \tag{58}$$

En consecuencia, los ángulos fuera del eje y de orientación son:

$$\theta_a = a \cos \boldsymbol{z_a} \qquad \varphi_a = a \text{ tg}\left(\frac{\boldsymbol{y_a}}{\boldsymbol{x_a}}\right)$$
$$\theta_a = 2{,}212° \qquad \varphi_a = 41{,}747° \tag{59}$$

A partir de la ecuación (23) puede determinarse el vector unitario de polarización principal $\boldsymbol{u_p}$ en función de las componentes $\boldsymbol{x_a}$, $\boldsymbol{y_a}$, $\boldsymbol{z_a}$ para $\gamma = 0°$:

$$\boldsymbol{u_p} = \text{sen}\,(\varphi_a + \gamma) \begin{bmatrix} \cos\theta_a \cos\varphi_a \\ \cos\theta_a \,\text{sen}\,\varphi_a \\ -\text{sen}\,\theta_a \end{bmatrix} + \cos\,(\varphi_a + \gamma) \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\varphi_a \\ \cos\varphi_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_p} = \begin{pmatrix} -3{,}7013 \times 10^{-4} \\ 0{,}9997 \\ -0{,}0257 \end{pmatrix} \qquad |\boldsymbol{u_p}| = 1 \tag{60}$$

El vector de polarización principal $\boldsymbol{u_p}$ viene expresado en las componentes del sistema de antena $\mathbf{R_a}$. Para determinar el ángulo de polarización de la componente principal en la estación terrena de recepción, es necesario transformar $\boldsymbol{u_p}$ a las componentes de la estación terrena $\mathbf{R_p}$. Para ello se transforman en primer lugar las componentes del sistema de la antena $\mathbf{R_a}$ a las componentes centradas en la Tierra, $\mathbf{R_g}$, y a continuación se transforman las componentes $\mathbf{R_g}$ a las componentes de la estación terrena $\mathbf{R_p}$, mediante la ecuación matricial siguiente:

$$\boldsymbol{u_{pp}} = \mathbf{M_p} \cdot (\mathbf{M_A^T} \cdot \boldsymbol{u_p}) \qquad \boldsymbol{u_{pp}} = \begin{pmatrix} 0{,}728 \\ 0{,}685 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_p} \text{ en componentes } \mathbf{R_p}) \tag{61}$$

A partir de los componentes x e y de $\boldsymbol{u_{pp}}$ se determina el ángulo de polarización recibido (medido desde $\boldsymbol{x_p}$):

$$\varepsilon_{d1} = a \text{ tg}\left(\frac{\boldsymbol{u_{pp2}}}{\boldsymbol{u_{pp1}}}\right) \qquad \varepsilon_{d1} = 43{,}248° \tag{62}$$

A continuación se sigue un procedimiento similar para determinar ε_{d2}. Para hallar la posición angular de la estación terrena receptora deseada, P, con respecto al sistema centrado en la antena del satélite interferente, $\mathbf{R_{a2}}$, se calcula el vector unitario que apunta desde el satélite interferente, S_2, a la estación terrena P.

Las componentes del sistema centrado en la Tierra del vector de posición $\underline{\mathbf{PS_2}}$ desde la estación terrena P al satélite S_2 son:

$$\underline{\mathbf{PS_2}} = \underline{\mathbf{S_2}} - \underline{\mathbf{P}} \qquad \underline{\mathbf{PS_2}} = \begin{pmatrix} 5{,}627 \\ -1{,}469 \\ -0{,}342 \end{pmatrix} \qquad |\underline{\mathrm{PS_2}}| = 5{,}826 \tag{63}$$

Por consiguiente, el vector unitario a lo largo de esa dirección es:

$$\boldsymbol{z_{p2}} = \frac{\underline{\mathbf{PS_2}}}{|\underline{\mathrm{PS_2}}|} \qquad \boldsymbol{z_{p2}} = \begin{pmatrix} 0{,}966 \\ -0{,}252 \\ -0{,}059 \end{pmatrix} \qquad |\boldsymbol{z_{p2}}| = 1 \tag{64}$$

El vector unitario que apunta *desde* el satélite interferente *a* la estación terrena es simplemente $-\boldsymbol{z_{p2}}$. A continuación se aplican las fórmulas (58-62) para calcular el ángulo de polarización ε_{d2} recibido del satélite interferente:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{a2}} \\ \boldsymbol{y_{a2}} \\ \boldsymbol{z_{a2}} \end{bmatrix} = \mathbf{M_{A2}} \cdot (-\boldsymbol{z_{p2}}) \tag{65}$$

Los ángulos fuera del eje y de orientación son:

$$\theta_{a2} = a\cos \boldsymbol{z_{a2}} \qquad \varphi_{a2} = a\ \mathrm{tg}\left(\frac{\boldsymbol{y_{a2}}}{\boldsymbol{x_{a2}}}\right)$$

$$\theta_{a2} = 2{,}538^{\circ} \qquad \varphi_{a2} = 150{,}35^{\circ} \tag{66}$$

El vector unitario $\boldsymbol{u_{p2}}$, que define la dirección de polarización principal en esta parte del diagrama en términos de los componentes $\mathbf{R_{a2}}$, viene dado por la siguiente ecuación (para $\gamma_2 = 0°$.):

$$\boldsymbol{u_{p2}} = \mathrm{sen}\,(\varphi_{a2} + \gamma_2)\begin{bmatrix} \cos\theta_{a2}\cos\varphi_{a2} \\ \cos\theta_{a2}\,\mathrm{sen}\,\varphi_{a2} \\ -\mathrm{sen}\,\theta_{a2} \end{bmatrix} + \cos\,(\varphi_{a2} + \gamma_2)\begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\,\varphi_{a2} \\ \cos\varphi_{a2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}219 \times 10^{-4} \\ 1 \\ -0{,}022 \end{pmatrix} \tag{67}$$

También en este caso, el vector de polarización principal $\boldsymbol{u_{p2}}$ anterior se expresa en las componentes del sistema de antena $\mathbf{R_{a2}}$. Para determinar el ángulo de polarización ε_{d2} en la estación terrena de recepción, es preciso transformar $\boldsymbol{u_{p2}}$ a las componentes de la estación terrena $\mathbf{R_p}$. Para ello, se realiza en primer lugar una transformación de las componentes del sistema de antena $\mathbf{R_{a2}}$ a las componentes del sistema centrado en la Tierra $\mathbf{R_g}$ y, a continuación se transforma desde las componentes $\mathbf{R_g}$ a las componentes del sistema centrado en la estación terrena $\mathbf{R_p}$. Esto se realiza mediante la ecuación matricial siguiente:

$$\boldsymbol{u_{p2p}} = \mathbf{M_p} \cdot (\mathbf{M}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{A2}} \cdot \boldsymbol{u_{p2}}) \qquad \boldsymbol{u_{p2p}} = \begin{pmatrix} 0{,}706 \\ 0{,}68 \\ 0{,}198 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_{p2}} \text{ en componentes } \mathbf{R_p}) \tag{68}$$

Por lo tanto, el ángulo de polarización recibido es:

$$\varepsilon_{d2} = a \text{ tg}\left(\frac{\boldsymbol{u_{p2p_2}}}{\boldsymbol{u_{p2p_1}}}\right) \qquad \varepsilon_{d2} = 43{,}904° \tag{69}$$

El ángulo de alineación relativa β_d es simplemente:

$$\beta_d = \left|\varepsilon_{d_1} - \varepsilon_{d_2}\right| \qquad \beta_d = 0{,}655° \tag{70}$$

3.2 Cálculo del ángulo de alineación relativa β_u para el caso del enlace ascendente

En este caso es preciso determinar el ángulo de alineación entre las señales con polarización lineal en un satélite «deseado» S transmitidas desde una estación terrena «deseada» P y una estación terrena interferente P_2. Cabe señalar que la estación terrena interferente P_2 se supone que apunta a su propio satélite, que es el satélite S_2. El problema puede resolverse en tres pasos:

Paso 1: Se calcula el ángulo de polarización ε_{u1} de la onda recibida de la estación terrena «deseada» P transformando el vector de polarización transmitido $\boldsymbol{u_p}$, definido en el sistema de coordenadas centrado en la estación terrena deseada $\mathbf{R_p}$, al sistema de coordenadas centrado en la antena del satélite deseado $\mathbf{R_a}$.

Paso 2: Se calcula el ángulo de polarización ε_{u2} de la onda recibida procedente de la estación terrena interferente P_2 transformando el vector de polarización $\boldsymbol{u_{p2}}$, definido en el sistema de coordenadas centrado en la estación terrena interferente $\mathbf{R_{p2}}$, al sistema de coordenadas centrado en la antena del satélite deseado $\mathbf{R_a}$.

Paso 3: Se calcula la diferencia entre ε_{u1} y ε_{u2} para determinar el ángulo de alineación β_u.

Al determinar los vectores de polarización de las señales transmitidas por las estaciones terrenas deseada e interferente a sus respectivos satélites, se supone que están adaptadas (es decir, alineadas) a las polarizaciones recibidas fuera del eje de sus respectivas antenas de satélite. Por definición, la polarización recibida de una antena en una cierta dirección es la polarización de la señal transmitida por la antena en esa dirección. En consecuencia, para determinar los vectores de polarización de adaptación transmitidos por las estaciones terrenas, es necesario en primer lugar determinar los vectores de polarización de las señales transmitidas por los satélites en dirección a sus respectivas estaciones terrenas. A continuación se describe este método, en primer lugar para el sistema deseado y luego para el sistema interferente.

Se calcula en primer lugar el vector de polarización transmitido $\boldsymbol{u_p}$ por la estación terrena deseada P al satélite deseado S. Como se ha indicado anteriormente, se supone que está adaptado a la polarización de recepción de la antena del satélite S en dirección a P. Esto a su vez es simplemente la polarización de la señal transmitida desde S hacia P, que ya se ha determinado mediante la ecuación (61) de los cálculos del enlace descendente. Por consiguiente, a partir de dicha ecuación puede determinarse el vector de polarización de adaptación transmitido desde la estación terrena P en el enlace ascendente hacia S:

$$\boldsymbol{u_p} = \boldsymbol{u_{pp}} \qquad \boldsymbol{u_p} = \begin{pmatrix} 0{,}728 \\ 0{,}685 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_p} \text{ en componentes } \mathbf{R_p}) \tag{71}$$

Como verificación, puede transformarse este vector al sistema centrado en la antena del satélite deseado, $\mathbf{R_a}$, obteniendo:

$$\boldsymbol{u_{pa}} = \mathbf{M_A} \ (\mathbf{M_P^T} \cdot \boldsymbol{u_p}) \qquad \boldsymbol{u_{pa}} = \begin{pmatrix} -3{,}7013 \times 10^{-4} \\ 0{,}9997 \\ -0{,}0257 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_p} \text{ en componentes } \mathbf{R_a}) \tag{72}$$

Cabe señalar que este vector se adapta al transmitido desde el satélite en el enlace ascendente como muestra la ecuación (60). Como el ángulo de polarización en el sistema $\mathbf{R_a}$ se define como positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje $+y_a$ mirando en el sentido de $\boldsymbol{z_a}$, el ángulo de polarización recibido ε_{u1} en el satélite deseado S es:

$$\varepsilon_{u1} = a \ \mathrm{tg}\left(\frac{\boldsymbol{u_{pa_1}}}{\boldsymbol{u_{pa_2}}}\right) \qquad \varepsilon_{u1} = -0{,}021^\circ \tag{73}$$

(Obsérvese que debido a la forma de definir el ángulo de polarización, la relación es la componente *x* dividida por la componente *y*.)

Para determinar el vector de polarización $\boldsymbol{u_{p2}}$ transmitido por la estación terrena interferente P_2 en dirección al satélite deseado S, en primer lugar es necesario calcular el vector de polarización que la estación terrena P_2 transmite a su *propio* satélite S_2. También se supone en este caso que el vector está adaptado a la polarización recibida de S_2 en dirección a la estación terrena P_2.

Cabe recordar que las coordenadas con respecto al centro de la tierra de la estación terrena P_2 y del satélite S_2 son :

$$\underline{P_2} = \begin{pmatrix} 0{,}683 \\ -0{,}183 \\ 0{,}707 \end{pmatrix} \qquad \underline{S_2} = \begin{pmatrix} 6{,}51 \\ -1{,}148 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

En consecuencia, el vector de posición de la estación terrena interferente al satélite interferente es:

$$\underline{\mathbf{P_2S_2}} = \underline{\mathbf{S_2}} - \underline{\mathbf{P_2}} \qquad \underline{P_2S_2} = \begin{pmatrix} 5{,}827 \\ -0{,}965 \\ -0{,}707 \end{pmatrix} \tag{75}$$

y el vector unitario de la estación terrena interferente al satélite interferente es:

$$\boldsymbol{z_{p2s2}} = \frac{\mathbf{P_2S_2}}{\left|\underline{P_2S_2}\right|} \qquad \boldsymbol{z_{p2s2}} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ -0{,}162 \\ -0{,}119 \end{pmatrix} \tag{76}$$

El vector unitario *del* satélite S_2 *a* la estación terrena P_2 es simplemente:

$$-\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{p2s2}} = \begin{pmatrix} -0{,}98 \\ 0{,}162 \\ 0{,}119 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Transformando este vector al sistema de coordenadas de antena $\mathbf{R_{a2}}$ del satélite interferente S_2 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_{a2} \\ y_{a2} \\ z_{a2} \end{bmatrix} = \mathbf{M_{A2}} \cdot (-z_{p2s2}) \qquad \begin{bmatrix} x_{a2} \\ y_{a2} \\ z_{a2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}022 \\ -0{,}069 \\ 0{,}997 \end{pmatrix} \tag{78}$$

En consecuencia, los ángulos con el eje y de orientación de la estación terrena P_2 medidos con respecto al eje de puntería de la antena del satélite S_2 (dirigido hacia el punto del eje de puntería con la tierra B_2) son:

$$\begin{gathered} \theta_{a2} = a \cos \boldsymbol{z_{a2}} \qquad \varphi_{a2} = a \operatorname{tg}\left(\frac{y_{a2}}{x_{a2}}\right) \\ \theta_{a2} = 4{,}145° \qquad \varphi_{a2} = -72{,}185° \end{gathered} \tag{79}$$

A partir de la ecuación (23) se deduce que el vector unitario de polarización inicial $\boldsymbol{u_{p2s2}}$ que transmite el satélite S_2 hacia la estación terrena P_2, suponiendo que S_2 está transmitiendo con polarización horizontal (es decir, $\gamma = 0°$) en su eje de puntería de la antena es:

$$\begin{aligned} &\gamma = 0 \\ &\boldsymbol{u_{p2s2}} = \operatorname{sen}(\varphi_{a2} + \gamma) \begin{bmatrix} \cos\theta_{a2} \cos\varphi_{a2} \\ \cos\theta_{s2} \operatorname{sen}\varphi_{a2} \\ -\operatorname{sen}\theta_{a2} \end{bmatrix} + \cos(\varphi_{a2} + \gamma) \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi_{a2} \\ \cos\varphi_{a2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7{,}6183 \times 10^{-4} \\ 0{,}9976 \\ 0{,}0688 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{80}$$

El vector de polarización inicial anterior se expresa en los componentes del sistema de antena $\mathbf{R_{a2}}$. Para determinar el ángulo de polarización del componente inicial en la estación terrena receptora, P_2, es necesario transformarlo a los componentes del sistema centrado en la estación terrena $\mathbf{R_{p2}}$. Para ello se realiza en primer lugar una transformación de los componentes del sistema de antena, $\mathbf{R_{a2}}$, a los componentes del sistema centrado en la tierra, $\mathbf{R_g}$, y a continuación se transforma de los componentes del sistema $\mathbf{R_g}$ a los componentes del sistema $\mathbf{R_{p2}}$ centrado en la estación terrena. Esto se realiza mediante la ecuación matricial:

$$\boldsymbol{u_{pp}} = \mathbf{M_{p2}} \cdot (\mathbf{M_{A2}^T} \cdot \boldsymbol{u_{p2s2}}) \qquad \boldsymbol{u_{pp}} = \begin{pmatrix} 0{,}997 \\ -0{,}08 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_p} \text{ en componentes } \mathbf{R_{p2}}) \tag{81}$$

Se han calculado, pues, los componentes (x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}) del vector de polarización recibido en la estación terrena P_2 desde su satélite S_2, a partir de los cuales debe determinarse el ángulo de polarización. A este respecto es importante tener en cuenta la definición de ángulo de polarización de las direcciones de referencia que se utilizan para definirlo. Cabe recordar que en los sistemas de coordenadas centrados en la antena del satélite, el ángulo de polarización es el ángulo formado por el eje +y (que se encuentra en el plano ecuatorial) y la *proyección* del vector de polarización sobre el plano x-y (que es normal al eje de puntería de la antena), con valores positivos en el sentido contrario a las agujas del reloj mirando en dirección del eje +z (que es el eje de puntería de la antena). Por consiguiente, en los sistemas de coordenadas centrados en la antena del satélite, un vector de polarización paralelo al plano ecuatorial tiene un ángulo de polarización de 0° y un vector que se encuentra a lo largo del eje +x tiene un ángulo de polarización de 90°. Para ser coherentes, se considerará por convenio que el ángulo de polarización en los sistemas de coordenadas centrados en la estación terrena *es el mismo*, aunque sus ejes estén orientados de forma diferente. En consecuencia, los vectores de polarización orientados a lo largo de la vertical local presentarán ángulos de polarización próximos a 0° y los orientados a lo largo de la horizontal local tendrán ángulos de polarización próximos a 90°. Por lo tanto, en función de los componentes x e y de u_{pp} el ángulo de polarización recibido (medido en el sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje y_{p2} mirando en dirección al eje z_{p2}) es:

$$\varepsilon = a\ \mathrm{tg}\left(\frac{\boldsymbol{u_{pp_1}}}{\boldsymbol{u_{pp_2}}}\right) \qquad \varepsilon = 94{,}587° \tag{82}$$

(Obsérvese que la relación es el cociente entre la componente x y la componente y y se tiene en cuenta el cuadrante en la operación de arco tangente.)

Suponiendo que la señal transmitida por la estación terrena P_2 presenta una polarización adaptada a la polarización recibida del satélite S_2, se trata igualmente del ángulo de polarización de la onda transmitida en el enlace ascendente hacia el satélite S_2. Sin embargo, lo que es preciso conocer es el vector de polarización de la señal transmitida en dirección al satélite deseado S. Para determinar ese vector, es necesario calcular la posición angular de S en el sistema $\mathbf{R_{p2}}$ centrado en la estación terrena P_2. A partir de las coordenadas centradas en la tierra de la estación terrena interferente P_2 (39) y del satélite deseado (27), el vector de posición $\underline{\mathbf{P_2S}}$ de la estación terrena interferente al satélite deseado tiene los siguientes componentes en el sistema $\mathbf{R_g}$ centrado en la tierra:

$$\underline{\mathbf{P_2S}} = \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{P_2}} \qquad \underline{P_2S} = \begin{pmatrix} 5{,}928 \\ 0{,}183 \\ -0{,}707 \end{pmatrix} \qquad \left|\underline{P_2S}\right| = 5{,}973 \tag{83}$$

El vector unitario a lo largo de este vector de posición es simplemente:

$$\boldsymbol{z_{p2s}} = \frac{\underline{\mathbf{P_2S}}}{\underline{|P_2S|}} \qquad \boldsymbol{z_{p2s}} = \begin{pmatrix} 0{,}992 \\ 0{,}031 \\ -0{,}118 \end{pmatrix} \qquad \left|\boldsymbol{z_{p2s}}\right| = 1 \tag{84}$$

A continuación se realiza una transformación de los componentes del sistema $\mathbf{R_g}$ a los componentes del sistema $\mathbf{R_{p2}}$ utilizando la matriz $\mathbf{M_{p2}}$:

$$\begin{bmatrix} x_{p2s} \\ y_{p2s} \\ z_{p2s} \end{bmatrix} = \mathbf{M_{p2}} \cdot (-z_{p2s}) \qquad \begin{bmatrix} x_{p2s} \\ y_{p2s} \\ z_{p2s} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}191 \\ -0{,}019 \\ 0{,}981 \end{pmatrix} \tag{85}$$

En consecuencia, los ángulos con el eje y de orientación de S con respecto al sistema $\mathbf{R_{p2}}$ son:

$$\theta_{p2s} = a\cos \mathbf{z_{p2s}} \qquad \varphi_{p2s} = a\ \mathrm{tg}\left(\frac{\mathbf{y_{p2s}}}{\mathbf{x_{p2s}}}\right)$$
$$\theta_{p2s} = 11{,}091° \qquad \varphi_{p2s} = -5{,}541° \tag{86}$$

Utilizando nuevamente la ecuación (23) (tercera definición de Ludwig) se determina el vector de polarización transmitido en la dirección angular ($\theta_{p2s}\ \varphi_{p2s}$) del satélite deseado S, dado el ángulo de polarización en el eje de puntería de la antena de la estación terrena interferente (que el ángulo ε calculado anteriormente). Por consiguiente, el vector de polarización $\boldsymbol{u_{p2}}$ es:

$$\gamma_2 = \varepsilon \qquad \gamma_2 = 94{,}587°$$
$$\boldsymbol{u_{p2}} = \mathrm{sen}(\varphi_{p2s} + \gamma_2)\begin{bmatrix} \cos\theta_{p2s}\cos\varphi_{p2s} \\ \cos\theta_{p2s}\ \mathrm{sen}\ \varphi_{p2s} \\ -\mathrm{sen}\ \theta_{p2s} \end{bmatrix} + \cos(\varphi_{p2s} + \gamma_2)\begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\ \varphi_{p2s} \\ \cos\varphi_{p2s} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{87}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}978 \\ -0{,}078 \\ -0{,}192 \end{pmatrix}$$

Para calcular el ángulo de polarización recibido en el satélite S de la onda transmitida por la estación terrena interferente, P_2, se realiza la transformación del vector $\boldsymbol{u_{p2}}$ del sistema $\mathbf{R_{p2}}$ al sistema $\mathbf{R_a}$ del satélite deseado utilizando la ecuación matricial:

$$\boldsymbol{u_{p2a}} = \mathbf{M_A}(\mathbf{M_{p2}^T} \cdot \boldsymbol{u_{p2}}) \qquad \boldsymbol{u_{p2a}} = \begin{pmatrix} 0{,}029 \\ 0{,}998 \\ 0{,}058 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{u_{p2}} \text{ en componentes } \mathbf{R_a}) \tag{88}$$

En consecuencia, el ángulo de polarización recibido ε_{u2} es:

$$\varepsilon_{u2} = a\ \mathrm{tg}\left(\frac{\boldsymbol{u_{p2a_1}}}{\boldsymbol{u_{p2a_2}}}\right) \qquad \varepsilon_{u2} = 1{,}647° \tag{89}$$

Por último, el ángulo de alineación β_u entre la señal recibida de la estación terrena deseada con polarización lineal y la señal recibida de la estación terrena interferente con polarización lineal es:

$$\beta_u = |\varepsilon_{u1} - \varepsilon_{u2}| \qquad \beta_u = 1{,}668° \tag{90}$$

FIGURA 1

Sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas

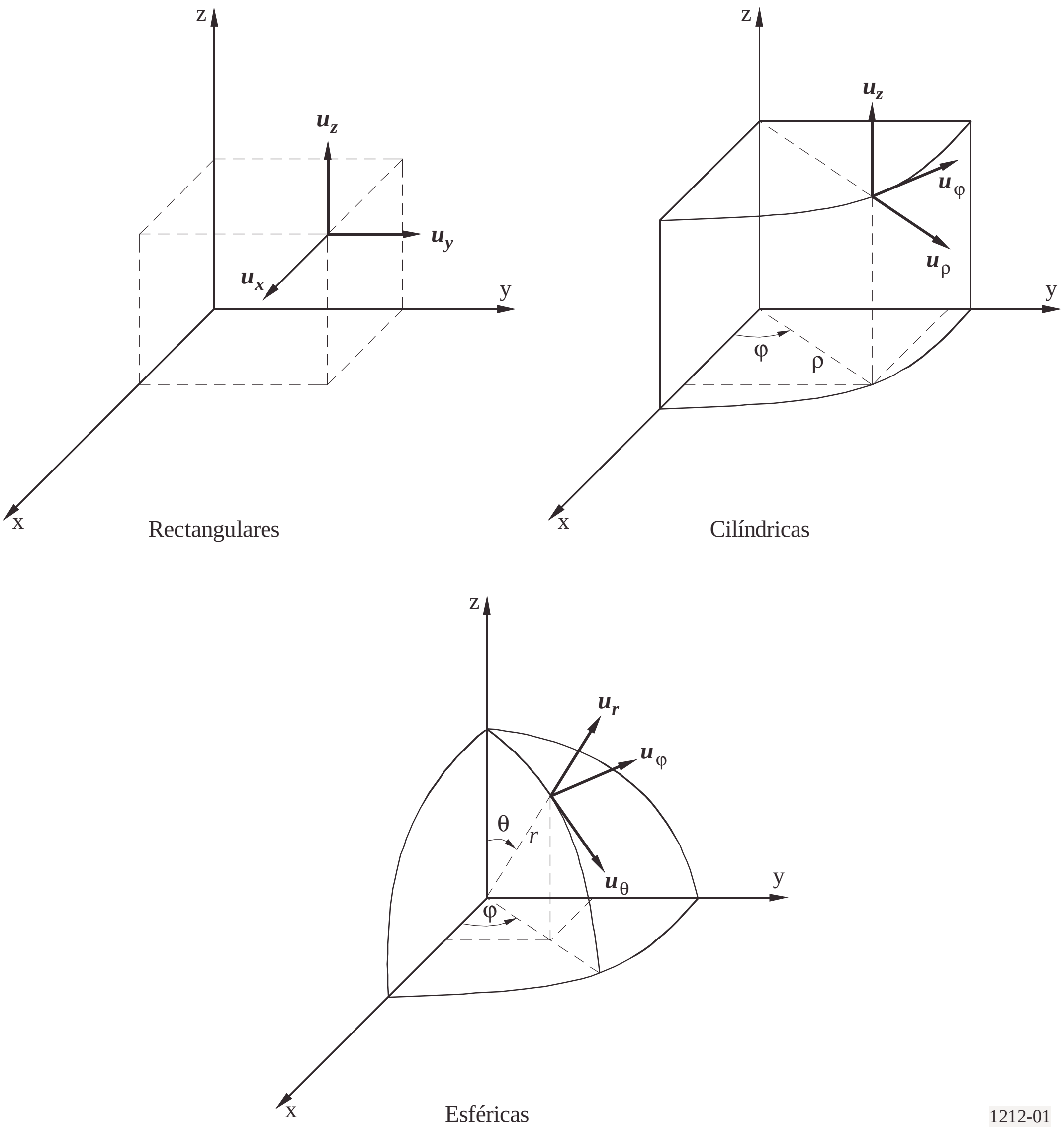


FIGURA 2

Diversas definiciones de polarización

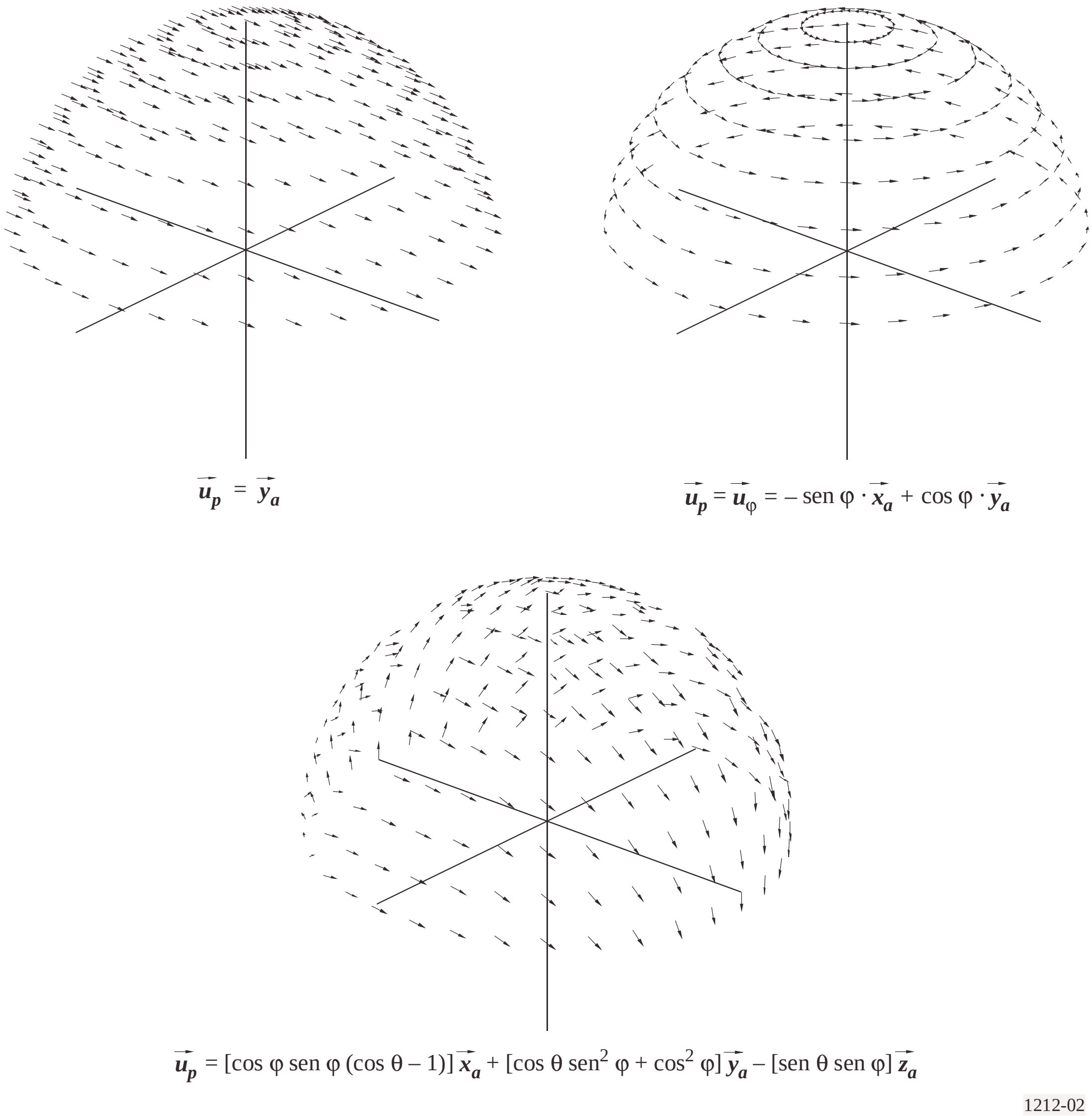
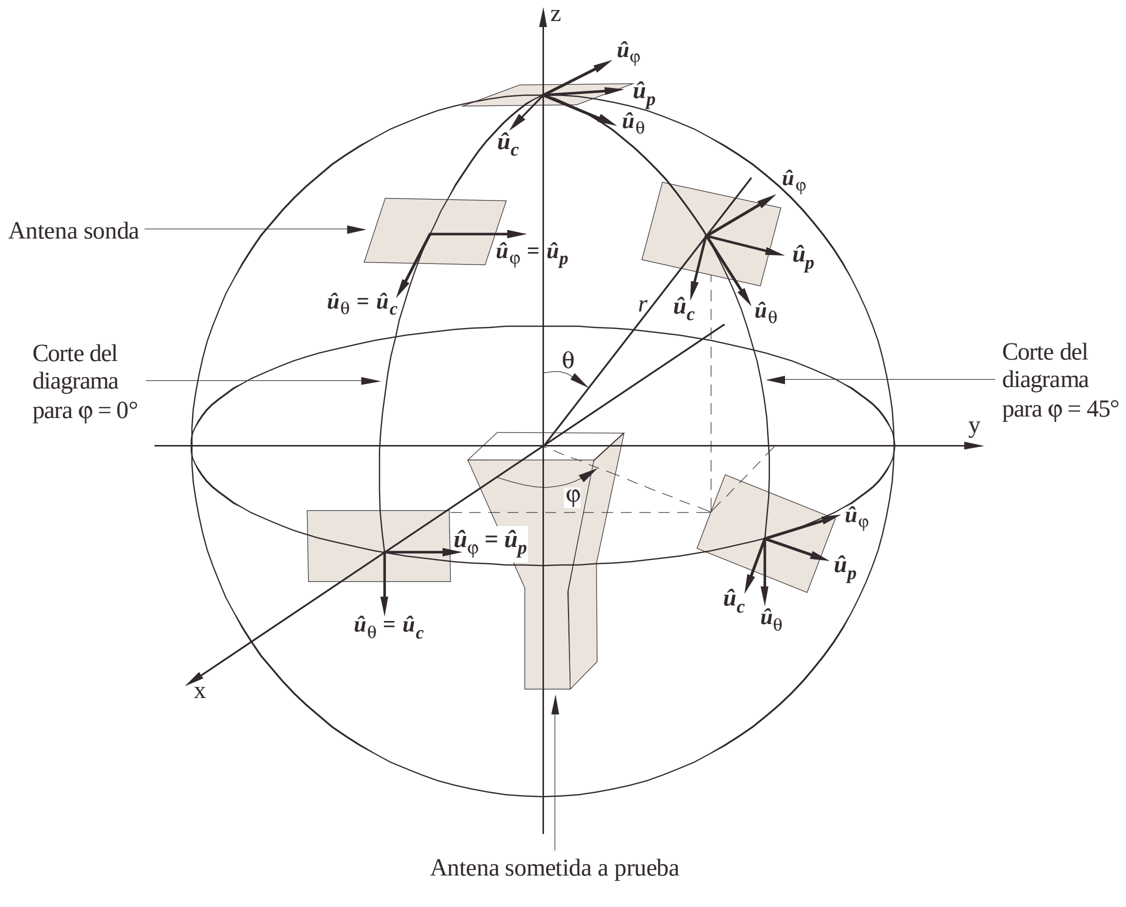


FIGURA 3

Definición de direcciones de las componentes principal y contrapolar a partir del método de medición del diagrama de antena



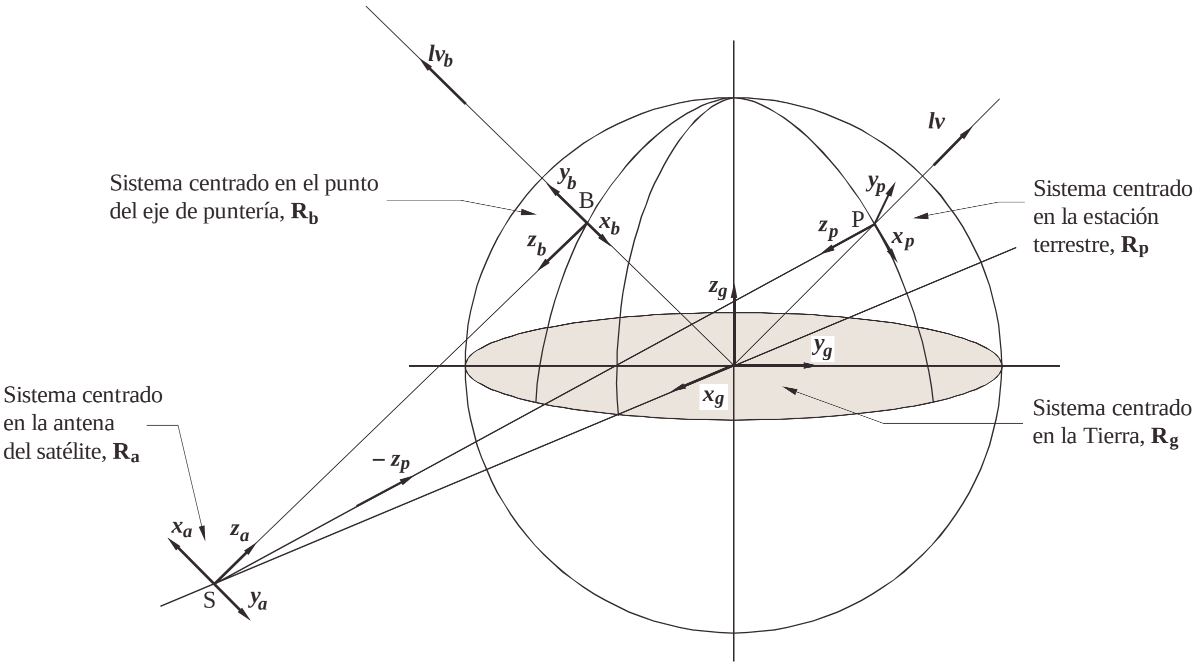
$\hat{u}_\theta$ y $\hat{u}_\varphi$ son vectores unitarios en coordenadas esféricas
$\hat{u}_p$ define la dirección de polarización principal en el punto (θ, φ)
$\hat{u}_c$ define la dirección contrapolar en el punto (θ, φ)

Las direcciones principal y contrapolar están definidas por el método de medición del diagrama de antena. La antena sometida a prueba se instala en el origen de un sistema de coordenadas esféricas. Se utiliza una antena de referencia linealmente polarizada para determinar el diagrama de polarización de la antena de prueba realizando cortes del diagrama para diversos ángulos acimutales φ. Cada corte del diagrama comienza a $\theta = 0°$ (en el eje z) donde la sonda se gira alrededor de su eje para alinear su polarización con la de la antena de prueba. La orientación de la polarización para $\theta = 0°$ define la dirección de polarización básica de la antena de prueba. Para un valor determinado de φ, se toma un corte del diagrama variando θ al desplazar la sonda a lo largo de un arco de círculo máximo, como se indica en la figura. La sonda permanece fija con respecto a su eje de manera que mantiene la misma orientación con relación a los vectores unitarios $\hat{u}_\theta$ y $\hat{u}_\varphi$ y el mismo ángulo de polarización β. Los vectores unitarios ortogonales $\hat{u}_p$ y $\hat{u}_c$ (que también son tangentes a la esfera en un punto (θ, φ)) se definen, respectivamente, como las direcciones principal y contrapolar.

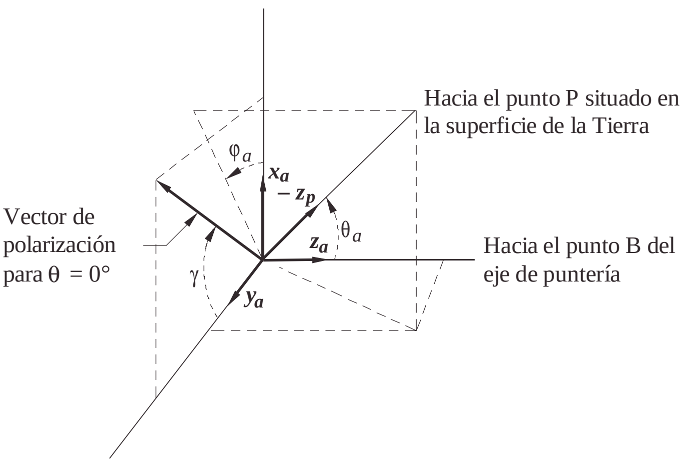
1212-03

FIGURA 4

Ilustración de los diversos sistemas de coordenadas



Detalle del sistema centrado en la antena del satélite



D04