

INFORME UIT-R SA.2066

**Métodos de cálculo de las estadísticas de visibilidad
de un satélite en órbita baja**

(2006)

ÍNDICE

		<i>Página</i>
1	Introducción.....	2
2	Porcentaje de tiempo y duración máxima de ocupación de una región particular por una nave espacial de órbita baja	2
2.1	Ecuación de límites para calcular el porcentaje de tiempo que una nave espacial permanece en determinada región	3
2.2	Tiempo máximo de permanencia de un satélite en el haz de una estación en tierra.....	4
3	Función de densidad de probabilidad de la posición de un satélite en órbita baja en la esfera orbital	6
3.1	fdp de la interferencia causada a satélites en órbita baja por emisiones de los sistemas del servicio fijo.....	9
3.2	fdp de la interferencia causada a sistemas del servicio fijo por emisiones de satélites en órbita baja.....	12
4	Métodos simplificados para calcular las estadísticas de visibilidad.....	14
4.1	Método simplificado para haces de antena circulares	14
4.2	Método manual para calcular las estadísticas de visibilidad	18
4.3	Comparación de los resultados numéricos de los métodos simplificado y manual para los haces de antenas circulares.....	21
5	Métodos para calcular las coordenadas de la intersección de dos planos orbitales.....	22
5.1	Análisis	22

1 Introducción

El creciente uso de estaciones espaciales en órbita circular baja en el servicio de investigación espacial y otros servicios requiere que se elaboren modelos de compartición dinámica en los que pueda representarse la posible interferencia ocasionada por la estación espacial como función variable en el tiempo. En el presente Informe se definen las herramientas analíticas utilizadas para calcular las estadísticas de visibilidad de vehículos espaciales en órbitas circulares bajas (véase la Nota 1) desde un punto específico de la superficie terrestre.

NOTA 1 – Este Informe trata únicamente las órbitas satelitales circulares en las que el periodo orbital no es un múltiplo par del periodo rotacional de la Tierra.

En la Sección 2 de este Informe se describen los factores que afectan las estadísticas de visibilidad, se presenta una ecuación para delimitar el porcentaje de tiempo que un vehículo espacial de órbita baja permanecerá en determinadas regiones de la esfera orbital, visibles desde una estación terrena, y se presentan gráficos simplificados en los que se indica el tiempo máximo que un satélite en órbita baja permanece en ciertas regiones de la esfera orbital, en función de diversos parámetros. En la Sección 3 se deduce la función de densidad de probabilidad (fdp, *probability density function*) de un satélite que ocupa posiciones específicas en la esfera orbital, se ilustra la forma en que puede emplearse la pdf para calcular las características estadísticas de interferencia causada a los satélites en órbita baja por emisiones de estaciones del servicio fijo y se muestra un ejemplo de cálculo de la pdf de la interferencia causada a los sistemas del SF, suponiendo que la densidad de flujo de potencia de las emisiones de los satélites en órbita baja se ajusta a un perfil en particular. En la Sección 4 se propone un método simplificado para calcular las estadísticas de visibilidad de las estaciones terrenas y de las estaciones terrenales que utilizan una antena con un haz de sección transversal circular, así como un método de cálculo manual de visibilidad que utiliza una hoja de cálculo para determinar las estadísticas de visibilidad de las estaciones terrenas o de las estaciones terrenales con una antena con un haz de sección transversal más compleja. Finalmente, en la Sección 5 se presenta un método para calcular las coordenadas de la intersección de dos planos orbitales en el espacio inercial. Esa sección es particularmente útil para predecir la conjunción de satélites en órbitas heliosíncronas con planos orbitales desplazados.

2 Porcentaje de tiempo y duración máxima de ocupación de una región particular por una nave espacial de órbita baja

Incluso para el más sencillo de los modelos dinámicos de compartición, deben evaluarse no menos de seis caracteres específicos del sistema para definir con exactitud los datos estadísticos principales en función del tiempo de una estación espacial en órbita baja vista desde una ubicación en la superficie de la Tierra.

Los datos estadísticos en función del tiempo son:

- el tiempo de tránsito más largo de una estación espacial a través del haz principal de una antena (considerado en el § 3, y
- el porcentaje de tiempo a largo plazo que la estación espacial pasa en las distintas regiones de la esfera orbital visto desde la estación en tierra.

La primera estadística es importante, ya que define la duración continua más larga de la potencia del ruido en el sistema receptor en tierra procedente de la estación espacial. La segunda, tras su convolución con los diagramas de las antenas de transmisión y recepción, y la pérdida de distancia, puede utilizarse para formular relaciones interferencia/ruido, I/N , en función del tiempo para el modelo de compartición dinámico. En un sentido, las relaciones I/N en función del tiempo pueden ser tratadas con un método similar al que se aplica para la intensidad de la señal en función del tiempo, derivadas de las estadísticas de propagación atmosférica. Sin embargo, un receptor experimenta un cambio en la relación S/N más interferencia, como función estadística del tiempo,

basada en los parámetros de los modelos de estación espacial de órbita baja, en vez de experimentarlo en la relación S/N como función estadística del tiempo.

Los parámetros específicos que determinan las estadísticas de visibilidad a largo plazo de una estación espacial en una órbita circular, inclinada y a baja altitud (véase la Nota 1), vista desde un sistema receptor en la superficie de la Tierra, son:

- altitud de la estación espacial, H (km);
- inclinación de la órbita de la estación espacial, i (grados);
- latitud de la estación en tierra, La (grados);
- orientación en acimut de la antena de la estación en tierra medido desde el Norte, Az (grados);
- orientación en elevación de la antena de la estación en tierra medida desde el plano horizontal local, El (grados);
- superficie angular de la región de interés, δA .

El último parámetro puede dar lugar a distintas interpretaciones físicas, que dependen de la finalidad del análisis. Así, por ejemplo, puede ser la superficie angular del haz principal de la antena de la estación en tierra o puede ser la superficie angular expresada por una «anchura» acimutal de δAz (grados) y una «altura» de elevación expresada en δEl (grados).

2.1 Ecuación de límites para calcular el porcentaje de tiempo que una nave espacial permanece en determinada región

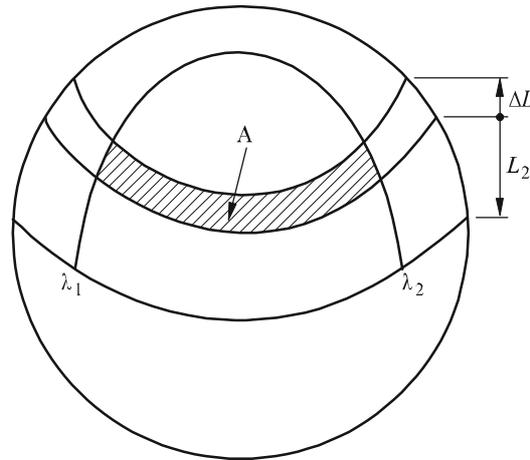
A continuación se incluye la ecuación de límites que puede utilizarse para delimitar el porcentaje de tiempo que un vehículo espacial de órbita baja permanecerá en determinadas regiones visibles desde una estación en tierra, durante periodos de tiempos largos:

$$T(\%) = \frac{\delta\lambda}{2\pi^2} \left(\text{sen}^{-1} \left[\frac{\text{sen}(L + \Delta L)}{\text{sen } i} \right] - \text{sen}^{-1} \left[\frac{\text{sen } L}{\text{sen } i} \right] \right) \times 100 \quad (1)$$

donde:

- $L, \Delta L$: límites de latitud de la región de la esfera orbital (véase la Fig. 1)
- $\delta\lambda$: región longitudinal de la esfera orbital entre los límites de longitud λ_1 y λ_2 (véase la Fig. 1)
- i : inclinación de la órbita del satélite (todos los ángulos se evalúan en radianes).

FIGURA 1



Rap 2066-01

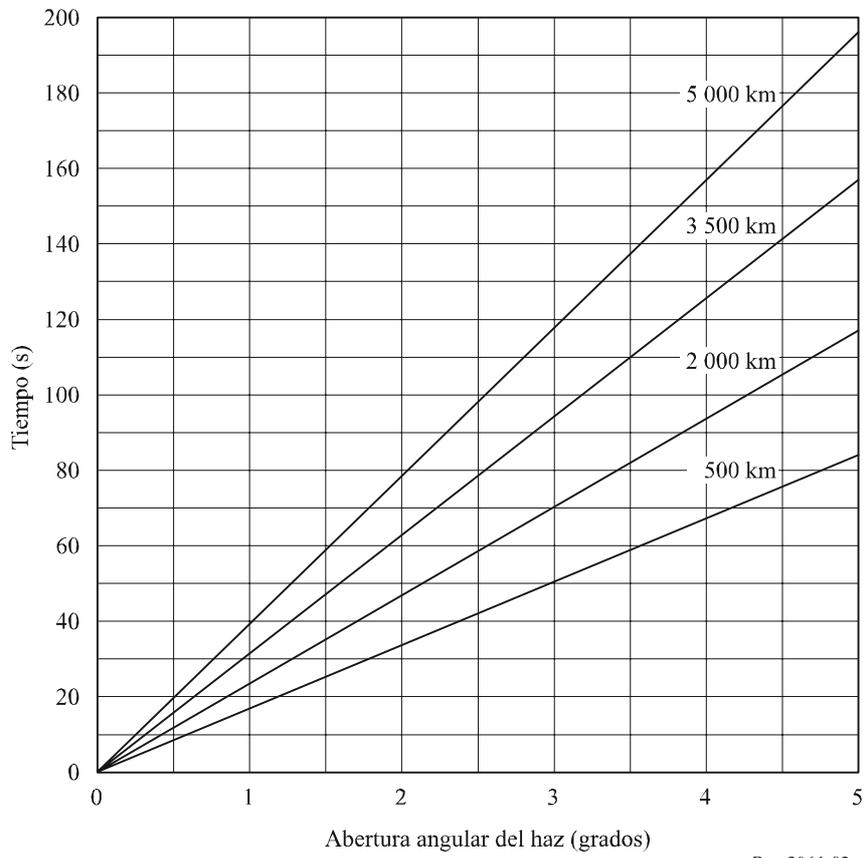
2.2 Tiempo máximo de permanencia de un satélite en el haz de una estación en tierra

En este punto se proporcionan datos numéricos relativos al caso más desfavorable de compartición de frecuencias con satélites en órbita baja inclinada. Tal compartición está determinada por el tiempo durante el cual un satélite «no deseado» y virtualmente interferente permanece en el haz, definido por su abertura angular a 3 dB, del receptor de una estación en tierra. Este parámetro ha sido evaluado para distintas altitudes de órbita y para dos elevaciones límite de la antena receptora. Los resultados numéricos deducidos en este Informe representan un límite superior del tiempo en que un vehículo espacial permanecerá dentro del haz de la estación en tierra a una determinada altitud.

El tiempo de permanencia de un satélite en el haz de una estación en tierra es función de la abertura angular de éste, del ángulo de elevación del haz y de la altitud del satélite. En el caso más desfavorable, es decir, aquel en que el satélite permanece el mayor tiempo posible en el haz, se presenta cuando la estación en tierra se halla en el Ecuador, con una elevación del haz = 0° y el satélite se desplaza hacia el Este a lo largo de una órbita con inclinación de 0° . El tiempo que el satélite permanece en el haz depende de la velocidad del satélite con relación a la velocidad del haz (puesto que el haz de la antena gira acompañando a la Tierra), así como de la longitud de arco de intersección de la órbita con el haz.

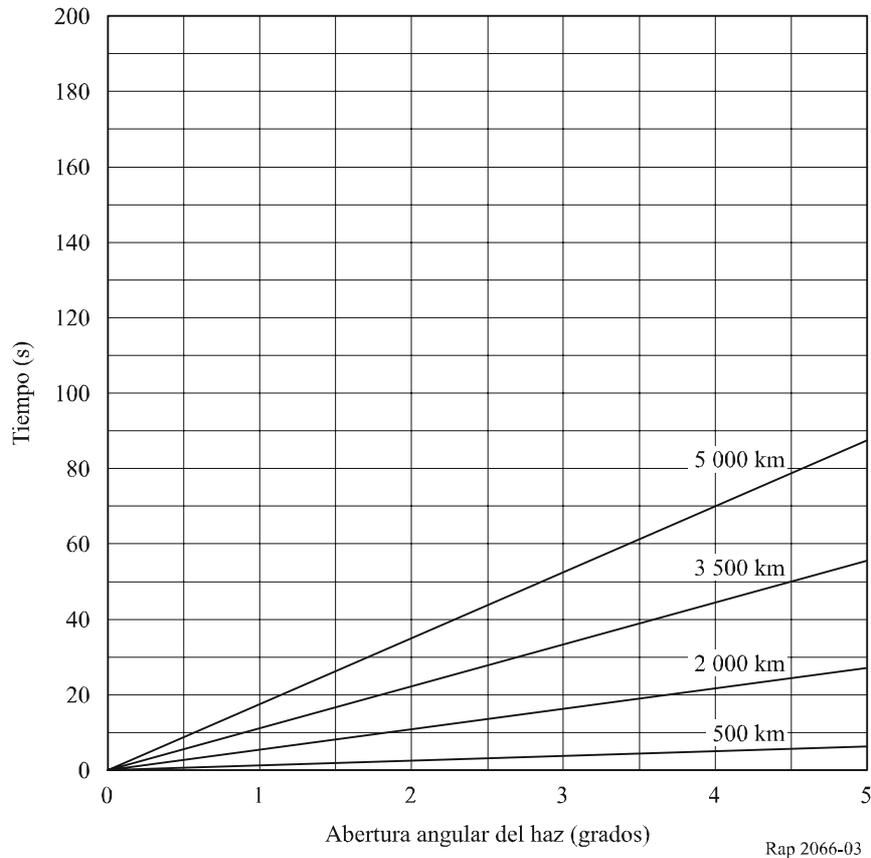
En las Figs. 2 y 3 se muestra el tiempo máximo que puede permanecer un vehículo espacial en el haz principal de una antena, con elevaciones de 0° y 90° , respectivamente, y diversas altitudes orbitales y aberturas del haz.

FIGURA 2
Tiempo máximo de permanencia en el haz en función de la
apertura angular del haz. Ángulo de elevación de 0°



Rap 2066-02

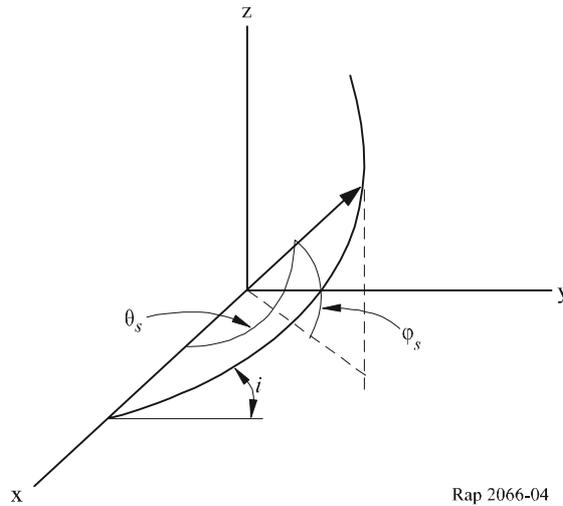
FIGURA 3
 Tiempo máximo de permanencia en el haz en función de la
 abertura angular del haz. Ángulo de elevación de 90°



3 Función de densidad de probabilidad de la posición de un satélite en órbita baja en la esfera orbital

La posición (latitud y longitud) de un satélite que se desplaza en la esfera orbital con respecto a un punto fijo de la Tierra es función de dos parámetros independientes, a saber: la posición del satélite en su plano orbital y la longitud del punto de observación en la Tierra con respecto a dicho plano. En la Fig. 4 se representa el modelo geométrico utilizado en el presente análisis. Se supone que el satélite se encuentra en una órbita circular a una altitud, h , que la inclinación del plano orbital es i , y que no hay una relación directa entre los periodos de rotación del satélite y de la Tierra.

FIGURA 4
 Modelo geométrico simplificado de un satélite en órbita alrededor de la Tierra



Rap 2066-04

El sistema de coordenadas representado en la Fig. 4 constituye un sistema dextrógiro geocéntrico en el que el plano x-y corresponde al plano ecuatorial y el eje x apunta a una dirección arbitraria del espacio (normalmente el primer punto de Aries).

Por razones de simplicidad, se supone que el eje x constituye la intersección del plano orbital y el plano ecuatorial. La latitud φ_s de la posición del satélite en el espacio viene dada por la expresión:

$$\text{sen } \varphi_s = \text{sen } \theta_s \text{ sen } i \quad (2)$$

donde θ_s es el ángulo central entre el eje x y el vector de posición del satélite. Para satélites en órbitas circulares, θ_s es una función lineal del tiempo t , esto es $\theta_s = 2\pi t / \tau$, donde τ es el periodo de la órbita. En la ecuación (2) se relaciona la latitud del satélite con el ángulo central θ_s y el ángulo de inclinación orbital i .

Si el ángulo central del vector de posición de un satélite en una órbita circular se muestrea aleatoriamente, se llega a la conclusión de que el ángulo θ_s está uniformemente distribuido entre 0 y 2π radianes. Esto puede indicarse mediante una función de densidad de probabilidad $p(\theta_s)$:

$$p(\theta_s) = \frac{1}{2\pi} \quad (3)$$

La fdp de probabilidad de la latitud del vector de posición del satélite puede obtenerse aplicando un método de transformación directa de la teoría de probabilidades. Puede verse que, para una variable aleatoria x con una función de densidad de probabilidad $p(x)$ que se somete a la transformación $y = g(x)$, la función de densidad de probabilidad $p(y)$ de la variable aleatoria y viene dada por:

$$p(y) = \frac{p(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{p(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (4)$$

donde:

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$$

y x_1, \dots, x_n son las raíces reales de $y = g(x)$.

Aplicando este procedimiento a las ecuaciones (2) y (3) se obtiene la fdp de la latitud del vector de posición del satélite en su plano orbital:

$$p(\varphi_s) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos \varphi_s}{\sqrt{\text{sen}^2 i - \text{sen}^2 \varphi_s}} \quad (5)$$

La ecuación (5) representa la función que se obtendría si la latitud del satélite se mostrase aleatoriamente un gran número de veces. La ecuación (5) indica, como era de esperar, que la expresión queda definida únicamente para valores reales de $|\varphi_s| \leq i$. Puede verse también que:

$$\int_{-i}^i p(\varphi_s) d\varphi_s = 1 \quad (6)$$

como cabía esperar.

Para que el satélite aparezca en una longitud determinada λ_s en la esfera orbital con respecto al punto de referencia en la superficie de la Tierra, el plano orbital debe intersectarse con la esfera orbital en esa longitud. La probabilidad de que esto ocurra se distribuye uniformemente en 2π radianes, esto es:

$$p(\lambda_s) = \frac{1}{2\pi} \quad (7)$$

Por último, dado que se supone que el periodo del satélite y la rotación de la Tierra no están directamente relacionados, la fdp de la posición del satélite es la probabilidad conjunta de dos eventos independientes, que viene dada por el producto de las dos funciones de densidad de probabilidad:

$$p(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \varphi_s}{\sqrt{\text{sen}^2 i - \text{sen}^2 \varphi_s}} \quad (8)$$

La probabilidad $P(\Delta\varphi, \Delta\lambda)$ de que el satélite ocupe la región de la esfera orbital limitada por la latitud φ_s , $\varphi_s + \Delta\varphi_s$ y la longitud $\Delta\lambda_s$ viene dada por:

$$P(\Delta\varphi, \Delta\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\Delta\lambda_s} \int_{\varphi_s}^{\varphi_s + \Delta\varphi_s} \frac{\cos \varphi_s d\lambda_s d\varphi_s}{\sqrt{\text{sen}^2 i - \text{sen}^2 \varphi_s}} \quad (9)$$

La integración arroja el siguiente resultado:

$$P(\Delta\varphi, \Delta\lambda) = \frac{\Delta\lambda_s}{2\pi^2} \left(\text{sen}^{-1} \left[\frac{\text{sen}(\varphi_s + \Delta\varphi_s)}{\text{sen } i} \right] - \text{sen}^{-1} \left[\frac{\text{sen } \varphi_s}{\text{sen } i} \right] \right) \quad (10)$$

3.1 fdp de la interferencia causada a satélites en órbita baja por emisiones de los sistemas del servicio fijo

La fdp de la interferencia causada a satélites en órbita baja por emisiones de sistemas del servicio fijo es función de la geometría y de la función de densidad de probabilidad de la posición del satélite. Si la interferencia puede expresarse en función de las coordenadas (latitud y longitud relativa) de la esfera orbital visible, es decir, $I(\varphi_s, \lambda_s)$, la función de densidad de probabilidad de la interferencia causada al satélite en órbita baja $p(I)$ viene dada por:

$$P(I)dI = \iint_S p(\varphi_s, \lambda_s) d\varphi_s d\lambda_s \quad (11)$$

donde S indica que la integración debe realizarse en el segmento de la superficie de la esfera orbital que contribuye a un nivel de interferencia comprendido entre los valores de I e $I + dI$.

La función $I(\varphi_s, \lambda_s)$ es una función compleja de varios parámetros, a saber, la ubicación de la estación del servicio fijo, la densidad espectral de potencia del transmisor, las características de directividad de la ganancia de la antena transmisora, el acimut y el ángulo de elevación de la antena transmisora, la altitud y el ángulo de inclinación de la órbita del satélite, la distancia al satélite, la ganancia de la antena receptora del satélite en la dirección de la interferencia y la frecuencia de explotación. La integral de una función tan compleja se resuelve más fácilmente aplicando métodos numéricos.

Los pasos del procedimiento numérico son los siguientes:

Paso 1: Se definen φ_s y λ_s como variables independientes en la superficie de la esfera orbital visible.

Paso 2: Se define un conjunto $I(n)$ que corresponde al intervalo que nos interesa (valores máximo a mínimo de la interferencia ($I(\varphi_s, \lambda_s)$)), donde n corresponde al número de incrementos deseados (por ejemplo incrementos de 0,25 dB) (este conjunto se utilizará para almacenar la función de densidad de probabilidad diferencial).

Paso 3: Se evalúa $I(\varphi_s, \lambda_s)$ con valores dados de φ y λ (se recurrirá a estos valores para apuntar a un determinado elemento n_0 en el conjunto $I(n)$).

Paso 4: Se calcula $p(\varphi_s, \lambda_s) d\varphi_s d\lambda_s$ y se añade al valor almacenado en $I(n_0)$.

Paso 5: Se incrementan φ y λ en la superficie de la esfera orbital visible.

Paso 6: Se repiten las etapas 3 a 5.

Se observa que la evaluación numérica de la ecuación (11) da lugar a la transformación de la integral en una suma.

Los parámetros geométricos requeridos para evaluar $I(\varphi_s, \lambda_s)$ se obtienen utilizando un sistema de coordenadas geocéntrico similar al que aparece en la Fig. 4. La diferencia más notable es que el sistema de coordenadas rota al mismo ritmo y en la misma dirección que la Tierra. El plano x-y es el plano ecuatorial y z es el eje de rotación de la Tierra. Por razones de simplicidad, se supone que la estación del servicio fijo se halla en el plano x-z. La escala del sistema de coordenadas se normaliza con respecto al radio de la Tierra. En consecuencia, todas las distancias calculadas en este sistema de coordenadas deben multiplicarse por el radio de la Tierra (6378 km) para obtener el valor correcto. Los componentes normalizados del vector de posición \mathbf{P} de la estación vienen dados por:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_p \\ 0 \\ \sin \varphi_p \end{vmatrix} \quad (12)$$

donde φ_p es la latitud de la estación del servicio fijo.

La dirección adonde apunta la antena de transmisión del servicio fijo se representa por un vector unitario situado en el plano de la horizontal local y está desviada un ángulo acimutal especificado θ_{az} con respecto a la dirección Norte. Los componentes del vector de puntería U_A de la antena vienen dados por:

$$U_A = \begin{bmatrix} \cos \varphi_r \cos \lambda_r \\ \cos \varphi_r \sin \lambda_r \\ \sin \varphi_r \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde:

$$\varphi_r = \sin^{-1}(\cos \varphi_p \cos \theta_{az}) \quad (14a)$$

$$\lambda_r = \cos^{-1} \left[\frac{-\sin \varphi_p \cos \theta_{az}}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_p \cos^2 \theta_{az}}} \right] \quad (14b)$$

Los valores de φ_s y λ_s que definen los límites de la superficie visible de la esfera orbital pueden determinarse fácilmente. Los límites de φ_s vienen dados por:

$$\varphi_{m\acute{a}x} = \varphi_p + \varphi_{lim}, \quad \varphi_{m\acute{a}x} \leq i, \quad \text{de otro modo } \varphi_{m\acute{a}x} = i \quad (15a)$$

$$\varphi_{m\acute{i}n} = \varphi_p - \varphi_{lim}, \quad \varphi_{m\acute{i}n} \leq i \quad (15b)$$

donde:

$$\varphi_{lim} = \cos^{-1}(1/\beta)$$

$$\beta = 1 + h/r_e$$

h : altitud del satélite

r_e : radio de la Tierra.

Cuando $\varphi_{m\acute{i}n} < i$, el satélite en órbita baja no es visible desde la estación del servicio fijo.

Para un valor arbitrario de φ_s comprendido entre los límites $\varphi_{m\acute{i}n}$ y $\varphi_{m\acute{a}x}$, los valores límite de la longitud relativa $\lambda_{m\acute{i}n}$ y $\lambda_{m\acute{a}x}$ en el segmento visible de la esfera orbital se obtienen empleando la expresión:

$$\lambda_{m\acute{a}x} = -\lambda_{m\acute{i}n} = \cos^{-1} \left[\frac{\cos \varphi_{lim} - \sin \varphi_p \sin \varphi_s}{\cos \varphi_p \cos \varphi_s} \right] \quad (16)$$

Dados los valores φ_s y λ_s comprendidos entre los límites anteriormente calculados, la distancia al satélite y el ángulo entre la dirección a la que apunta la antena de la estación del servicio fijo y la dirección hacia el satélite se obtienen muy fácilmente mediante un análisis vectorial. Concretamente, el vector que va hacia el satélite R puede expresarse como sigue:

$$R = S - P \quad (17)$$

donde \mathbf{P} es el vector de posición de la estación del servicio fijo especificado por la ecuación (12) y \mathbf{S} es el vector de posición del punto de muestreo de la ubicación del satélite en la esfera orbital, que viene dado por:

$$\mathbf{S} = \beta \begin{vmatrix} \cos \varphi_s \cos \lambda_s \\ \cos \varphi_s \sen \lambda_s \\ \sen \varphi_s \end{vmatrix} \quad (18)$$

La distancia normalizada al satélite $|\mathbf{R}|$ se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los componentes del vector de distancia obtenido en la ecuación (17). El ángulo de desviación respecto del satélite se obtiene con el producto escalar del vector de puntería \mathbf{U}_A de la antena (cuyos componentes normalizados vienen dados por la ecuación (13)) y el vector de distancia \mathbf{R} . El ángulo de desviación $\varphi_{off-axis}$ se obtiene del siguiente modo:

$$\varphi_{off-axis} = \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}_A}{|\mathbf{R}|} \right] \quad (19)$$

En la Recomendación UIT-R F.699 se establece el diagrama de radiación de referencia que debe utilizarse para las antenas de transmisión de las estaciones del servicio fijo con $D/\lambda_f < 100$ y para antenas con $D/\lambda_f > 100$, donde D es el diámetro de la antena y λ_f la longitud de onda a la frecuencia de explotación. Se supondrá que el diagrama de radiación de referencia que ha de utilizarse para el sistema de recepción del satélite en órbita baja es isotrópico. Basándose en estas consideraciones:

$$I(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{P_T G_T(\varphi_{off-axis}) G_R \lambda_f^2}{(4\pi R_s)^2} \quad (20)$$

donde:

- P_T : potencia del transmisor (o la densidad espectral de potencia)
- $G_T(\varphi_{off-axis})$: ganancia de la antena transmisora en la dirección del punto de muestreo (φ_s, λ_s)
- G_R : ganancia de la antena receptora en el punto de muestreo en la dirección de la estación del SF
- λ_f : longitud de onda a la frecuencia de explotación, y
- R_s : distancia (con las mismas dimensiones que λ_f) entre la estación del servicio fijo y el punto de muestreo (esto es, $|\mathbf{R}| r_e$).

Aplicando el procedimiento descrito anteriormente en el presente punto, se obtiene, a partir de las ecuaciones (11) y (20), la fdp de la interferencia causada a un satélite en órbita baja por emisiones de una estación del servicio fijo.

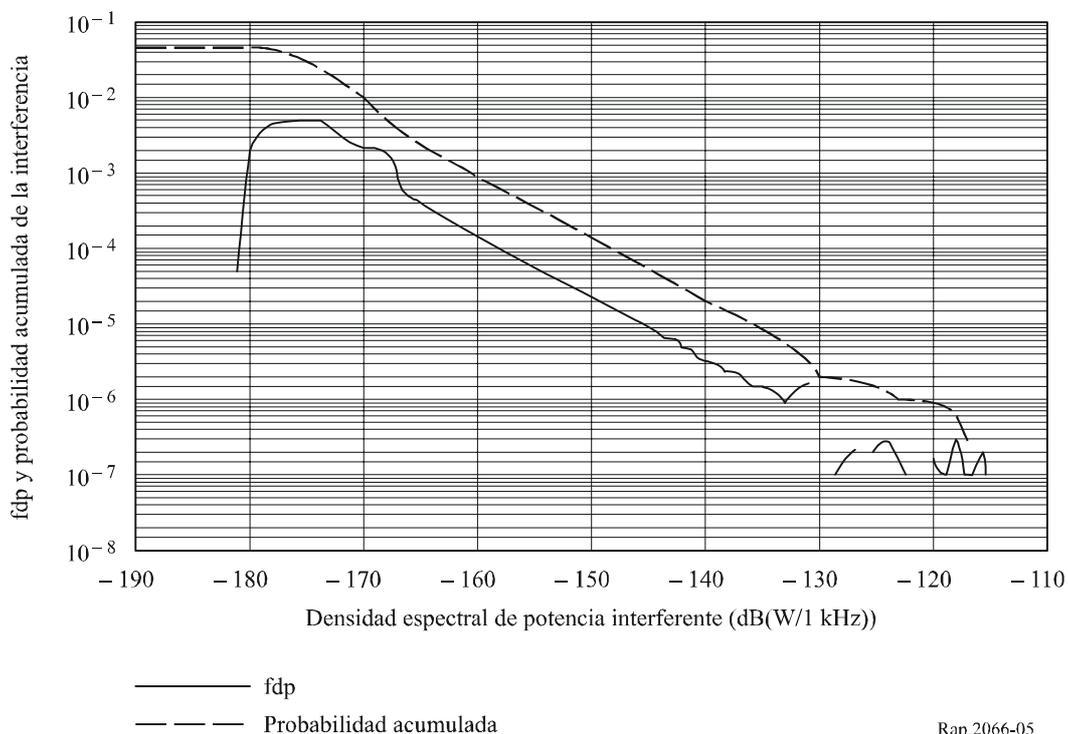
Se ha evaluado un caso para ilustrar los resultados que pueden obtenerse con el procedimiento analítico descrito. Para el caso presente, se ha supuesto que:

- la estación del servicio fijo se encuentra a 38° N;
- la ganancia de la antena es de 50 dBi;
- el ángulo acimutal de la antena es de 90°;
- la frecuencia de explotación es de 2 050 MHz;
- la densidad espectral de potencia del transmisor a la entrada de la antena es de 0 dB(W/1 kHz);
- el satélite se encuentra en una órbita circular a una altitud de 800 km;

- la inclinación del plano orbital es de 90° , y
- el satélite tiene una antena receptora isótropa con una ganancia de 0 dBi.

Los resultados de los análisis pueden verse en la Fig. 5. La curva de trazo continuo representa la fdp de la interferencia recibida por un satélite en órbita baja. La curva de trazo discontinuo representa la probabilidad acumulada de que la interferencia sobrepase un valor específico. Por ejemplo, la curva de trazo continuo muestra que la fdp de que la interferencia sea del orden de -150 dB(W/1 kHz) es de 2×10^{-5} aproximadamente. De manera análoga, la curva de trazo discontinuo indica que la probabilidad de que la interferencia exceda de -170 dB(W/1 kHz) es de aproximadamente 1×10^{-2} , ó 1%.

FIGURA 5
Interferencia en la estación con dispersión troposférica del ejemplo



3.2 fdp de la interferencia causada a sistemas del servicio fijo por emisiones de satélites en órbita baja

El método utilizado para calcular la fdp de la interferencia causada, a estaciones del servicio fijo por emisiones de satélites en órbita baja es una pequeña ampliación del método descrito en el punto anterior. En este caso, se supone que la interferencia incidente en la estación del servicio fijo es conforme con los valores de la dfp, que se especifican en función del ángulo de elevación en la estación del servicio fijo. Se aplican las etapas del procedimiento descrito en el § 3. El cálculo de $I(\varphi_s, \lambda_s)$ se convierte en:

$$I(\varphi_s, \lambda_s) = \rho(\delta) G_T(\varphi_{off-axis}) \frac{\lambda_f^2}{4\pi} \quad (21)$$

donde $\rho(\delta)$ es la densidad espectral de flujo de potencia y δ el ángulo de elevación y los parámetros tienen valores obtenidos anteriormente. La ecuación (19) se utiliza para calcular el ángulo de desviación, y la densidad espectral de flujo de potencia viene dada por:

$$\rho(\delta) = \begin{cases} -154 & \text{dB(W/(m}^2 \cdot 4 \text{ kHz))} & \text{para } 0^\circ \leq \delta < 5^\circ \\ -154 + 0,5(\delta - 5) & \text{dB(W/(m}^2 \cdot 4 \text{ kHz))} & \text{para } 5^\circ \leq \delta < 25^\circ \\ -144 & \text{dB(W/(m}^2 \cdot 4 \text{ kHz))} & \text{para } 25^\circ \leq \delta < 90^\circ \end{cases} \quad (22)$$

El ángulo de elevación se obtiene con el producto escalar del vector de distancia R y el vector de posición P de la estación del servicio fijo. Como $\cos(90 - \delta) = \sin \delta$:

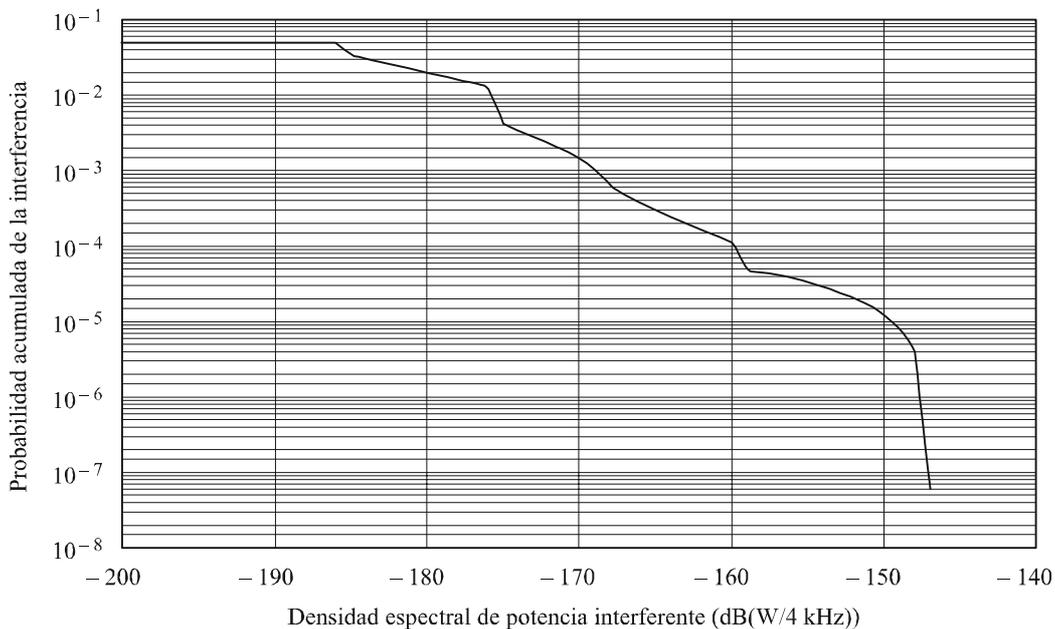
$$\delta = \text{sen}^{-1} \frac{[R \cdot P]}{|R|} \quad (23)$$

Se ha evaluado un ejemplo para este caso de interferencia. Se ha supuesto que:

- la estación del servicio fijo está situada a 38° N;
- la ganancia de la antena receptora es de 35 dBi;
- el ángulo acimutal de la antena es de 90°;
- la frecuencia de explotación es de 2250 MHz;
- la densidad espectral de flujo de potencia incidente en la estación del servicio fijo viene dada por la ecuación (22);
- el satélite se encuentra en una órbita circular a una altitud de 800 km; y
- la inclinación del plano orbital es de 90°.

Los resultados del análisis pueden verse en la Fig. 6. La curva de trazo continuo es la probabilidad acumulada de que la interferencia rebase un determinado valor. La Fig. 6 muestra que la probabilidad de que la interferencia sobrepase -167 dB(W/4 kHz) es del orden de 4×10^{-4} .

FIGURA 6
Interferencia causada a la estación de radioenlaces del ejemplo



4 Métodos simplificados para calcular las estadísticas de visibilidad

Se puede determinar el método exacto para calcular las estadísticas de visibilidad de un satélite en órbita circular cuyo periodo orbital es independiente del periodo rotacional de la Tierra utilizando la ecuación (8). Esta ecuación, con la que se calcula la fdp de un satélite que ocupa una posición en la latitud φ_s y longitud λ_s específicas en la esfera orbital se repite como ecuación (24):

$$P(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \varphi_s}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi_s}} \quad (24)$$

donde:

- $p(\varphi_s, \lambda_s)$: fdp
- φ_s : latitud geocéntrica en la esfera orbital de interés
- λ_s : longitud geocéntrica relativa en la esfera orbital de interés
- i : inclinación del plano orbital con respecto al plano ecuatorial

Se determina la probabilidad de que un satélite esté, por ejemplo, en un área limitada de la esfera orbital y sea «visible» en la abertura del haz de la antena receptora a 3 dB, haciendo uso de la integral de superficie:

$$P(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{1}{2\pi^2} \iint_s \frac{\cos \varphi_s}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi_s}} d\varphi_s d\lambda_s \quad (25)$$

Es difícil obtener la solución general de la ecuación (25) para un área definida arbitrariamente en la esfera orbital. Sin embargo, para el caso práctico de un haz circular de antena se pueden hacer ciertas suposiciones que llevan a una solución simplificada. Este caso se considera en el § 4.1.

En el § 4.2 se describe un método numérico para un segundo caso práctico, en el que el haz de la antena puede ser circular o tener una forma algo más complicada.

4.1 Método simplificado para haces de antena circulares

Se pueden hacer dos suposiciones para simplificar la ecuación (25) y obtener un estimativo preciso de la probabilidad de que el satélite sea «visible». El caso práctico consiste en una estación terrena o en una estación terrenal que utiliza una antena de ganancia relativamente alta y posee un haz circular orientado con un acimut y un ángulo de elevación fijos. La primera suposición simplificadora tiene que ver con el denominador del integrando de la ecuación (25). Si el valor del denominador varía poco en la gama de latitud de interés en la esfera orbital, entonces se puede hacer la siguiente simplificación.

$$P(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \Phi_s}} \iint_s \cos \varphi_s d\varphi_s d\lambda_s \quad (26)$$

donde: $1/\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \Phi_s}$ representa el factor de ponderación evaluado para Φ_s que se ha de aplicar a la integral de superficie. (Como se mostrará más adelante, Φ_s representa la latitud del centro de la región de interés). Con estas suposiciones se simplifica enormemente el integrando ya que se convierte sencillamente en el área A_s de la superficie encerrada de una esfera unitaria, y la probabilidad se convierte en:

$$P(\varphi_s, \lambda_s) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{A_s}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \Phi_s}} \quad (27)$$

El problema geométrico básico que se ha de resolver es determinar A_S , el área de la intersección de un cono (el haz de antena circular) y una esfera (la esfera orbital). Esto se facilita con el segundo conjunto de suposiciones. Cuando la dimensión angular del cono es lo suficientemente pequeña, el problema se convierte en la intersección entre un cono y un plano normal a la esfera en el centro de la intersección. Se conoce que la intersección es una elipse, que para una esfera unitaria encierra el área:

$$A_S = \pi\theta_a\theta_b \quad (28)$$

donde:

θ_a : semieje mayor de la elipse

θ_b : semieje menor de la elipse, y ambos ángulos se miden en radianes.

Se puede calcular el área A_S utilizando la Fig. 7. La Fig. 7 muestra una estación terrena/terrenal en el punto P sobre el eje x de un sistema de coordenadas tridimensionales. Se apunta el eje de puntería de la antena de la estación hacia el punto P_s en el plano x-y, con un ángulo de elevación de δ_0 . R_s es la distancia de la estación a P_s . El ángulo geocéntrico entre el vector de posición de la estación, \mathbf{P} , y P_s es θ_0 . El eje mayor de la elipse se encuentra en el plano x-y y el eje menor de la elipse en un plano normal al plano x-z.

Se puede determinar el eje mayor de la elipse utilizando la siguiente relación sencilla entre el ángulo de elevación y el ángulo central:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\cos \delta}{\beta}\right) - \delta \quad (29)$$

donde:

θ : ángulo central

δ : ángulo de elevación

$$\beta = 1 + h/r_e$$

h : altura del satélite de interés

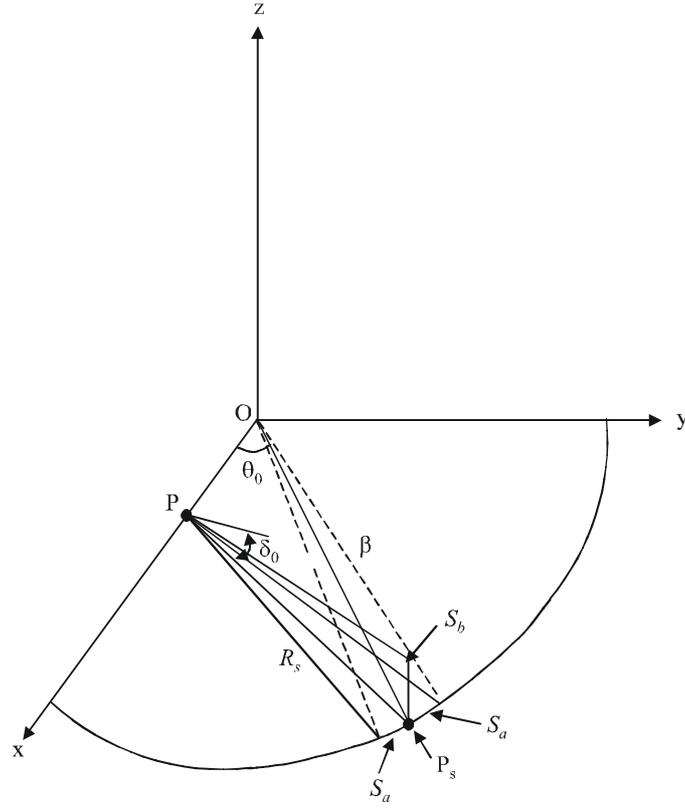
r_e : radio de la Tierra

Se puede demostrar rápidamente a partir de la ecuación (29) que θ_a , el semieje mayor de la elipse en la esfera unitaria es:

$$\theta_a = \frac{1}{2} \left[\cos^{-1}\left(\frac{\cos(\delta_0 - \varphi_3/2)}{\beta}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\cos(\delta_0 + \varphi_3/2)}{\beta}\right) + \varphi_3 \right] \quad (30)$$

donde: φ_3 es la abertura angular de interés de la antena (por lo general, la correspondiente a 3 dB); y los otros parámetros son los ya previamente definidos.

FIGURA 7
 Geometría utilizada para determinar los semiejes mayor y menor de la elipse resultante de la intersección del haz circular con la esfera orbital



Rap 2066-07

Con respecto a la Fig. 7, se determina el semieje menor de la elipse calculando primero el arco S_b , ubicado en el plano normal al plano x-y. El segundo paso consiste en determinar el ángulo central correspondiente al arco S_b . El ángulo central es el semieje menor de la elipse en una esfera unitaria. Por lo tanto:

$$\frac{R_S}{r_e} = \sqrt{\beta^2 - \cos^2 \delta_0} - \text{sen } \delta_0 \tag{31a}$$

$$\frac{S_b}{r_e} = \frac{R_S}{r_e} \frac{\varphi_3}{2} \tag{31b}$$

pero:

$$\frac{S_b}{r_e} = \beta \theta_b \tag{31c}$$

$$\theta_b = \frac{\varphi_3}{2} \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{\beta^2 - \cos^2 \delta_0} - \text{sen } \delta_0 \right] \tag{31d}$$

Se determina el valor de A_S a partir de las ecuaciones (28), (30) y (31d). Cabe señalar que θ_a , θ_b y φ_3 deben expresarse en radianes.

$$A_S = \frac{\pi}{4} \frac{\varphi_3}{\beta} \left[\cos^{-1} \left(\frac{\cos(\delta_0 - \varphi_3/2)}{\beta} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{\cos(\delta_0 + \varphi_3/2)}{\beta} \right) + \varphi_3 \right] \times \left[\sqrt{\beta^2 - \cos^2 \delta_0} - \sin \delta_0 \right] \quad (32)$$

Se determina la latitud de la intersección del eje de puntería de la antena de la estación terrestre/terrenal Φ_S como se indica a continuación. En la Fig. 8 se muestran las relaciones geométricas. La estación de interés se encuentra ahora ubicada en el plano x-z de un sistema de coordenadas geocéntrico con una latitud de φ_P . Los ángulos de orientación de la antena están dados en términos del ángulo de acimut θ_{az} medido desde el Norte en el sentido de las agujas del reloj y el ángulo de elevación δ_0 con respecto al plano horizontal local. En la Fig. 8 se muestra un triángulo esférico oblicuo con lados a, b y c opuestos a los ángulos α , θ_{az} y γ . Los parámetros del triángulo esférico oblicuo se relacionan con los parámetros físicos mediante:

$$b = \pi/2 - \Phi_S \quad (33a)$$

$$c = \pi/2 - \varphi_P \quad (33b)$$

$$a = \cos^{-1}(\beta^{-1} \cos \delta_0) - \delta_0 \quad (33c)$$

La latitud a la que el eje de puntería de la antena intercepta la esfera unitaria y la longitud relativa del punto de intersección están dados por la ley de los cosenos para los lados de un triángulo esférico oblicuo:

$$\sin \Phi_S = \sin \varphi_P \cos a + \cos \varphi_P \sin a \cos \theta_{az} \quad (34a)$$

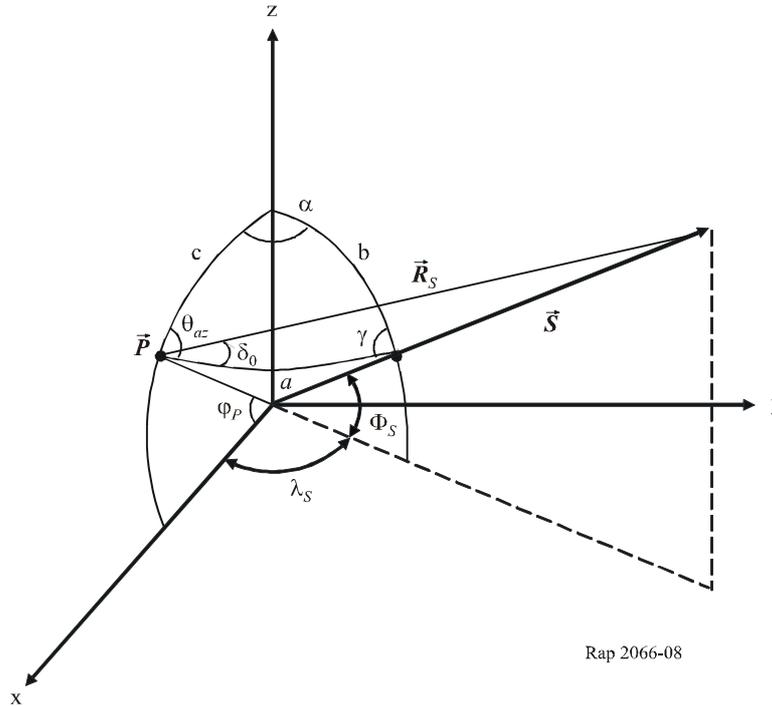
$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \sin \Phi_S \sin \varphi_P}{\cos \Phi_S \cos \varphi_P} \quad (34b)$$

Cabe señalar que λ_S es el ángulo entre los dos planos normales al plano x-y y que contiene los arcos b y c. Tras esta observación, se obtiene λ_S a partir de la ley de los cosenos si $\Phi_S = \varphi_P = 0$:

$$\lambda_S = \alpha \quad (35)$$

FIGURA 8

Geometría utilizada para determinar la latitud y la longitud de la intersección de la antena de la estación, dados el acimut y el ángulo de elevación, y la altura relativa de la órbita del satélite



4.2 Método manual para calcular las estadísticas de visibilidad

La ecuación (9) indica que la probabilidad de que un satélite ocupe una región pequeña de la esfera orbital limitada por la latitud $\varphi_s - \Delta\varphi_s/2$, $\varphi_s + \Delta\varphi_s/2$ y la longitud $\Delta\lambda_s$ está dada por:

$$P(\Delta\varphi, \Delta\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\Delta\lambda_s} \int_{\varphi_s - \Delta\varphi_s/2}^{\varphi_s + \Delta\varphi_s/2} \frac{\cos \varphi_s}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi_s}} d\varphi_s d\lambda_s \quad (36)$$

Además, según se ve de la ecuación (10), al hallar la integral del área se obtiene:

$$P(\Delta\varphi, \Delta\lambda) = \frac{\Delta\lambda_s}{2\pi^2} \left(\sin^{-1} \left[\frac{\sin(\varphi_s + \Delta\varphi_s/2)}{\sin i} \right] - \sin^{-1} \left[\frac{\sin(\varphi_s - \Delta\varphi_s/2)}{\sin i} \right] \right) \quad (37)$$

Esto sugiere que la probabilidad en un área más grande y tal vez más complicada podría evaluarse mediante la serie:

$$P(\varphi, \lambda) = \sum_{j,k} \frac{\Delta\lambda_j}{2\pi^2} \left(\sin^{-1} \left[\frac{\sin(\varphi_k + \Delta\varphi_0/2)}{\sin i} \right] - \sin^{-1} \left[\frac{\sin(\varphi_k - \Delta\varphi_0/2)}{\sin i} \right] \right) \quad (38)$$

donde: φ_k son franjas de latitud de altura $\Delta\varphi_0$ y longitud $\Delta\lambda_j$ de forma que se encuentran limitadas en la esfera orbital por la intercepción entre el haz de antena de interés y la esfera orbital. La utilización de esta técnica se explica mejor mediante un ejemplo.

En la Fig. 9 se muestra la intercepción típica entre un haz de antena circular de una estación terrena con la esfera orbital. En el Cuadro 1 figuran los parámetros de este ejemplo. La solución de la ecuación (38) se realiza utilizando una hoja de cálculo. Se establece un arreglo cuadrado compuesto por 41×41 células que representa la longitud en la dirección x y la latitud en la dirección y sobre la esfera orbital. La latitud y la longitud del centro del arreglo corresponden a la latitud y longitud de la intercepción del eje de puntería de la antena con la esfera orbital. Representa también la latitud y la longitud del vector de posición del satélite cuando éste se encuentra alineado con el eje de puntería de la antena. Por lo tanto, la demás celdas del arreglo representan las posibles latitudes y longitudes del vector de posición del satélite. Resta determinar cuáles de dichas celdas se encuentran en el área encerrada por el haz de antena de interés, φ_3 , de la estación terrena. Esto se lleva a cabo mediante el uso de vectores, tal y como se indica en la Fig. 10.

En la Fig. 10 se muestra el vector de posición de la estación terrena o de la estación terrenal \vec{P} , el vector de posición del satélite en \vec{S} en una ubicación arbitraria y el vector de distancia \vec{R}_S . Dado que los vectores de posición de la estación y del satélite o bien son conocidos o se suponen, se determina el vector de distancia a partir de:

$$\vec{R}_S = \vec{S} - \vec{P} \quad (39)$$

Los vectores de posición de la estación y del satélite están dados por:

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_P \\ 0 \\ \sin \gamma_P \end{vmatrix} \quad (40a)$$

$$\vec{S} = \beta \begin{vmatrix} \cos \varphi_s \cos \lambda_s \\ \cos \varphi_s \sin \lambda_s \\ \sin \varphi_s \end{vmatrix} \quad (40b)$$

La clave para determinar si una ubicación de satélite en particular se encuentra en el área circunscrita por el haz de antena de la estación es el producto escalar entre el vector de distancia de eje de puntería y el vector de distancia asociado al supuesto vector de posición del satélite. El desplazamiento angular entre los dos vectores es:

$$\varphi_{j,k} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{|\vec{R}_{S0}| |\vec{R}_{j,k}|} \vec{R}_{S0} \cdot \vec{R}_{j,k} \right] \quad (41)$$

donde:

- $\varphi_{j,k}$: el ángulo con respecto al eje del j -ésimo valor de $\Delta\lambda$ y el k -ésimo valor de φ
- \vec{R}_{S0} : vector de distancia del eje de puntería
- $\vec{R}_{j,k}$: vector de distancia del j -ésimo valor de $\Delta\lambda$ y el k -ésimo valor de φ

Para un haz de antena circular, si $\varphi_{j,k} \leq \varphi_3 / 2$, entonces el satélite aparecerá dentro de la abertura angular del haz de interés. Si dicha condición se cumple para la celda en cuestión, entonces el valor de la celda se fija a 1, y si no se cumple la condición, el valor de la celda se fija a 0. Por lo tanto,

para cada fila del arreglo de 41×41 celdas será únicamente necesario sumar el número de unos de una fila y multiplicar dicho número por el factor dado en la ecuación (38). Si se suman los valores así obtenidos para cada una de las 41 filas de latitud se obtiene un estimativo de la probabilidad de que el satélite aparezca dentro de la abertura angular de la antena de estación.

El tamaño del paso, tanto en latitud como en longitud, son parámetros que se ingresan manualmente en la hoja de cálculo. Se eligen los valores de forma que se garantice que el área resultante, según se muestra en la Fig. 9, se encuentre completamente al interior del arreglo. En otras palabras, las células situadas en los extremos de latitud y longitud contienen todas el valor 0, y el área resultante es lo suficientemente grande como para garantizar la precisión de la solución numérica.

CUADRO 1
Ejemplo de parámetros y resultados

Latitud de la estación terrena = 40°	Latitud de la intersección (Φ_s) = $37,78^\circ$
Longitud de la estación terrena = 0°	Longitud de la intersección (λ_s) = $8,88^\circ$
Ángulo de acimut de la antena = 105°	Tamaño del paso de latitud = $0,032^\circ$
Ángulo de elevación de la antena = 22°	Tamaño del paso de longitud = $0,065^\circ$
Altura del satélite = 400 km	Probabilidad de «visibilidad» = $0,00464\%$
Inclinación del satélite = $51,6^\circ$	
Abertura angular de interés = 7°	

FIGURA 9

Latitud y longitud de la intersección de un haz circular con la esfera orbital (véase el Cuadro 1)

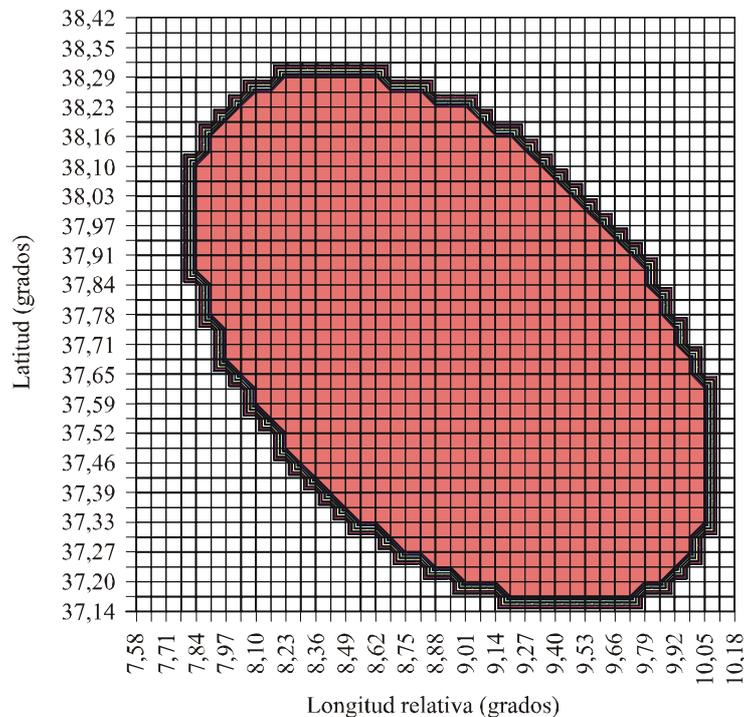
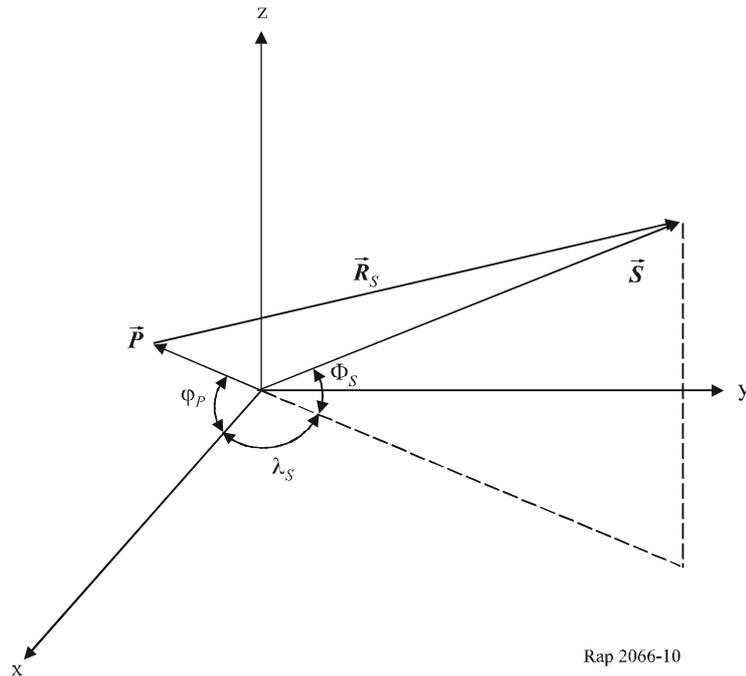


FIGURA 10

Determinación de la latitud y longitud en la esfera orbital circunscritas por el haz de interés de la antena de la estación terrena



4.3 Comparación de los resultados numéricos de los métodos simplificado y manual para los haces de antenas circulares

En el Cuadro 2 se muestran los resultados representativos de seis ejemplos. En cada caso se supone que el satélite de interés se encontraba en una órbita de 800 km, inclinada 82° con respecto al plano ecuatorial. Se supone además que el periodo orbital y la precesión de los nodos eran independientes de la velocidad de rotación de la Tierra. Como consecuencia, en un conjunto de pruebas, la posición del satélite en la esfera orbital es un evento aleatorio.

Tal y como se muestra en el Cuadro 2, el error entre los resultados obtenidos utilizando los dos métodos fue de menos de 0,4% para los seis casos.

CUADRO 2

Comparación de los resultados de probabilidad de «visibilidad» obtenidos para los seis ejemplos utilizando el método simplificado y el método manual de cálculo

Caso	Posición de la estación		Datos de la antena			Probabilidad de visibilidad		
	Latitud (grados)	Longitud (grados)	Ángulo de acimut (grados)	Ángulo de elevación (grados)	Abertura angular de interés (grados)	Método simplificado (%)	Método manual (%)	Error relativo (%)
1	30	0	120	22	7,0	0,00634	0,00636	-0,322
2	30	0	77	4	5,5	0,0153	0,0154	-0,383
3	35	0	135	25	3,0	0,00099	0,00099	-0,006

CUADRO 2 (Fin)

Caso	Posición de la estación		Datos de la antena			Probabilidad de visibilidad		
	Latitud (grados)	Longitud (grados)	Ángulo de acimut (grados)	Ángulo de elevación (grados)	Abertura angular de interés (grados)	Método simplificado (%)	Método manual (%)	Error relativo (%)
4	35	0	82	10	4,5	0,00687	0,00689	-0,255
5	40	0	118	23	4,0	0,00214	0,00214	-0,005
6	40	0	88	23	3,2	0,00148	0,00148	0,198

5 Métodos para calcular las coordenadas de la intersección de dos planos orbitales

Los eventos de interferencia que involucran una estación terrena y dos o más satélites ocurren con frecuencia en el momento en que los dos satélites se encuentran en el punto más cercano. Un caso de especial importancia se relaciona con satélites de observación terrestre en órbitas heliosíncronas. Por lo general estas órbitas se encuentran a una misma altura, pero con planos orbitales desplazados. Si no se ha prestado atención al sincronismo de los satélites en sus planos orbitales respectivos, es posible que los satélites se crucen, uno frente al otro. Si esto ocurre cuando uno de los satélites está siendo rastreado por una estación terrena, puede resultar que la estación terrena sea «capturada» por el otro satélite y empiece a rastrear el otro satélite. Este evento de interferencia conlleva una pérdida de datos durante el periodo que transcurre desde el momento en que se pierde el enganche con el satélite deseado y aquél en que éste se vuelve a recuperar. Es relativamente fácil calcular la latitud y longitud relativas en el espacio inercial en que esto ocurre.

5.1 Análisis

En la Fig. 11 se muestran las relaciones geométricas del sistema de coordenadas inerciales. Hay dos planos orbitales. El primero, que se encuentra inclinado I_1 con respecto al plano x-y está desplazado con respecto al segundo por $\Delta\lambda_1$. El eje x se encuentra en el segundo plano orbital, el cual está inclinado I_2 con respecto al plano x-y. La latitud de la intersección de los dos planos se indica mediante φ_0 . Se muestran las trayectorias de los satélites en la esfera orbital unitaria mediante los arcos a y b. Es bien sabido, en trigonometría esférica, que existe una relación simple entre la latitud de un punto en una órbita circular inclinada y el ángulo central. Por lo tanto, para el plano número 1:

$$\text{sen } \varphi_1 = \text{sen } b \text{ sen } I_1 \quad (42a)$$

y para el plano número 2

$$\text{sen } \varphi_2 = \text{sen } a \text{ sen } I_2 \quad (42b)$$

En el punto de intersección, $\varphi_1 = \varphi_2$. Por lo tanto:

$$\text{sen } b \text{ sen } I_1 = \text{sen } a \text{ sen } I_2 \quad (43)$$

Además, a partir de la Ley de los Senos para triángulos esféricos oblicuos:

$$\frac{\text{sen } \Delta\lambda_1}{\text{sen } \gamma} = \frac{\text{sen } a}{\text{sen } I_1} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen}(180 - I_2)} \quad (44)$$

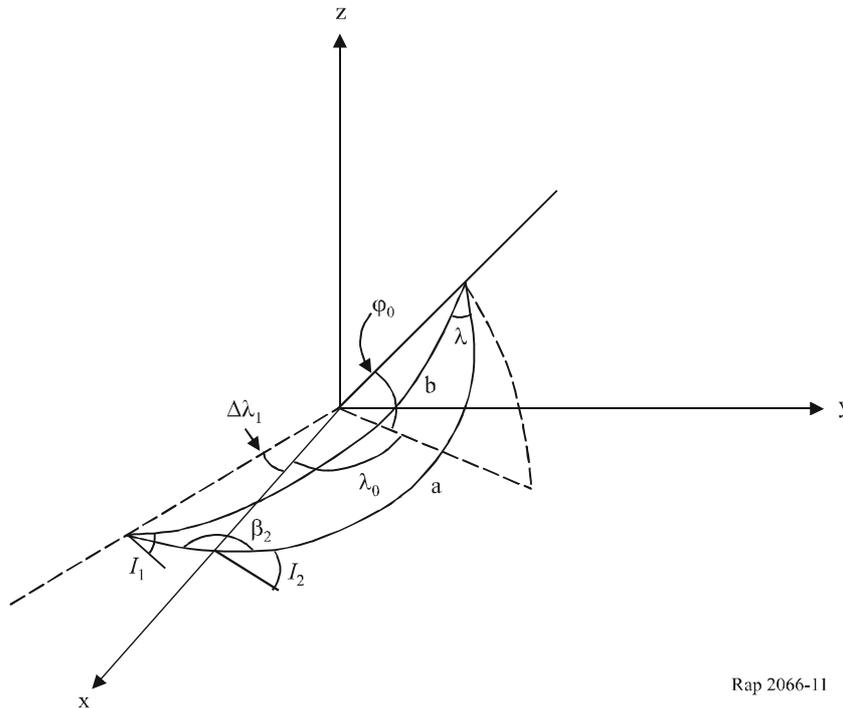
Asimismo, a partir de la ley de los cosenos para los ángulos:

$$\cos \gamma = -\cos I_1 \cos(180 - I_2) + \sin I_1 \sin(180 - I_2) \cos \Delta\lambda_1 \quad (45a)$$

Puede resolverse la ecuación (45a) para γ :

$$\gamma = \cos^{-1}(\cos I_1 \cos I_2 + \sin I_1 \sin I_2 \cos \Delta\lambda_1) \quad (45b)$$

FIGURA 11
Geometría para determinar la latitud y longitud de la intersección de dos planos



Rap 2066-11

En consecuencia, la latitud de la intersección se expresa:

$$\phi_0 = \sin^{-1}\left(\sin I_1 \sin I_2 \frac{\sin \Delta\lambda_1}{\sin \gamma}\right) \quad (46)$$

La longitud de la intersección se obtiene de la siguiente forma. A partir de la ecuación (44), el ángulo central a está dado por:

$$a = \sin^{-1}\left(\sin I_1 \frac{\sin \Delta\lambda_1}{\sin \gamma}\right) \quad (47a)$$

Además,

$$\lambda_0 = \tan^{-1}(\tan a \cos I_2) \quad (47b)$$

En el Cuadro 3 figuran varios ejemplos de la latitud y longitud de intersección de los planos orbitales en un sistema de coordenadas inerciales. Por conveniencia, se supone que la ascensión recta del nodo ascendente (RAAN, *right ascension of the ascending node*), del satélite número 2 es el eje x. Cabe señalar que la latitud y longitud de los planos de intersección son la latitud y longitud del punto en que los satélites se cruzarán si las alturas de las órbitas satelitales son iguales.

CUADRO 3

Ejemplos de intersección de planos orbitales desfasados

Caso	Satélite número 1		Satélite número 2		Intersección	
	RAAN (grados)	Inclinación (grados)	RAAN (grados)	Inclinación (grados)	Latitud (grados)	Longitud (grados)
1	-5	98,2	0	96,0	65,104	-13,089
2	-5	98,2	0	98,2	81,792	-87,5
3	-10	98,2	0	98,2	81,769	-85,0
4	-15	98,2	0	98,2	81,730	-82,5
5	-20	98,2	0	98,2	81,675	-80,0
