

Groupe à Accessibilité Totale,

Système avec perte

(Solution de l'exercice)

De TETRAPRO, édité par Mr. H. Leijon, ITU



**UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES**



<p>$A = \text{trafic offert} = \lambda \cdot \tau \text{ erl.}$</p> <p>où</p> <p>$\lambda = \text{Taux d'appel} = \text{Nombre espéré d'appels par unité de temps;}$</p> <p>$\tau = \text{Temps moyen de prise exprimé de la même unité de temps.}$</p>	TXA 1
<p>$\lambda = 1000 \text{ appels /heure}$</p> <p>$\tau = 90 \text{ sec.}$</p> <p>$A = \frac{1000 \cdot 90}{3600} = \underline{\underline{25 \text{ erl.}}}$</p>	a
<p>$\lambda = 1200 \text{ appels /heure}$</p> <p>$\tau = 2 \text{ min.}$</p> <p>$A = \frac{1200 \cdot 2}{60} = \underline{\underline{40 \text{ erl.}}}$</p>	b
<p>$\lambda = 4 \text{ appels/sec.}$</p> <p>$\tau = 1.6 \text{ min.}$</p> <p>$A = 4 \cdot 1.6 \cdot 60 = \underline{\underline{384 \text{ erl.}}}$</p>	c
<p>$A = 35 \text{ erl.}$</p> <p>$\tau = 140 \text{ sec.}$</p> <p>$\lambda = \frac{35}{140} \text{ appels/sec.} = \frac{35 \cdot 3600}{140} = \underline{\underline{900 \text{ appels / heure}}}$</p>	TXA 2
<p>$A = 33 \text{ erl.}$</p> <p>$\lambda = 1100 \text{ appels/heure}$</p> <p>$\tau = \frac{33 \cdot 3600}{1100} = \underline{\underline{108 \text{ sec.}}}$</p>	TXA 3

$n =$ Nombre de circuits = 10.

$p =$ Nombre de circuits occupés.

$t_p =$ Temps total durant la période avec exactement p circuits occupés.

$T =$ Période totale. $\sum_{p=0}^n t_p = T$

$A^1 =$ Trafic écoulé par le groupe durant la période.

$$A^1 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{p=0}^n p \cdot t_p = \sum_{p=0}^n p \cdot \frac{t_p}{T}$$

No. de circuits occupés P	Proportion du temps total avec exactement P équipements occupé t_p/T	$p \cdot \frac{t_p}{T}$
0	—	—
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—
5	0.10	0.50
6	0.20	1.20
7	0.25	1.75
8	0.15	1.20
9	0.20	1.80
10	0.10	1.00
Somme	$\sum \frac{t_p}{T} = 1.00$	$\sum p \cdot \frac{t_p}{T} = 7.45$

$A^1 =$ 7.45 erl.

$E =$ Temps de congestion durant la période = Proportion du temps, quand tous les circuits sont occupés

$$= \frac{t_n}{T} = \frac{t_{10}}{T} = \underline{\underline{0.10}}$$

TXA 4

a

cont.

No. d'observation	Nombre de circuits occupés
1	8
2	8
3	10
4	10
5	9
6	7
7	7
8	6
9	5
10	5
Somme	75

cont:
TXA 4
b

$$A^1 = \text{Trafic écoulé} \approx \frac{75}{10} = \underline{\underline{7.5 \text{ erl.}}}$$

$$E = \text{Temps de congestion} \approx \frac{2}{10} = \underline{\underline{0.20}}$$

Distribution d'Erlang

TXA 5

$\lambda =$ Taux d'appels

$\tau =$ Temps moyen de prise

$A =$ Trafic offert = $\lambda \cdot \tau$

$E =$ Temps de congestion = Congestion d'appel = $B =$

$$= E_n(A) = \frac{A^n}{n!} / \sum_{v=0}^n \frac{A^v}{v!}$$

Où $n =$ Nombre de circuits.

$n = 10$

Utilisant la table d'Erlang, on trouve:

A erl.	$E_{10}(A)$
1	0.0000
3	0.0008
5	0.0184
10	0.2146
15	0.4103
25	0.6224
50	0.8047
100	0.9011
200	0.9503
300	0.9668

<p><u>Distribution d'Erlang</u></p> <p>Voir exemple TXA 5</p> <p><u>A = 10 erl.</u></p> <p>Utilisant la table d'Erlang on trouve:</p> <table border="1" data-bbox="384 557 817 1115"><thead><tr><th>n</th><th>$E_n(10)$</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>0.9091</td></tr><tr><td>2</td><td>0.8197</td></tr><tr><td>3</td><td>0.7321</td></tr><tr><td>5</td><td>0.5640</td></tr><tr><td>7</td><td>0.4090</td></tr><tr><td>10</td><td>0.2146</td></tr><tr><td>15</td><td>0.0365</td></tr><tr><td>20</td><td>0.0019</td></tr><tr><td>25</td><td>0.0000</td></tr><tr><td>30</td><td>0.0000</td></tr></tbody></table>	n	$E_n(10)$	1	0.9091	2	0.8197	3	0.7321	5	0.5640	7	0.4090	10	0.2146	15	0.0365	20	0.0019	25	0.0000	30	0.0000	<p>TXA 6</p>
n	$E_n(10)$																						
1	0.9091																						
2	0.8197																						
3	0.7321																						
5	0.5640																						
7	0.4090																						
10	0.2146																						
15	0.0365																						
20	0.0019																						
25	0.0000																						
30	0.0000																						
<p><u>Distribution d'Erlang</u></p> <p>$E_{20}(A) = 0.005$</p> <p>Utilisant la partie de la table d'Erlang où E est un paramètre d'entrée, on trouve:</p> <p>A = <u>11.092 erl.</u></p>	<p>TXA 7</p>																						

$A^1 = \text{Trafic écoulé} = A \cdot [1 - E_n(A)] =$ $= 14 \cdot [1 - E_{18}(14)] = 14 \cdot [1 - 0.0628] = \underline{\underline{13.12 \text{ erl}}}$ <p>a = Trafic moyen écoulé par circuit =</p> $= \frac{A \cdot (1 - E_n(A))}{n} = \frac{A^1}{n} = \frac{13.12}{18} = \underline{\underline{0.729 \text{ erl.}}}$ <p>Trafic rejeté = $A \cdot E_n(A)$</p> $= 14 \cdot E_{18}(14) = 14 \cdot 0.0628 = \underline{\underline{0.88 \text{ erl.}}}$ <p>Le nombre espéré d'appels rejetés par heure =</p> $= \lambda \cdot E_n(A) = 480 \cdot E_{18}(14) = 480 \cdot 0.0628 = \underline{\underline{30.1 \text{ appels / heure}}}$	<p>cont: TXA 9</p>
<p><u>Distribution d'Erlang</u></p> <p>n = 5 circuits</p> <p>A = 2 erl.</p> <p>a_v = Trafic écoulé par le v-ème circuit (v = 1, 2, 3, 4, 5)</p> <p>2 erl. → ○ ○ ○ ○ ○ 1 2 3 4 5</p> <p><u>Recherche aléatoire :</u></p> $\alpha_v = \frac{A \cdot (1 - E_n(A))}{n} = \frac{2 \cdot (1 - E_5(2))}{5} =$ $= \frac{2 \cdot (1 - 0.0367)}{5} = \underline{\underline{0.385 \text{ erl.}}} \quad (v = 1, 2, 3, 4, 5)$	<p>TXA 10</p> <p>cont.</p>

Recherche séquentielle

cont:
TXA
10

$$a_v = A \cdot [E_{v-1}(A) - E_v(A)]$$

$$(v = 1,2,3,4,5; \quad E_0(A) = 1 \text{ if } A > 0)$$

Utilisant la table d'Erlang, on trouve

$$E_0(2) = 1$$

$$E_1(2) = 0.6667$$

$$E_2(2) = 0.4000$$

$$E_3(2) = 0.2105$$

$$E_4(2) = 0.0952$$

$$E_5(2) = 0.0367$$

$$a_1 = 2 \cdot [E_0(2) - E_1(2)] = 2 \cdot [1 - 0.6667] = \underline{0.667 \text{ erl.}}$$

$$a_2 = 2 \cdot [E_1(2) - E_2(2)] = 2 \cdot [0.6667 - 0.4000] = \underline{0.533 \text{ erl.}}$$

etc.

Résultat :

$$a_1 = \underline{0.667 \text{ erl.}} \quad a_2 = \underline{0.533 \text{ erl.}} \quad a_3 = \underline{0.379 \text{ erl.}}$$

$$a_4 = \underline{0.231 \text{ erl.}} \quad a_5 = \underline{0.117 \text{ erl.}}$$

$$\text{Noter que } \frac{1}{5} \cdot \sum_{v=1}^5 a_v = \frac{1}{5} \cdot 1.927 = \underline{0.385 \text{ erl.}}$$

On conclut que la valeur moyenne du trafic écoulé par circuit est la même pour la recherche séquentielle et celle aléatoire.

<p>Distribution d'Erlang</p> <p style="text-align: center;"> $A \text{ erl.} \longrightarrow \begin{matrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \dots & \bigcirc & \bigcirc \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{matrix}$ </p> <p style="text-align: center;">(recherche séquentielle)</p> <p> $a_v = \text{Trafic écoulé par le } v\text{-ème circuit}$ $a_v = A \cdot [E_{v-1}(A) - E_v(A)]$ $(v = 1, 2, \dots, n; \quad E_0(A) = 1 \text{ if } A > 0)$ </p> <p>Soit $a =$ Le trafic moyen écoulé par les différents circuits =</p> $= \frac{1}{n} \cdot \sum_{v=1}^n a_v$ $a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{v=1}^n A \cdot [E_{v-1}(A) - E_v(A)] =$ $= \frac{1}{n} \cdot A \cdot \left[1 + \sum_{v=1}^{n-1} E_v(A) - \sum_{v=1}^{n-1} E_v(A) - E_n(A) \right] =$ $= \frac{A \cdot [1 - E_n(A)]}{n} =$ <p>= Le trafic écoulé par circuit dans un groupe avec recherche aléatoire, n circuits et trafic offert = $A \text{ erl.}$</p>	<p>TXA 11</p>
--	-------------------

Distribution d'Erlang

TXA
12

$E_{10}(A) = 0.005$ donne $A = \underline{3.961 \text{ erl.}}$

$E_{100}(A) = 0.005$ donne $A = \underline{80.91 \text{ erl.}}$

(selon la table d'Erlang)

	n = 10	n = 100
A	3.961 erl.	80.91 erl.
$E_n(A)$	0.005	0.005
$A_1 = 1.1 \cdot A$	4.36 erl.	89.00 erl.
$E_n(A_1)$	0.009	0.024
$A_2 = 1.2 \cdot A$	4.75 erl.	97.09 erl
$E_n(A_2)$	0.014	0.059

Si "a" dénote le trafic écoulé par circuit, on trouve:

	n = 10	n = 100
A	a = 0.394	a = 0.805
$A_1 = 1.1 \cdot A$	a = 0.432	a = 0.869
$A_2 = 1.2 \cdot A$	a = 0.469	a = 0.914

<p>Soit T la longueur de l'intervalle. La fonction de distribution F(x) est par définition:</p> $F(x) = P\{T \leq x\}$ <p>Calculer la fonction de distribution complémentaire:</p> $1 - F(x) = P\{T > x\}$ <p><u>0 < j < n:</u></p> <p>L'intervalle peut finir par un appel ou une terminaison. Alors T > x si</p> <ol style="list-style-type: none">1) No appels dans (0, x) <u>et</u>2) No terminaisons dans (0, x). <p>La probabilité de 1) est $e^{-\lambda \cdot x}$</p> <p>La probabilité de 2) est $e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}}$</p> <p>Par conséquent,</p> $1 - F(x) = e^{-\lambda \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}} = e^{-\frac{A+j}{\tau} \cdot x}$ $F(x) = 1 - e^{-\frac{A+j}{\tau} \cdot x}$ <p>c. à .d. <u>une distribution exponentielle avec le paramètre $\frac{A+j}{\tau}$</u></p> <p>La <u>moyenne</u> d'une variable aléatoire d'une distribution exponentielle est égale à l'inverse du paramètre c'est à dire</p> $\frac{\tau}{A+j}$	<p>TXA 13</p> <p>a</p> <p>b</p> <p>cont.</p>
---	--

L'état fini par une transition à (j+1) si le premier événement est un appel.

cont:
TXA
13

La probabilité conditionnelle pour que le premier événement est un appel qui se présente dans (x, x+dx) est

c

$P\{\text{le premier événement est un appel / un appel arrive dans } (x, x + dx)\} =$

$P\{\text{pas de term. dans}(0, x), \text{pas d'appels dans}(0, x),$

$\text{un appel dans}(x, x + dx)\} =$

$$e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot dx$$

Laissons à part la condition, par le théorème de la probabilité totale, la probabilité demandée p est

$$p = \int_0^{\infty} e^{-j \cdot \frac{x}{\tau}} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot dx = \frac{\lambda}{A + j} = \frac{A}{A + j}$$

La probabilité pour que l'état fini par une transition à (j-1) est 1-p c'est à dire

$$1 - \frac{A}{A + j} = \frac{j}{A + j}$$

j=0:

$$1 - F(x) = P\{\text{pas d'appels dans } (0, x)\} = e^{-\lambda \cdot x}$$

a

$$F(x) = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda \cdot x}}}$$

La valeur moyenne est l'inverse du paramètre =

b

$$\underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

cont.

<p> $P\{\text{état } (j=0) \rightarrow \text{état } (j=1)\} = \underline{\underline{1}}$ $P\{\text{état } (j=0) \rightarrow \text{état } (j=-1)\} = \underline{\underline{0}}$ </p> <p><u>j = n:</u></p> <p> $1 - F(x) = P\{\text{pas de terminaison dans } (0, x)\} = e^{-n \cdot \frac{x}{\tau}}$ </p> <p> $F(x) = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{n \cdot x}{\tau}}}}$ </p> <p>Valeur moyenne = $\frac{\tau}{n}$</p> <p> $P\{\text{état } (j=n) \rightarrow \text{état } (j=n+1)\} = \underline{\underline{0}}$ $P\{\text{état } (j=n) \rightarrow \text{état } (j=n-1)\} = \underline{\underline{1}}$ </p>	<p>cont: TXA 13 c</p> <p>a</p> <p>b</p> <p>c</p>
<p>Dénotons la longueur de l'appel par X.</p> <p><u>Exactement 2 pulses si $3 \leq x < 6$:</u></p> <p> $P\{3 \leq x \leq 6\} = F(6) - F(3) =$ $= \left(1 - e^{-\frac{6}{3}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right) =$ $= e^{-1} - e^{-2} = 0.3679 - 0.1353 = \underline{\underline{0.2326}}$ </p> <p><u>< 2 pulses si $x < 3$:</u></p> <p> $P\{x < 3\} = 1 - e^{-\frac{3}{3}} = 1 - e^{-1} = \underline{\underline{0.6321}}$ </p> <p><u>> 2 pulses si $x \geq 6$:</u></p> <p> $P\{x \geq 6\} = e^{-\frac{6}{3}} = e^{-2} = \underline{\underline{0.1353}}$ </p>	<p>TXA 14 a</p> <p>b</p> <p>c</p> <p>cont.</p>

<p>≥ 2 pulses si $x \geq 3$:</p> $P\{x \geq 3\} = e^{-\frac{3}{\tau}} = e^{-1} = \underline{\underline{0.3679}}$ <p>≤ 2 pulses si $x < 6$:</p> $P\{x < 6\} = 1 - e^{-\frac{6}{\tau}} = 1 - e^{-2} = \underline{\underline{0.8647}}$	<p>cont: TXA 14 d e</p>														
<p>Dénotons le nombre de pulses par K.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;">K</th> <th>Probabilité</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td>$1 - e^{-\frac{m}{\tau}}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">2</td> <td>$e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">3</td> <td>$e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">⋮</td> <td>⋮</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">j</td> <td>$e^{-\frac{(j-1) \cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j \cdot m}{\tau}}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">⋮</td> <td>⋮</td> </tr> </tbody> </table> $E\{K\} = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(e^{-\frac{(j-1) \cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j \cdot m}{\tau}} \right) =$ $= \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}} \right) + 2 \cdot \left(e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}} \right) + 3 \cdot \left(e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}} \right) + \dots$ $= 1 + e^{-\frac{m}{\tau}} + 2 \cdot e^{-\frac{m}{\tau}} - 2 \cdot e^{-\frac{2m}{\tau}} + 3 \cdot e^{-\frac{2m}{\tau}} - 3 \cdot e^{-\frac{3m}{\tau}} + \dots$ $= 1 + e^{-\frac{m}{\tau}} + e^{-\frac{2m}{\tau}} + e^{-\frac{3m}{\tau}} + \dots$ <p>= une série géométrique avec un quotient $e^{-\frac{m}{\tau}}$,</p> <p>alors la somme est $\frac{1}{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}} = \frac{e^{m/\tau}}{e^{m/\tau} - 1}$</p>	K	Probabilité	1	$1 - e^{-\frac{m}{\tau}}$	2	$e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}}$	3	$e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}}$	⋮	⋮	j	$e^{-\frac{(j-1) \cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j \cdot m}{\tau}}$	⋮	⋮	<p>TXA 15</p>
K	Probabilité														
1	$1 - e^{-\frac{m}{\tau}}$														
2	$e^{-\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{2m}{\tau}}$														
3	$e^{-\frac{2m}{\tau}} - e^{-\frac{3m}{\tau}}$														
⋮	⋮														
j	$e^{-\frac{(j-1) \cdot m}{\tau}} - e^{-\frac{j \cdot m}{\tau}}$														
⋮	⋮														

<p>Dénotons la longueur de conversation par X.</p> $P\{x > 6 \text{ min.}\} = P\{x > 6 \text{ et } A \rightarrow B\} +$ $= P\{x > 6 \text{ et } B \rightarrow A\} +$ $= P_{A \rightarrow B} \cdot P\{x > 6 / A \rightarrow B\} + P_{B \rightarrow A} \cdot P\{x > 6 / B \rightarrow A\} =$ $= 0.55 \cdot e^{-\frac{6}{4}} + 0.45 \cdot e^{-\frac{6}{3}} = 0.55 \cdot e^{-1.5} + 0.45 \cdot e^{-2} =$ $= 0.55 \cdot 0.2231 + 0.45 \cdot 0.1353 = \underline{\underline{0.184}}$	<p>TXA 16</p>
<p>Prenons une des conversations. La probabilité pour qu'il reste en progrès après une minute est</p> $e^{-\frac{1}{3}}$ <p>La probabilité pour qu'il finisse avant une minute est</p> $1 - e^{-\frac{1}{3}}$ <p>Les cinq conversations sont indépendantes les uns des autres. Alors le problème est similaire à la situation où on met 5 essais indépendants dans lesquels la probabilité de succès est constante. Dans cet exemple succès = conversation en progrès, alors par la distribution binomiale, la probabilité demandée est</p> $\binom{5}{2} \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^{5-2} =$ $= 10 \cdot 0.7165^2 \cdot 0.2835^3 = \underline{\underline{0.117}}$	<p>TXA 17</p>

$$a_9 = \underline{\underline{A(E_8(A) - E_9(A))}}$$

$$P_9 = \frac{A^9}{9!} / \sum_{j=0}^{10} \frac{A^j}{j!} = \frac{10}{A} \cdot \underline{\underline{E_{10}(A)}}$$

$$\underline{\underline{E_9(A)}}$$

$P\{9 \text{ premiers circuits occupés}\} =$

$= P\{9 \text{ premiers occupés et le 10ème libre}\} +$

$+ P\{9 \text{ premiers occupés et 10ème occupé}\}$

Le côté gauche = $E_9(A)$.

Le dernier terme sur RHS = $P\{\text{toutes les 10 occupées}\} = E_{10}(A)$.

Par conséquent:

$$E_9(A) = P\{9 \text{ premiers occ. et le 10ème libre}\} + E_{10}(A)$$

et

$$P\{9 \text{ premiers occup. et le 10ème libre}\} = E_9(A) - E_{10}(A)$$

TXA

18

a

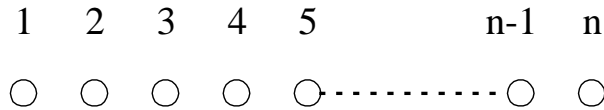
b

c

d

<p>Comme le nombre de circuits est le même que le nombre de sources, il n'y a pas d'interférence entre les appels à partir des différentes sources. Le trafic offert devrait être écoulé. Alors le problème est similaire à une série de 6 expériences où la probabilité de succès dans chaque expérience est égale à la probabilité de trouver une source être occupée = 0.5 (comme chaque source offre 0.5 erl.)</p> <p><u>Trafic offert</u> = $6 \cdot 0.5 = \underline{3 \text{ erl.}}$</p> <p><u>Temps de congestion</u> = $P\{\text{tous les 6 circuits sont occupés}\} =$ $= P\{\text{toutes les 6 sources sont occupées}\} = 0.5^6 = \underline{0.016}$</p> <p><u>Congestion d'appel</u> = 0 comme il n'y a pas d'appels qui arrive quand tous les circuits sont occupés.</p>	<p>TXA 19</p>																												
<p>$N =$ Nombre de sources. $n =$ Nombre de circuits.</p> <p><u>$N \gg n \Rightarrow$ Distribution d'Erlang:</u></p> <p>$A = 3 \text{ erl.}$</p> <p><u>Temps de congestion = Congestion d'appel =</u> $= E_n(A) = E_6(3) = \underline{0.052}$</p>	<p>TXA 20</p>																												
<table border="1"> <thead> <tr> <th>No. de sources</th> <th>No. de circuits</th> <th>Distribution</th> <th>Trafic offert par source erl.</th> <th>Trafic offert erl.</th> <th>Congestion d'appel B</th> <th>Congestion de temps E</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>n</th> <th></th> <th>erl.</th> <th>erl.</th> <th>B</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>6</td> <td>BERNOULLI</td> <td>0.5</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>0.016</td> </tr> <tr> <td>∞</td> <td>6</td> <td>ERLANG</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>0.052</td> <td>0.052</td> </tr> </tbody> </table>	No. de sources	No. de circuits	Distribution	Trafic offert par source erl.	Trafic offert erl.	Congestion d'appel B	Congestion de temps E	N	n		erl.	erl.	B	E	6	6	BERNOULLI	0.5	3	0	0.016	∞	6	ERLANG	0	3	0.052	0.052	<p>TXA 21</p>
No. de sources	No. de circuits	Distribution	Trafic offert par source erl.	Trafic offert erl.	Congestion d'appel B	Congestion de temps E																							
N	n		erl.	erl.	B	E																							
6	6	BERNOULLI	0.5	3	0	0.016																							
∞	6	ERLANG	0	3	0.052	0.052																							

No.de circuits	Etats possibles					TXA 22
1	○	● ○ ○ ○	● ● ● ○ ○ ○	● ● ● ○	●	a
2	○	○ ● ○ ○	● ○ ○ ● ● ○	● ● ○ ●	●	
3	○	○ ○ ● ○	○ ● ○ ● ○ ●	● ○ ● ●	●	
4	○	○ ○ ○ ●	○ ○ ● ○ ● ●	○ ● ● ●	●	
	0 circ. occupé	1 circ. occupé	2 circ. occupés	3 circ. occupés	4 circ. occupés	
<u>Nombre d'états avec exactement 0 circuit occupés = 1</u>						b
<u>-“- -“- -“- -“- -“- 1 -“- -“- = 4</u>						
<u>-“- -“- -“- -“- -“- 2 -“- -“- = 6</u>						
<u>-“- -“- -“- -“- -“- 3 -“- -“- = 4</u>						
<u>-“- -“- -“- -“- -“- 4 -“- -“- = 1</u>						
<u>Nombre total des différents états =</u>						c
<u>= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16</u>						
<u>Nombres d'états, quand le circuit no. 1 et no. 3</u>						d
<u>sont occupés = 4</u>						



TXA
23

Les différents états sont (0), (1), (2) ..., (n),
où (p) dénote p circuits occupés (p = 0,1,...n).

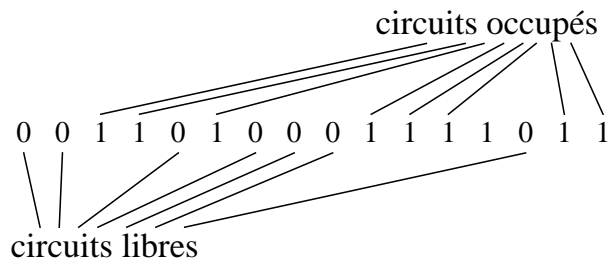
a

Le nombre de différents états est alors = n + 1.

On peut considérer une séquence de symboles, chacun d'eux est soit 0 ou 1, où 0 dénote un circuit libre et 1 un circuit occupé.

b

Exemple:



On a deux possibilités pour chaque circuit, 0 ou 1.

Cependant il y a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^n$ différentes séquences
n facteurs

et donc 2^n différents états.

Le nombre de différents états avec exactement p circuits engagés est le même que le nombre de combinaisons de p de n éléments.

c

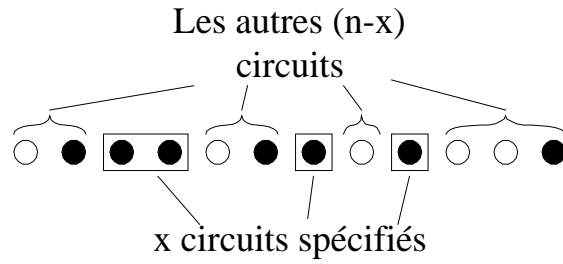
Ainsi, le nombre de différents états avec exactement p circuits engagés est

$$\underline{\underline{\binom{n}{p} \quad (p = 0, 1, \dots, n)}}$$

Note:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n \text{ (en comparaison avec b)}$$

cont.



cont:
TXA
23
d

Dans tous les p circuits engagés, quand $p \geq x$. Parmi les $(n-x)$ circuits, il y a donc $(p-x)$ circuits engagés. Analogiquement à c) on peut statuer:

Le nombre de différents états avec X circuits spécifiques engagés et, simultanément, p circuits engagés est

$$\frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p}} \quad (p = x, x+1, \dots, n; \quad x = 0, 1, \dots, n)$$

$[p] = P\{\text{exactement tout } p \text{ circuits sont engagés}\}.$

$(p = 0, 1, \dots, n).$

e

Un état spécifique avec exactement p circuits engagés a la probabilité

$$\frac{[p]}{\binom{n}{p}}$$

Si on a la recherche séquentielle, comme il y a dans tous les $\binom{n}{p}$ états différents avec exactement p circuits engagés selon c) et comme tous ces différents états devraient avoir une et la même probabilité.

cont.

Dans le but de chercher

$$h(x,p) = P\{x \text{ circuits spécifiés engagés, et,}$$

simultanément, exactement p circuits engagés}

on devrait donc ajouter un certain nombre de probabilités égales,

nomées $\frac{\binom{p}{x}}{\binom{n}{x}}$; ce nombre est selon d), $\frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p-x}}$.

Cependant,

$$h(x,p) = \frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p-x}} \cdot \frac{\binom{p}{x}}{\binom{p}{x}} \quad (p = x, x+1, \dots, n)$$

Maintenant, on a que

$$H(x) = P\{x \text{ circuits spécifiques engagés}\}$$

devraient être égaux à

$$H(x) = \sum_{p=x}^n h(x,p)$$

alors le résultat est:

$$H(x) = \sum_{p=x}^n \frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p-x}} \cdot \frac{\binom{p}{x}}{\binom{p}{x}}$$

cont:
TXA
23
e

<p>La probabilité que 3 circuits spécifiés sont engagés = la probabilité que 3 sources spécifiées sont engagées = la probabilité de succès dans trois essais de 6 expériences indépendantes où la probabilité de succès = 0,5 dans chaque essai, c'est à dire</p> $\underline{\underline{0.5^3 = 0.125}}$	TXA 24
<p><u>Distribution d'Erlang:</u></p> $H(x) = \frac{E_n(A)}{E_{n-x}(A)}$ <p>n = 6 ; A = 3 erl; x = 3</p> $H(3) = \frac{E_6(3)}{E_3(3)} = \frac{0.052157}{0.346154} = \underline{\underline{0.151}}$	TXA 25