Unión Internacional de Telecomunicaciones

UIT-R

Sector de Radiocomunicaciones de la UIT

Recomendación UIT-R TF.2018

(08/2012)

Transferencia de tiempo relativista en la proximidad de la Tierra y en el sistema solar

Serie TF

Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias

Unión Internacional de Telecomunicaciones

Prólogo

El Sector de Radiocomunicaciones tiene como cometido garantizar la utilización racional, equitativa, eficaz y económica del espectro de frecuencias radioeléctricas por todos los servicios de radiocomunicaciones, incluidos los servicios por satélite, y realizar, sin limitación de gamas de frecuencias, estudios que sirvan de base para la adopción de las Recomendaciones UIT-R.

Las Conferencias Mundiales y Regionales de Radiocomunicaciones y las Asambleas de Radiocomunicaciones, con la colaboración de las Comisiones de Estudio, cumplen las funciones reglamentarias y políticas del Sector de Radiocomunicaciones.

Política sobre Derechos de Propiedad Intelectual (IPR)

La política del UIT-R sobre Derechos de Propiedad Intelectual se describe en la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI a la que se hace referencia en el Anexo 1 a la Resolución UIT-R 1. Los formularios que deben utilizarse en la declaración sobre patentes y utilización de patentes por los titulares de las mismas figuran en la dirección web http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/es, donde también aparecen las Directrices para la implementación de la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI y la base de datos sobre información de patentes del UIT-R sobre este asunto.

Series de las Recomendaciones UIT-R

(También disponible en línea en http://www.itu.int/publ/R-REC/es)

Series	Título
BO	Distribución por satélite
BR	Registro para producción, archivo y reproducción; películas en televisión
BS	Servicio de radiodifusión (sonora)
BT	Servicio de radiodifusión (televisión)
F	Servicio fijo
M	Servicios móviles, de radiodeterminación, de aficionados y otros servicios por satélite conexos
P	Propagación de las ondas radioeléctricas
RA	Radioastronomía
RS	Sistemas de detección a distancia
S	Servicio fijo por satélite
SA	Aplicaciones espaciales y meteorología
SF	Compartición de frecuencias y coordinación entre los sistemas del servicio fijo por satélite y del servicio fijo
SM	Gestión del espectro
SNG	Periodismo electrónico por satélite
TF	**Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias**
V	Vocabulario y cuestiones afines

Nota*: Esta Recomendación UIT-R fue aprobada en inglés conforme al procedimiento detallado en la Resolución UIT-R 1.*

Publicación electrónica
Ginebra, 2013

RECOMENDACIÓN UIT-R TF.2018

Transferencia de tiempo relativista en la proximidad de la Tierra y en el sistema solar

(2012)

Cometido

El objetivo de esta Recomendación es establecer algoritmos y procedimientos convencionales comunes que se habrán de utilizar al comparar relojes en la superficie de la Tierra y en plataformas alejadas de ésta, pero dentro del sistema solar. Las fórmulas se determinan explícitamente en la teoría de la relatividad general actualmente aceptada para crear sistemas de referencia espacio-tiempo. Cabe esperar que estos algoritmos y procedimientos se utilicen al comparar relojes situados en satélites terrestres, vehículos espaciales interplanetarios y sobre la superficie de cuerpos del sistema solar.

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

a) que resulta conveniente mantener la coordinación de tiempo y frecuencia en las plataformas que funcionan en las proximidades de la Tierra y en el sistema solar;

b) que se requieren mecanismos precisos para la transferencia de tiempo y frecuencia con el fin de satisfacer las necesidades futuras de comunicación, navegación y científicas en las proximidades de la Tierra y en el sistema solar;

c) que los relojes varían con el tiempo y la frecuencia en función del trayecto debido a su movimiento y a la intensidad del campo gravitatorio en la que funcionan;

d) que es preciso definir claramente los fundamentos conceptuales de la transferencia de tiempo y frecuencia;

e) que en los procedimientos para la transferencia de tiempo y frecuencia en las proximidades de la Tierra y a través de cuerpos celestes y aeronaves en el sistema solar es preciso recurrir a algoritmos matemáticos que tengan en cuenta los efectos relativistas,

recomienda

que se utilicen los algoritmos matemáticos que figuran en el Anexo 1 para tener en cuenta, si procede, los efectos relativistas en la transferencia de tiempo y frecuencia.

Anexo 1

Objetivo

El objetivo de la presente Recomendación es sensibilizar acerca de la necesidad de tener en cuenta los efectos de la relatividad en los sistemas de señales horarias, navegación, científicos y de comunicación. En esta Recomendación se recuerdan los conceptos y procedimientos básicos para el análisis de estos sistemas. No se pretende describir en detalle ningún sistema en concreto, sino presentar información de tal modo que sirva de referencia útil y de punto de partida para aplicaciones específicas.

Una aplicación importante de esta Recomendación es la comparación de los tiempos registrados por relojes en vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra, en el espacio interplanetario y en superficies planetarias, con los tiempos registrados por los relojes en la Tierra. Una escala de tiempos adecuada para las mediciones terrestres es el tiempo universal coordinado (UTC). Por consiguiente, el objetivo sería poder relacionar los tiempos registrados por los relojes situados en cualquier lugar de las proximidades de la Tierra y del sistema solar, con los tiempos registrados por los relojes en la Tierra que miden el UTC.

El análisis que figura a continuación se basa en *IERS Conventions (2010)*, el Manual del UIT-R sobre *Transferencia y difusión por satélite de señales horarias y frecuencias* (2010), Nelson, *Metrología* (2011), y Petit y Wolf, *Metrología* (2005). Para más información, el lector puede consultar estas publicaciones y referencias citadas.

Marco relativista

El marco relativista para sistemas de referencia espacio-tiempo se ha definido en Resoluciones de organizaciones científicas internacionales. Las más importantes son:

1) Resolución A4 de la UAI (1991), que define el sistema de referencia celeste geocéntrico (GCRS) y el sistema de referencia celeste baricéntrico (BCRS) y sus coordenadas temporales. En la Resolución B1 de la UAI (2000) se perfecciona la definición del BCRS.

2) Resolución 2 de UGGI (2007), que define el sistema de referencia terrestre geocéntrico (GTRS), junto con el sistema de referencia terrestre internacional (ITRS).

La nomenclatura utilizada en este documento se corresponde con la utilizada en anteriores Recomendaciones del UIT-R y está relacionada con el marco UAI/UGGI del modo siguiente: en la presente Recomendación el GCRS se denomina sistema de coordenadas inercial geocéntrico (ECI), el GTRS (en la práctica, ITRS) se denomina sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra, y el BCRS se denomina sistema de coordenadas baricéntrico.

Definiciones

Tiempo propio

El tiempo propio τ es el tiempo real que mide un reloj o el tiempo local en el sistema de referencia propio del reloj.

Coordenada temporal

La coordenada temporal t es una variable independiente en las ecuaciones del movimiento de cuerpos físicos y en las ecuaciones de propagación de ondas electromagnéticas. Es una coordenada matemática en el sistema de coordenadas cuadrimensional de espacio-tiempo. Para un evento dado, la coordenada temporal tiene el mismo valor en todas partes. Este tiempo no se mide, sino que se calcula a partir de los tiempos propios de los relojes.

Intervalo espacio-tiempo

La relación entre la coordenada temporal y el tiempo propio dependen de la posición del reloj y del estado de movimiento en su contexto gravitatorio y se calcula integrando el intervalo espacio-tiempo. Al comparar los tiempos propios de dos relojes, la coordenada temporal desaparece en última instancia. Por consiguiente, la transferencia de tiempo relativista es independiente del sistema de coordenadas. El sistema de coordenada se puede elegir arbitrariamente según convenga.

En general, el intervalo espacio-tiempo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} = g_{00}\ c^2\ dt^2 + 2\,g_{0j}\,c\,dt\,dx^j + g_{ij}\ dx^i\ dx^j \tag{1}$$

siendo:

$g_{\mu\nu}$: componentes de la métrica.

El índice griego toma los valores 0, 1, 2, 3 y el índice latino los valores 1, 2, 3. Los índices repetidos indican el sumatorio en ese índice. La métrica depende del potencial gravitatorio, la velocidad angular y la aceleración lineal del sistema de referencia. El intervalo espacio-tiempo permanece invariante ante las transformaciones de coordenadas. Así, la métrica $g_{\mu\nu}$ se transforma como un tensor covariante de segundo orden.

La relación entre el tiempo propio τ y las coordenadas del sistema de coordenadas seleccionado, que comprende la coordenada temporal $x^0 \equiv ct$ y las coordenadas espaciales x^i, se expresa en general mediante la siguiente ecuación:

$$ds^2 = g_{00}\ c^2\ dt^2 + 2g_{0j}\ c\ dt\ dx^j + g_{ij}\ dx^i\ dx^j = -c^2 d\tau^2 \tag{2}$$

siendo:

τ: tiempo propio.

Por consiguiente, $dt = d\tau$ para un reloj en reposo en un sistema de referencia inicial, donde $dx^i = 0$ y $-g_{00} = 1$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} = \delta_{ij}$. El incremento de la coordenada temporal respecto del tiempo propio registrado por un reloj a lo largo del trayecto entre los puntos A y B es:

$$\Delta t = \pm\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{1+\frac{1}{c^2}\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\,d\tau + \frac{1}{c}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\frac{dx^j}{d\tau}\,d\tau \tag{3}$$

En el caso de una señal electromagnética, el intervalo espacio-tiempo es:

$$ds^2 = g_{00}\,c^2\,dt^2 + 2\,g_{0j}\,c\ dt\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = 0 \tag{4}$$

La velocidad de la luz c es idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales. El incremento de la coordenada temporal durante la propagación a lo largo del trayecto entre los puntos A y B es:

$$\Delta t = \pm\frac{1}{c}\int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{\left(g_{ij}+\frac{g_{0i}\,g_{0j}}{-g_{00}}\right)dx^i\,dx^j} + \frac{1}{c}\int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}dx^j \tag{5}$$

La ecuación $\gamma_{ij} \equiv g_{ij} + g_{0i}\, g_{0j}/(-g_{00})$ representa la métrica del espacio tridimensional y $d\rho = \sqrt{\gamma_{ij}\ dx^i\ dx^j}$ representa el diferencial de la distancia tridimensional.

Escalas de tiempo

Escalas de tiempo atómico

La escala fundamental de tiempo basada en relojes atómicos es el Tiempo Atómico Internacional (TAI), que se calcula en el BIPM a partir de un promedio ponderado de lecturas de tiempos atómicos en laboratorios distribuidos por todo el mundo. Se trata de una escala de tiempo de referencia continua, sin pasos.

La escala de tiempo atómico para señales horarias civiles es el tiempo universal coordinado (UTC), que difiere del TAI en un número entero de segundos. En 2011, UTC = TAI – 34 s. UTC se distribuye cada mes en la *Circular T* de la BIPM en la forma de diferencias respecto de los tiempos de cada laboratorio UTC(*k*).

Escalas de la coordenada temporal

La coordenada temporal geocéntrica (TCG) es la coordenada temporal en un sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra (ECI o ECEF).

El tiempo terrestre (TT) es otra coordenada temporal que se obtiene con un cambio de escala del TCG de modo que tenga aproximadamente la misma velocidad que el tiempo propio del reloj en reposo en la geoide. La geoide es la superficie de potencial gravitatorio constante; se puede hacer una buena aproximación mediante el nivel medio del mar. La relación entre el TCG y el TT se define de manera que $d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$, siendo $L_G \equiv 6{,}969\ 290\ 134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ µs/d como se expone a continuación en la ecuación (18). El valor de L_G es una constante definida. Por consiguiente,

$$TCG - TT = L_G TCG = \frac{L_G}{1-L_G}(TT - TT_0)$$

(6)

$$TCG - TT = L_G (TCG - TCG_0) = \frac{L_G}{1-L_G}(TT - TT_0)$$

donde:

TCG_0 y TT_0: corresponden a JD 2443144,5 TAI (1 de enero de 1977, 0h). En la práctica se puede tomar *TT*:

$$TT = TAI + 32{,}184 \text{ s} \tag{7}$$

La coordenada temporal baricéntrica (TCB) es la coordenada temporal en un sistema de coordenadas con origen en el baricentro del sistema solar. La diferencia de la coordenada temporal entre *TCB* y *TCG* es una transformación que dependen del tiempo y de la posición. Hasta el orden $1/c^2$ se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$TCB - TCG = \frac{1}{c^2}\int_{t_0}^{t}\left(U_{ext}(\mathrm{r}_E) + \frac{1}{2}v_E^2\right)dt + \frac{1}{c^2}\mathrm{v}_E(t)\cdot \mathrm{R}(t) \tag{8}$$

donde:

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$: vector de posición dependiente del tiempo respecto del geocentro

$\mathbf{x}$: posición baricéntrica del observador, donde $\mathbf{x}_e$ y $\mathbf{v}_e$ indican la posición baricéntrica y la velocidad del centro de masas de la Tierra.

Esta ecuación puede expresarse en la forma:

$$TCB - TCG = L_C \times (TCB - TCB_0) + P(TCB) - P(TCB_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \tag{9}$$

donde:

$L_C =$ 1,480 826 867 41 $\times 10^{-8} \approx$ 1,28 ms/d.

En esta ecuación, P representa una serie de términos periódicos. El último término es diurno en la superficie de la Tierra, con una amplitud inferior a 2,1 µs.

Otra forma de expresar la ecuación (9) es (*IERS Conventions (2010)*, Capítulo 10).

$$TCB - TCG = \frac{L_C \times (TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)}{1 - L_B} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \tag{10}$$

siendo:

TT y $L_B \equiv$ 1,550 519 768 $\times 10^{-8} \approx$ 1,34 ms/d es el argumento tiempo.

El valor de L_B es una constante definida.

El término periódico indicado mediante $P(TT)$ tiene una amplitud máxima de unos 1,6 ms y puede calcularse mediante el modelo analítico «FB» (Fairhead y Bretagnon, 1990). Otra posibilidad es suministrar $P(TT) - P(TT_0)$ mediante efemérides numéricas de tiempo, tales como TE405 (Irwin y Fukushima, 1999), cuyos valores tiene una precisión de ± 0,1 ns de 1600 a 2200. La serie HF2002, que indica el valor de $L_C\ (TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)$ en función de TT a lo largo de los años 1600-2200, se ha ajustado a TE405 (Harada y Fukushima, 2003). Este ajuste difiere de TE405 en menos de 3 ns a los largo de los años 1600-2200 con un error rms de ± 0,5 ns.

La diferencia entre TCB y TT es:

$$TCB - TT = (TCB - TCG) + TCG - TT) = L_B\ TCB + (1 - L_G)\left(P + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R}\right) \tag{11}$$

La transformación de TCB a TCG consta del desplazamiento medio en la relación $\langle dTCG/dTCB\rangle \equiv 1 - L_C$ y términos periódicos. La transformación de TCG a TT es un desplazamiento exacto en la relación $dTT/dTCG \equiv 1 - L_G$. Por consiguiente, la transformación de TCB a TT tiene un desplazamiento medio en la relación.

$$\langle dTT/dTCB\rangle = (dTT/dTCG)\langle dTCG/dTCB\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \tag{12}$$

Teniendo en cuenta la definición de L_B, $(1 - L_G)(1 - L_C) \approx (1 - L_B)$, la ecuación (12) puede expresarse como $\langle dTT/dTCB\rangle = (1 - L_B)$ hasta algunas partes en 10^{18}.

Al igual que TT, el tiempo dinámico baricéntrico (TDB) es otra coordenada temporal del sistema baricéntrico obtenido mediante un cambio de escala para que tenga aproximadamente la misma relación que *TT*. La relación entre *TCB* y *TDB* se define de modo tal que $dTDB/dTCB \equiv 1 - L_B$.

Efectos relativistas en los relojes

A continuación se examina la transformación entre el tiempo propio de un reloj ideal (uno que genera exactamente el segundo SI) y la coordenada temporal en los sistemas de coordenadas geocéntrico y baricéntrico.

Sistema de coordenadas inercial geocéntrico

La coordenada temporal relacionada con un sistema de coordenadas inercial con origen en la Tierra (ECI) es una coordenada temporal geocéntrica (TCG). Hasta términos de orden $1/c^2$, los componentes tensoriales de la métrica en este sistema de coordenadas son $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$, siendo U el potencial gravitatorio. El incremento de TCG en el sistema de coordenadas ECI correspondiente a un incremento del tiempo propio registrado por el reloj en movimiento sobre el trayecto entre los puntos A y B a una velocidad v viene dado por la expresión:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2\right) d\tau \qquad (13)$$

El potencial de la Tierra a una distancia radial r, latitud geocéntrica ϕ y longitud λ se puede expresar en armónicos esféricos del modo siguiente:

$$U(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen}\phi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\text{sen}\, m\lambda\right)\right\}$$

$$= \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\text{sen}\phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\text{sen}\,\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\text{sen}\, m\lambda\right\} \qquad (14)$$

siendo:

GM:	constante gravitatoria de la Tierra
R_E:	radio ecuatorial de la Tierra
factores $P_n(\text{sen}\,\phi)$:	polinomios de Legendre de grado n
factores $P_{nm}(\text{sen}\,\phi)$:	funciones de Legendre de grado n y orden m.

La relación entre la latitud geocéntrica ϕ y la latitud geográfica φ viene dada por la expresión $\tan\phi = (1 - f^2)\tan\varphi$, donde f es el achatamiento.

En la práctica, basta con incluir la primera corrección de achatamiento y aproximar el potencial gravitatorio mediante

$$U = \frac{GM}{r} - J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 P_2(\text{sen}\,\phi) = \frac{GM}{r} + J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2(1 - 3\text{sen}^2\phi) \qquad (15)$$

1) Reloj en reposo sobre la geoide

En el caso de un reloj en reposo sobre la superficie de la Tierra en rotación, es necesario tener en cuenta la velocidad del reloj $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ en el sistema de coordenadas ECI, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la Tierra y $\mathbf{r}$ la posición del reloj. Así, el incremento de *TCG* cuando el reloj registra un incremento de tiempo propio $\Delta\tau$ es:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2} U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\omega \times r)^2\right) d\tau = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2} W\right) d\tau \tag{16}$$

siendo:

$W = U + \frac{1}{2}(\omega \times \mathbf{r})^2 = U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \phi$: el potencial gravitatorio.

Como el potencial gravitatorio W_0 en la superficie de la geoide es constante, se puede calcular en el ecuador y su valor aproximado es:

$$W_0 \approx \frac{GM}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2} J_2\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R_E^2 \tag{17}$$

El cálculo más exacto actualmente de W_0 es $6{,}2636856 \times 10^7$ m^2/s^2. Según la ecuación (16), el incremento de TCG en el sistema de coordenadas ECI que corresponde a un incremento de tiempo propio $\Delta\tau_0$ medido con un reloj en reposo sobre la geoide viene dado por:

$$\Delta t \equiv TCG = (\ 1 + W_0/c^2\ )\ \Delta\tau_{\ 0} \cong (1 + L_G)\ \Delta\tau_0 \tag{18}$$

siendo:

$L_G \equiv \quad 6{,}969\ 290\ 134 \times 10^{-10}$.

Por convenio, el valor de L_G es una constante definida, que representa el valor más exacto disponible de W_0/c^2 cuando se definió en 2000. TT se obtiene mediante un cambio de escala de TCG por el factor $1 - L_G$. Así:

$$\Delta t' \equiv \mathrm{TT} = (1 - L_G)\ \mathrm{TCG} \tag{19}$$

Lo que da por resultado TT = $(1 - L_G)(1 + L_G)\ \Delta\tau_{\ 0} \cong \Delta\tau_{\ 0}$ hasta algunas partes en 10^{18}.

2) Reloj en un satélite

En el caso de un reloj situado en un satélite en órbita alrededor de la Tierra, como primera aproximación puede considerarse que la órbita es kepleriana (sin perturbaciones). El potencial a una distancia r desde el centro de la Tierra es de aproximadamente $U = GM/r$. Así, el incremento de *TCG* es:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\ \mathrm{v}^2\right) d\tau \tag{20}$$

La velocidad del satélite *v* se determina aplicando la conservación de la energía por unidad de masa $\mathcal{E}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - U = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \qquad (21)$$

donde:

a: eje semimayor de la órbita.

Así, hasta este orden, la coordenada temporal transcurrido es:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a}\right)\Delta\tau + \frac{2GM}{c^2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r}\,dt \qquad (22)$$

La segunda integral $d\tau$ se sustituye por dt dado que este término es una corrección relativista de orden $1/c^2$. En el caso de una órbita kepleriana, la distancia radial $r = a\,(1 - e \cos E)$, siendo e la excentricidad de la órbita y E la anomalía excéntrica. Esta última se determina a partir de la anomalía media de la ecuación de Kepler, $M \equiv n\,\Delta t = E - e$ sen E, donde el movimiento medio es $n \equiv 2\pi/T = \sqrt{GM/a^3}$ y T es el periodo orbital. Por consiguiente, el TCG transcurrido a medida que el reloj registra el tiempo propio $\Delta\tau$ es aproximadamente:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a}\right)\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\,e\,\mathrm{sen}\,E \qquad (23)$$

El segundo término es un factor de corrección periódico debido a que la excentricidad de la órbita causa una variación residual en la distancia y la velocidad que viene dada por:

$$\Delta t_{\text{eccentricity}} = \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\,e\,\mathrm{sen}\,E = \frac{2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} \qquad (24)$$

En esta expresión se supone que se utilizan elementos keplerianos (sin perturbaciones).

Para comparar el tiempo propio de un reloj situado en un satélite con el tiempo propio de una reloj en reposo sobre la geoide, es necesario convertir *TCG* a *TT*. De las ecuaciones (19) y (20), se obtiene (*TT*):

$$\Delta t' = (1 - L_G)\,\Delta t = \int_A^B \left\{1 + \frac{1}{c^2}(U - W_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2\right\} d\tau \qquad (25)$$

Por consiguiente, como $\Delta t' \approx \Delta\tau_0$, la relación entre el intervalo de tiempo propio registrado por un reloj en reposo sobre la geoide y el intervalo del tiempo propio registrado por un reloj en el satélite viene dado por:

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a} - \frac{1}{c^2}W_0\right]\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\,e\,\mathrm{sen}\,E \qquad (26)$$

siendo:

GM: constante gravitatoria de la Tierra

R_E: radio ecuatorial de la Tierra.

Para obtener una precisión inferior a un nanosegundo, es necesario tener en cuenta las perturbaciones orbitales debidas a los armónicos del potencial gravitatorio de la Tierra, los efectos de las mareas causadas por la Luna y el Sol, y la presión de radiación solar. A este nivel de precisión, la perturbación J_2 produce variaciones en **r** y **v** que dan lugar a efectos periódicos adicionales del orden de 0,1 ns.

Para tener plenamente en cuenta la perturbación J_2 en el potencial de la ecuación (15), es necesario realizar una integración numérica de la órbita y una integración numérica de la ecuación (20). También se debería tomar en consideración los efectos de las mareas debidas a la luna y el sol, así como la radiación solar.

En caso de órbitas terrestres bajas, son importantes tanto los armónicos gravitatorios zonales como los esféricos teserales. La corrección convencional de la excentricidad de la ecuación (24) ya no es exacta. En este caso, es preferible integrar numéricamente la órbita y la ecuación (20), en particular los armónicos de mayor orden del potencial gravitatorio de la Tierra.

Sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra

Hasta términos de orden $1/c^2$, las componentes métricas son $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/c^2 = 1 - 2W/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j/c$, y $g_{ij} = \delta_{ij}$. En el sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra (ECEF) en rotación que utiliza la coordenada temporal TT, la coordenada temporal transcurrido es:

$$\Delta t' = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\, g\, h + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2} \mathrm{v}'^2\right) d\tau + \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}'\, \mathrm{d}\tau \tag{27}$$

siendo*:*

h: altitud respecto de la geoide

g: aceleración local de la gravedad

v': velocidad del reloj respecto de la geoide.

Se supone que h es pequeña. Para obtener más precisión, se debería tener en cuenta la variación de g con la latitud y la elevación.

La segunda integral es el efecto Sagnac para un reloj transportado, que se puede expresar del modo siguiente:

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}'\, d\tau = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega R\, \cos\phi)(v'\, \cos\theta)\, d\tau = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\, d\lambda \tag{28}$$

o bien:

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\; d\lambda = \frac{2\omega A}{c^2} \tag{29}$$

siendo:

- R: radio de la Tierra
- ϕ: latitud
- λ: longitud
- $v' \cos\theta$: componente Este de la velocidad
- A: la proyecto sobre el plano ecuatorial de la zona barrida por el vector de posición respecto del centro de la Tierra (positivo para la dirección Este y negativo para la dirección Oeste).

La corrección es positiva para los relojes que se desplazan hacia el Este y negativa para los que se desplazan hacia el Oeste.

Sistema de coordenadas baricéntrico

El intervalo de la coordenada temporal baricéntrica (TCB) correspondiente al intervalo del tiempo propio $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ viene dado por:

$$TCB = \int_{\tau_0}^{\tau} \left(1 + \frac{1}{c^2} U_E(\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2} |\mathbf{R}|^2 \right) d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left(U_{ext}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2} \mathrm{v}_E^2 \right) d\tau + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R} \Big|_{\tau 0}^{\tau} \quad (30)$$

siendo:

- $U_E(\mathbf{r})$: el potencial newtoniano de la Tierra
- $U_{\text{ext}}(\mathbf{r})$: el potencial newtoniano externo de todos los cuerpos celestes del sistema solar salvo la Tierra.

Sistema de coordenadas de cuerpos del sistema solar

Para comparar los relojes entre un cuerpo M del sistema solar y la Tierra, es preciso efectuar varias transformaciones. Los tiempos propios de los relojes se han de transformar a *TT* para el reloj en la Tierra y a *TM* para el reloj en M. Así, la primera transformación es de *TT* a *TCB* y la segunda es de *TCB* a *TM*. Las transformaciones de coordenadas son:

$$TCB - TT = (L_C + L_G)\ TCB + P + \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{R} / c^2 \quad (31)$$

y

$$TCB - TM = (L_{CM} + L_M)\ TCB + P + \mathbf{v}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{R} / c^2 \quad (32)$$

En estas ecuaciones los términos periódicos P y el vector de posición R se aplican a la Tierra y al cuerpo celeste M, respectivamente. La diferencia entre *TM* y *TT* es:

$$TM - TT = (TCB - TT) - (TCB - TM) \quad (33)$$

A título de ejemplo, en el caso de Marte, $L_{CM} = 0{,}972 \times 10^{-8} \approx 0{,}84$ ms/d, $L_M = 1{,}403 \times 10^{-10} \approx 12{,}1$ µs/d. La velocidad de deriva es de 0,49 ms/d. Las amplitudes de los términos periódicos son 1,7 ms en el periodo orbital de la Tierra (365,2422 d) y 11,4 ms en el periodo orbital de Marte (687 d).

Propagación de una señal electromagnética

Esta sección trata del cálculo del tiempo de propagación de una señal electromagnética cuando se conocen las posiciones del transmisor y del receptor, expresadas en los sistemas de coordenadas ECI, ECEF y baricéntrico.

Estas ecuaciones se aplican a todos los casos. En particular, debe utilizarse al establecer los parámetros de los relojes situados en satélites que giran alrededor de relojes situados en la Tierra.

Sistema de coordenadas inercial geocéntrico

Al considerar el cálculo en un sistema de coordenadas inercial geocéntrico (ECI), el tiempo de propagación (TCG) puede considerarse como la suma de una parte geométrica y una parte gravitatoria. La parte geométrica es:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{path} \sqrt{g_{ij} \; dx^i \; dx^j} = \frac{\rho}{c} \tag{34}$$

siendo:

$g_{ij} \approx$ δ_{ij}

ρ: la longitud del trayecto geométrico.

Si la señal se transmite en la coordenada temporal t_T y se recibe en la coordenada temporal t_R, el TCG de propagación a lo largo del trayecto es:

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R \tag{35}$$

Donde $\mathbf{r}_T$ es el vector de posición del transmisor y $\mathbf{r}_R$ el del receptor, $\mathbf{v}_\mathrm{R}$ la velocidad del receptor y $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$ la diferencia entre la posición del receptor y del transmisor en la coordenada temporal de transmisión t_T. La corrección de la coordenada temporal debida a la velocidad del receptor es:

$$\Delta t_{\mathrm{vel}} \approx \Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R / c^2 \tag{36}$$

Obsérvese, que dependiendo de la configuración, el término adicional de orden $1/c^3$ puede elevarse a varios picosegundos.

Para tener en cuenta el efecto del potencial gravitatorio sobre la señal electromagnética es necesario incluir el potencial de la parte espacial y la temporal de la métrica. Los componentes de la métrica son $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$, y $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$. Por consiguiente, el incremento de TCG es:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{path} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}} dx^i \, dx^j} \approx \frac{1}{c} \int_{path} \left(1 + \frac{2}{c^2} U\right) \sqrt{\delta_{ij} \, dx^i \, dx^j} = \frac{\rho}{c} + \frac{1}{c^3} \int_{path} 2U \, d\rho \tag{37}$$

El retardo de tiempo gravitatorio es:

$$\Delta t_{delay} = \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right) \tag{38}$$

siendo:

R y r: las distancias desde el geocentro hasta el transmisor y el receptor, respectivamente

Por lo general, para un trayecto entre un satélite y la Tierra el retardo gravitatorio es del orden de unas cuantas decenas de picosegundos. El TCG total es la suma de los términos de las ecuaciones (35) y (38).

El tiempo de propagación (TT) es:

$$\Delta t' = (l - L_G)\Delta t = \frac{\rho}{c} - L_G \frac{\rho}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho} \right) \qquad (39)$$

Éste es el intervalo de tiempo que mediría un reloj situado en la geoide.

Por ejemplo, si se envía un señal desde un satélite geoestacionario cuyo radio orbital es de 42 164 km hacia un reloj situado en el ecuador a la misma longitud, el retardo en el trayecto es de –27 ps. En el caso de un satélite GPS con un ángulo de elevación de 40°, el segundo y el tercer términos prácticamente se cancelan y el retardo en el trayecto es –3 ps.

Sistema de coordenadas fijo con origen en la Tierra

Al considerar el cálculo en un sistema de coordenadas ECEF, la parte geométrica de TCG es:

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_{\text{path}} \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} + \frac{1}{c} \int_{\text{path}} g_{0j}\, dx^i \qquad (40)$$

Las componentes de la métrica son $-g_{00} \approx 1$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j / c$, y $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto sobre el trayecto de la señal. La coordenada temporal (TT) es $\Delta t' = (1 - L_G)\, \Delta t$.

El primer término de la ecuación (40) es ρ'/c, siendo ρ' la longitud del trayecto euclídeo en el sistema de coordenadas ECEF. Si la posición del transmisor es $\mathbf{r}_T$ y el receptor se encuentra en la posición $\mathbf{r}_R$ con una velocidad $\mathbf{v}'_R$,

$$\frac{\rho'}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'_R \qquad (41)$$

siendo:

$\Delta\mathbf{r} \equiv \quad \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$

El segundo término de la ecuación (40) es el efecto Sagnac. Por consiguiente,

$$\Delta t_{Sagnac} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c^2}\int_A^B \omega \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = 2\frac{1}{c^2}\int_A^B \omega \cdot d\mathbf{A} = \frac{2\omega A}{c^2} \qquad (42)$$

donde:

A: proyecto sobre el plano ecuatorial del área formada por el centro de rotación y los extremos del trayecto de la señal.

El retardo gravitatorio también debe tomarse en consideración al calcular el tiempo total de propagación.

Sistema de coordenadas baricéntrico

Para describir la propagación de una señal electromagnética puede utilizarse un sistema de coordenadas baricéntrico con coordenadas cartesianas (x, y, z).

Dado que sólo estamos teniendo en cuenta el efecto gravitatorio del Sol, para facilitar los cálculos del retardo gravitatorio podemos recurrir a una configuración espacial en la que la posición del transmisor es ($-a_T$, b, 0) y la del receptor (a_R, b, 0), de modo que la propagación se produce aproximadamente a lo largo de una línea recta $y = b$ (desdeñando la desviación gravitatoria), siendo b la distancia menor respecto del Sol. El tiempo de propagación (TCB) es:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{2}{c^2}U_S\right)dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx \tag{43}$$

donde U_S es el potencial gravitatorio del Sol. Por consiguiente,

$$\Delta t = \frac{1}{c}(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{{a_R}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{{a_T}^2 + b^2}} \tag{44}$$

Hasta cierto nivel de aproximación dependiente del tiempo de propagación, la coordenada temporal TT de propagación puede cambiarse de escala a partir del tiempo TCB mediante la siguiente expresión:

$$\Delta t' = (1 - L_B)\,\Delta t = \frac{1}{c}(1 - L_B)(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{{a_R}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{{a_T}^2 + b^2}} \tag{45}$$

Referencias

HARADA ,W. y FUKUSHIMA, T. [2003] Harmonic Decomposition of Time Ephemeris TE405. *Astron. J.* 126, 2557 – 2561.

IRWIN, A.W. y FUKUSHIMA, T. [1999] A Numerical Time Ephemeris of the Earth. *Astron. Astrophys.* 348, 642 – 652.

FAIRHEAD, L. y BRETAGNON, P. [1990] An Analytic Formula for the Time Transformation $TB-TT$. *Astron. Astrophys.* 229, 240 – 24.

McCARTHY, D.D. y SEIDELMANN, P. K. [2009] Time: From Earth Rotation to Atomic Physics (Wiley-VCH, Weinheim).

NELSON, R.A. [2011] Transferencia de tiempo relativista en la proximidad de la Tierra y en el sistema solar. *Metrología* 48, S171 – S180.

PETIT, G. y LUZUM, B. (editors) [2010] IERS Conventions (2010) (International Earth Rotation and Reference Systems Service).

PETIT, G., y WOLF, P. [2005] Relativistic Theory for Time Comparisons: A Review. *Metrología* 42, S138 – S144.

Unión Internacional de Telecomunicaciones, Ginebra [2010], *Transferencia y difusión por satélite de señales horarias y frecuencias*.