Union internationale des télécommunications

UIT-R

Secteur des Radiocommunications de l'UIT

Recommandation UIT-R TF.2018
(08/2012)

Transfert de temps relativiste au voisinage de la Terre et dans le système solaire

Série TF
Emissions de fréquences étalon et de signaux horaires

Union internationale des télécommunications

Avant-propos

Le rôle du Secteur des radiocommunications est d'assurer l'utilisation rationnelle, équitable, efficace et économique du spectre radioélectrique par tous les services de radiocommunication, y compris les services par satellite, et de procéder à des études pour toutes les gammes de fréquences, à partir desquelles les Recommandations seront élaborées et adoptées.

Les fonctions réglementaires et politiques du Secteur des radiocommunications sont remplies par les Conférences mondiales et régionales des radiocommunications et par les Assemblées des radiocommunications assistées par les Commissions d'études.

Politique en matière de droits de propriété intellectuelle (IPR)

La politique de l'UIT-R en matière de droits de propriété intellectuelle est décrite dans la «Politique commune de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI en matière de brevets», dont il est question dans l'Annexe 1 de la Résolution UIT-R 1. Les formulaires que les titulaires de brevets doivent utiliser pour soumettre les déclarations de brevet et d'octroi de licence sont accessibles à l'adresse http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/fr, où l'on trouvera également les Lignes directrices pour la mise en œuvre de la politique commune en matière de brevets de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI et la base de données en matière de brevets de l'UIT-R.

Séries des Recommandations UIT-R

(Egalement disponible en ligne: http://www.itu.int/publ/R-REC/fr)

Séries	**Titre**
BO	Diffusion par satellite
BR	Enregistrement pour la production, l'archivage et la diffusion; films pour la télévision
BS	Service de radiodiffusion sonore
BT	Service de radiodiffusion télévisuelle
F	Service fixe
M	Services mobile, de radiorepérage et d'amateur y compris les services par satellite associés
P	Propagation des ondes radioélectriques
RA	Radio astronomie
RS	Systèmes de télédétection
S	Service fixe par satellite
SA	Applications spatiales et météorologie
SF	Partage des fréquences et coordination entre les systèmes du service fixe par satellite et du service fixe
SM	Gestion du spectre
SNG	Reportage d'actualités par satellite
TF	**Emissions de fréquences étalon et de signaux horaires**
V	Vocabulaire et sujets associés

Note*: Cette Recommandation UIT-R a été approuvée en anglais aux termes de la procédure détaillée dans la Résolution UIT-R 1.*

Publication électronique
Genève, 2013

RECOMMANDATION UIT-R TF.2018

Transfert de temps relativiste au voisinage de la Terre et dans le système solaire

(2012)

Domaine d'application

La présente Recommandation vise à établir des algorithmes et des procédures conventionnels communs destinés à être utilisés pour la comparaison des horloges situées à la surface de la Terre et sur des plates-formes éloignées de la Terre, mais à l'intérieur du système solaire. Ces expressions sont expressément déterminées dans la théorie de la relativité générale, qui est actuellement acceptée comme base des systèmes de référence espace-temps. Il est prévu d'utiliser ces algorithmes et procédures pour comparer les horloges à bord des satellites de la Terre ou d'engins spatiaux interplanétaires et situées à la surface de corps du système solaire.

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

considérant

a) qu'il est souhaitable de maintenir la coordination des signaux horaires et des fréquences étalon sur les plates-formes exploitées au voisinage de la Terre et dans le système solaire;

b) que l'on a besoin de moyens précis de transfert des signaux de référence de temps et de fréquence pour répondre aux besoins futurs des services de communication, de navigation et scientifiques, au voisinage de la Terre et dans le système solaire;

c) que les horloges subissent des variations de temps et de fréquence en fonction du trajet, en raison de leur mouvement et des forces gravitationnelles qu'elles sont susceptibles de subir dans l'environnement où elles sont exploitées;

d) que les fondements théoriques du transfert des signaux de référence de temps et de fréquence devraient être clairement définis;

e) que les procédures de transfert des signaux de référence de temps et de fréquence au voisinage de la Terre et entre corps célestes et engins spatiaux dans le système solaire nécessitent l'utilisation d'algorithmes mathématiques qui tiennent compte des effets de la relativité;

f) que les exigences de précision et d'exactitude pour le transfert des signaux de référence de temps et de fréquence au voisinage de la Terre et dans le système solaire dépendent de l'application,

recommande

d'utiliser les algorithmes mathématiques tenant compte des effets de la relativité pour le transfert des signaux de référence de temps et de fréquence indiqués dans l'Annexe 1, selon qu'il conviendra.

Annexe 1

Objectif

L'objet de la présente Recommandation est d'appeler l'attention sur la nécessité de tenir compte des effets de la relativité dans les systèmes de mesure du temps, de navigation, scientifiques et de communication. Cette Recommandation rappelle les principes fondamentaux et les procédures de base à appliquer dans l'analyse de ces systèmes. Il ne s'agit pas ici de décrire de manière détaillée tel ou tel système, mais plutôt de présenter des renseignements destinés à servir de référence et de point de départ pour des applications bien définies.

L'une des applications importantes de la présente Recommandation est la comparaison entre les temps donnés par les horloges à bord d'engins spatiaux en orbite autour de la Terre, dans l'espace interplanétaire et à la surface des planètes et les temps enregistrés par les horloges situées sur Terre. Une échelle de temps appropriée pour les mesures terrestres est le Temps universel coordonné (UTC). En conséquence, l'objectif pourrait être d'établir une corrélation entre les temps enregistrés par les horloges, qu'elles soient situées au voisinage de la Terre ou dans le système solaire et les temps donnés par les horloges situées sur Terre qui mesurent le temps UTC.

L'examen ci-dessous est fondé sur les *Conventions de l'IERS (2010)*, le Manuel de l'UIT-R intitulé *Transfert et diffusion des signaux de référence de temps et de fréquence par satellite* (2010), ainsi que sur les publications de Nelson, *Métrologie* (2011) et de Petit et Wolf, *Métrologie* (2005). Les utilisateurs pourront consulter ces publications et les référence qui y sont citées pour obtenir plus de précisions.

Cadre relativiste

Le cadre relativiste des systèmes de référence espace-temps a été défini par des Résolutions élaborées par des organismes scientifiques internationaux, dont les plus importantes sont les suivantes:

1) Résolution A4 de l'UAI (1991): définit le système de référence céleste géocentrique (GCRS) et le système de référence céleste barycentrique (BCRS) ainsi que leurs coordonnées de temps. La Résolution B1 de l'UAI (2000) précise encore la définition du BCRS.

2) Résolution 2 de l'UGGI (2007): définit le système de référence terrestre géocentrique (GTRS) ainsi que le système de référence terrestre international (ITRS).

La nomenclature utilise dans le présent document est conforme à celle employée dans les Recommandations antérieures de l'UIT-R et peut être mise en relation avec le cadre de l'UAI/UGGI de la façon suivante: dans la présente Recommandation, le GCRS est appelé système de coordonnées inertielles par rapport au centre de la Terre (ECI), le GTRS (dans la pratique, l'ITRS) est appelé système de coordonnées centré sur la Terre et fixe par rapport à la Terre (ECEF), tandis que le BCRS est appelé système de coordonnées barycentrique.

Définitions

Temps propre

Le temps propre τ est la lecture réelle d'une horloge ou l'heure locale indiquée dans le repère de référence de l'horloge.

Temps-coordonnée

Le temps-coordonnée t est la variable indépendante dans les équations de mouvement des corps matériels et dans les équations de propagation des ondes électromagnétiques. Il s'agit d'une coordonnée mathématique dans l'espace-temps à quatre dimensions du système de coordonnées. Pour un événement donné, le temps-coordonnée a la même valeur partout. Les temps-coordonnées ne sont pas mesurés, mais calculés à partir des temps propres des horloges.

Intervalle espace-temps

La relation entre le temps-coordonnée et le temps propre dépend de la position de l'horloge et de l'état du mouvement dans son environnement gravitationnel et est calculé par intégration de l'intervalle espace-temps. Lors de la comparaison des temps propres de deux horloges, le temps-coordonnée est finalement supprimé. En conséquence, le transfert de temps relativiste entre horloges est indépendant du système de coordonnées. Le système de coordonnées peut être choisi de manière arbitraire en fonction de considérations d'ordre pratique.

En général, l'intervalle espace-temps est décrit par la formule:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2\, g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

où:

$g_{\mu\nu}$: composantes de la métrique.

On admet qu'un indice *grec* varie de 0 à 3 et qu'un indice *latin* varie de 1 à 3. Un indice répété suppose qu'il y a sommation implicite sur cet indice. La métrique dépend des forces gravitationnelles et de la vitesse angulaire ainsi que de l'accélération linéaire du référentiel. Après transformation des coordonnées, l'intervalle espace-temps reste invariant. En conséquence, la métrique $g_{\mu\nu}$ se transforme en tant que tenseur covariant de deuxième ordre.

L'expression générale de la relation entre le temps propre τ et les coordonnées du système de coordonnées choisi, qui comprend le temps-coordonnée $x^0 \equiv ct$ et les coordonnées spatiales x^i, est donnée par la formule:

$$ds^2 = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2 g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = -c^2 d\tau^2 \tag{2}$$

où:

τ : temps propre.

Ainsi, $dt = d\tau$, pour une horloge au repos dans un référentiel inertiel, pour lequel $dx^i = 0$ et $-g_{00} = 1$, $g_{0j} = 0$, et $g_{ij} = \delta_{ij}$. Le temps-coordonnée écoulé correspondant au temps propre mesuré, tel qu'enregistré par une horloge le long d'un trajet entre les points A et B, est donné par la formule:

$$\Delta t = \pm \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{-g_{00}}\right) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}}\, d\tau + \frac{1}{c} \int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}} \frac{dx^j}{d\tau}\, d\tau \tag{3}$$

Pour un signal électromagnétique, l'intervalle espace-temps est le suivant:

$$ds^2 = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2\, g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0 \tag{4}$$

La vitesse de la lumière est c dans chaque référentiel inertiel. Le temps-coordonnée écoulé de la propagation le long d'un trajet entre les points A et B est le suivant:

$$\Delta t = \pm \frac{1}{c} \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{-g_{00}} \right) dx^i\, dx^j} + \frac{1}{c} \int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}} dx^j \qquad (5)$$

L'expression $\gamma_{ij} \equiv g_{ij} + g_{0i}\, g_{0j} \,/\, (-g_{00})$ représente la métrique de l'espace à trois dimensions et $d\rho = \sqrt{\gamma_{ij}\;\; dx^i\;\; dx^j}$ représente l'incrément de la distance à trois dimensions.

Echelles de temps

Echelles de temps atomique

L'échelle de temps fondamentale basée sur des horloges atomiques est le Temps atomique international (TAI), qui est calculé au Bureau international des poids et mesures (BIPM) à partir d'une moyenne pondérée des lectures d'horloges atomiques fonctionnant dans des laboratoires d'études du temps répartis dans le monde entier. Il s'agit d'une échelle de temps de référence continue sans pas de temps.

L'échelle de temps atomique pour la détermination de l'heure civile est le Temps universel coordonné (UTC), qui diffère du TAI d'un nombre entier de secondes. En 2011, le temps UTC = TAI – 34 s. Le temps UTC est diffusé chaque mois dans la Circulaire T du BIPM sous la forme de différences entre les réalisations des différents laboratoires UTC(k).

Echelles de temps-coordonnée

Le temps-coordonnée géocentrique (TCG) est le temps-coordonnée d'un système de coordonnées ayant pour origine le centre de la Terre (ECI ou ECEF).

Le temps terrestre (TT) est un autre temps-coordonnée qui est recalculé à partir du temps TCG, de façon à avoir approximativement la même marche que le temps propre d'une horloge au repos sur le géoïde. Le géoïde est la surface d'un potentiel de gravité constant qui coïncide au mieux avec le niveau moyen de la mer. La relation entre le TCG et le TT est définie de telle sorte que $d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$, où $L_G \equiv 6{,}969\,290\,134 \times 10^{-10} \approx 60{,}2$ µs/d comme indiqué ci-dessous après la formule (18). La valeur de L_G est une constante de définition. En conséquence:

$$TCG - TT = L_G TCG = \frac{L_G}{1 - L_G}\left(TT - TT_0\right)$$

$$TCG - TT = L_G\left(TCG - TCG_0\right) = \frac{L_G}{1 - L_G}\left(TT - TT_0\right) \qquad (6)$$

où:

TCG_0 et TT_0 : correspondent à la date julienne (JD) 2443144.5 TAI (1er janvier 1977, 0 h). Une réalisation pratique de TT est:

$$TT = TAI + 32{,}184 \text{ s.} \qquad (7)$$

Le temps-coordonnée barycentrique (TCB) est le temps-coordonnée d'un système de coordonnées ayant pour origine le barycentre du système solaire. La différence de temps-coordonnée entre *TCB* et *TCG* est une transformation qui dépend à la fois de l'heure et de la position. A l'ordre $1/c^2$

$$TCB - TCG = \frac{1}{c^2}\int_{t_0}^{t}\left(U_{ext}(\mathrm{r}_E) + \frac{1}{2}v_E^2\right)dt + \frac{1}{c^2}v_E(t)\cdot \mathrm{R}(t) \tag{8}$$

où:

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$: vecteur position dépendant du temps par rapport au centre de la Terre

$\mathbf{x}$: position barycentrique de l'observateur, $\mathbf{x}_e$ et $\mathbf{v}_e$ désignant la position et la vitesse barycentriques du centre de masse de la Terre.

Cette équation peut être exprimée sous la forme

$$TCB - TCG = L_C \times (TCB - TCB_0) + P(TCB) - P(TCB_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \tag{9}$$

où:

$L_C =$ 1,480 826 867 41 $\times 10^{-8} \approx$ 1,28 ms/d.

Dans cette expression, *P* représente une série de termes périodiques. Le dernier terme est diurne à la surface de la terre, avec une amplitude maximale de 2,1 µs.

Une autre façon de représenter la formule (9) est la suivante (*Conventions de l'IERS (2010)*, Chapitre 10)

$$TCB - TCG = \frac{L_C \times (TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)}{1 - L_B} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \tag{10}$$

où:

TT et $L_B \equiv$ 1,550 519 768 $\times 10^{-8} \approx$ 1,34 ms/d est l'argument temps.

La valeur de L_B est une constante de définition.

Les termes périodiques dénotés par $P(TT)$ ont une amplitude maximale d'environ 1,6 ms et peuvent être évalués à l'aide du modèle analytique «FB» (Fairhead et Bretagnon, 1990). Sinon, on peut obtenir $P(TT) - P(TT_0)$ en utilisant une éphéméride de temps numérique telle que TE405 (Irwin et Fukushima, 1999), qui donne des valeurs avec une précision de ± 0,1 ns dans l'intervalle 1600-2200. Une série, HF2002, qui donne la valeur de $L_C\,(TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)$ en fonction de *TT* dans l'intervalle 1600-2200 a été adaptée (Harada et Fukushima, 2003) à TE405. Cette approximation diffère de TE405 de moins de 3 ns dans l'intervalle 1600-2200 avec une erreur quadratique moyenne de ± 0,5 ns.

La différence entre *TCB* et *TT* est:

$$TCB - TT = (TCB - TCG) + TCG - TT) = L_B\ TCB + (1 - L_G)\left(P + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R}\right) \tag{11}$$

La transformation entre *TCB* et *TCG* comprend un décalage moyen du rythme $\langle dTCG/dTCB\rangle \equiv 1 - L_C$ et des termes périodiques. La transformation de *TCG* à *TT* est un décalage exact du rythme $dTT/dTCG \equiv 1 - L_G$. T En conséquence, la transformation de *TCB* à *TT* présente un décalage moyen du rythme:

$$\langle dTT/dTCB\rangle = (dTT/dTCG)\langle dTCG/dTCB\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \quad (12)$$

A partir de la définition de $L_{B,}$ $(1 - L_G)(1 - L_C) \approx (1 - L_B)$, on peut exprimer la formule (12) sous la forme $\langle dTT/dTCB\rangle = (1 - L_B)$ à 10^{18} près.

Comme pour TT, le temps barycentrique dynamique (TDB) est un autre temps-coordonnée dans un système barycentrique recalculé de façon à avoir approximativement la même marche que *TT*. La relation entre *TCB* et *TDB* est définie de telle sorte que $dTDB/dTCB \equiv 1 - L_B$.

Effets relativistes sur les horloges

Dans l'analyse ci-dessous, on examine la transformation entre le temps propre d'une horloge idéale (c'est-à-dire d'une horloge qui réalise exactement la seconde SI) et le temps-coordonnée dans les systèmes de coordonnées géocentrique et barycentrique.

Système de coordonnées inertiel centré sur la Terre

Le temps-coordonnée associé à un système de coordonnées inertiel centré sur la terre (ECI) est le temps-coordonnée géocentrique (TCG). A l'aide des termes d'ordre $1/c^2$, les composantes du tenseur métrique dans ce système de coordonnées sont $-g_{00} = 1 - 2\,U/c^2$, $g_{0j} = 0$, et $g_{ij} = (1 + 2\,U/c^2)\,\delta_{ij}$, où U est le potentiel gravitationnel. Le TCG écoulé dans le système de coordonnées ECI correspondant au temps propre écoulé tel qu'enregistré par une horloge se déplaçant le long d'un trajet entre les points *A* et *B* à la vitesse *v* est donné par la formule:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2\right) d\tau \quad (13)$$

Le potentiel terrestre à la distance radiale *r*, à la latitude géocentrique ϕ et à la longitude λ peut s'exprimer sous la forme d'une expansion en harmonique sphérique de la façon suivante:

$$U(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}$$

$$= \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\sin m\lambda)\right\} \quad (14)$$

où:

GM :	constante gravitationnelle de la Terre
R_E :	rayon de la Terre au niveau de l'Equateur
facteurs $P_n(\sin\phi)$:	polynôme de Legendre de degré *n*
facteurs $P_{nm}(\sin\phi)$:	fonctions de Legendre associées de degré *n* et d'ordre *m*.

Il existe une relation entre la latitude géocentrique ϕ et la latitude géographique φ, telle que $\tan\phi = (1 - f^2)\tan\varphi$, où *f* est l'aplatissement.

Pour les applications pratiques, il peut suffire d'introduire uniquement la première correction de l'aplatissement et d'obtenir une approximation du potentiel gravitationnel, à l'aide de la formule:

$$U = \frac{GM}{r} - J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi) = \frac{GM}{r} + J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 (1-3\sin^2\phi) \tag{15}$$

1) Horloge au repos sur le géoïde

Dans le cas d'une horloge au repos à la surface de la Terre en rotation, il est nécessaire de tenir compte de la vitesse de l'horloge $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ dans le système de coordonnées ECI, où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de la Terre et $\mathbf{r}$ est la position de l'horloge. En conséquence, le *TCG* écoulé en tant que temps propre indiqué par l'horloge $\Delta\tau$ est:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\omega \times r)^2\right) d\tau = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}W\right) d\tau \tag{16}$$

où:

$W = U + \frac{1}{2}(\omega \times \mathbf{r})^2 = U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\phi$: potentiel de gravité.

Etant donné que le potentiel de gravité W_0 sur la surface du géoïde est constant, on peut l'évaluer sur l'équateur et en obtenir une approximation à l'aide de la formule:

$$W_0 \approx \frac{GM}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R_E^2 \tag{17}$$

La meilleure estimation actuelle de W_0 est $6{,}2636856 \times 10^7$ m^2/s^2. D'après la formule (16), le TCG dans le système de coordonnées ECI qui correspond au temps propre $\Delta\tau_0$ mesuré par une horloge au repos sur le géoïde est:

$$\Delta t \equiv TCG = (1 + W_0 / c^2)\, \Delta\tau_0 \cong (1 + L_G)\, \Delta\tau_0 \tag{18}$$

où:

$L_G \equiv$ 6,969 290 134 $\times 10^{-10}$.

Par convention, la valeur de L_G est une constante de définition. Elle représente la meilleure valeur disponible de W_0 / c^2 au moment de sa définition en 2000. On obtient TT en recalculant TCG d'un facteur $1 - L_G$. Ainsi:

$$\Delta t' \equiv \mathrm{TT} = (1 - L_G)\, \mathrm{TCG} \tag{19}$$

Il s'ensuit que TT = $(1 - L_G)(1 + L_G)\, \Delta\tau_0 \cong \Delta\tau_0$ à 10^{18} près.

2) Horloge embarquée à bord d'un satellite

Dans le cas d'une horloge embarquée à bord d'un satellite en orbite autour de la Terre, on peut considérer que l'orbite est keplérienne (orbite non perturbée) en première approximation. Le potentiel à la distance r par rapport au centre de la Terre est approximativement $U = GM / r$. En conséquence, l'incrément de TCG est:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\,\mathrm{v}^2\right) d\tau \tag{20}$$

La vitesse du satellite v est déterminée par conservation de l'énergie par unité de masse $\mathcal{E}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - U = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \tag{21}$$

où:

a : axe orbital semi-majeur.

En conséquence, à cet ordre, le temps coordonné écoulé est:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a}\right)\Delta\tau + \frac{2GM}{c^2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r}\,dt \tag{22}$$

Dans la seconde intégrale, $d\tau$ est remplacé par dt, étant donné que ce terme est une correction relativiste d'ordre $1/c^2$. Dans le cas d'une orbite keplérienne, la distance radiale est $r = a\,(1 - e\cos E)$, où e est l'excentricité de l'orbite et E est l'anomalie excentrique. L'anomalie excentrique est déterminée à partir de l'anomalie moyenne à l'aide de l'équation de Kepler, $M \equiv n\,\Delta t = E - e\sin E$, où le mouvement moyen est $n \equiv 2\pi / T = \sqrt{GM / a^3}$ et T est la période orbitale. En conséquence, le TCG écoulé en tant que temps propre indiqué par l'horloge est approximativement:

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a}\right)\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\;e\sin E \tag{23}$$

Le deuxième terme est une correction périodique due à l'excentricité de l'orbite qui crée une variation résiduelle de la distance et de la vitesse, donnée par la formule:

$$\Delta t_{\mathrm{eccentricity}} = \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\;e\sin E = \frac{2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} \tag{24}$$

Dans cette formule, on suppose que des éléments kepleriens (non perturbés) sont utilisés.

Pour comparer le temps propre d'une horloge à bord d'un satellite avec le temps propre d'une horloge au repos, il est nécessaire de convertir le *TCG* en *TT*. À l'aide des équations (19) et (20), on obtient (*TT*):

$$\Delta t' = (1 - L_G)\,\Delta t = \int_A^B \left\{ 1 + \frac{1}{c^2}(U - W_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2 \right\} d\tau \qquad (25)$$

En conséquence, étant donné que $\Delta t' \approx \Delta\tau_0$, l'intervalle du temps propre enregistré par une horloge au repos sur le géoïde correspondant à l'intervalle de temps propre enregistré par une horloge à bord du satellite est:

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a} - \frac{1}{c^2}W_0 \right] \Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\,a}\,e \sin E \qquad (26)$$

où:

GM : constante gravitationnelle de la Terre

R_E : rayon de la Terre au niveau de l'équateur.

Au niveau de précision inférieur à la nanoseconde, il est nécessaire de tenir compte des perturbations orbitales dues aux harmoniques du potentiel gravitationnel de la Terre, des effets de la Lune et du Soleil sur les marées, et de la pression exercée par le rayonnement solaire. A ce niveau de précision, la perturbation J_2 entraîne des variations de **r** et **v** qui produisent elles-mêmes d'autres effets périodiques de l'ordre de 0,1 ns.

Pour tenir pleinement compte de la perturbation J_2 dans le potentiel de l'équation (15), il est nécessaire de procéder au calcul de l'intégrale numérique de l'orbite et au calcul de l'intégrale numérique à l'aide de l'équation (20). Il convient également de tenir compte des effets de la Lune et du Soleil sur les marées ainsi que de la pression des rayonnements solaires.

Dans le cas d'orbites terrestres basses, les harmoniques gravitationnelles zonales et tessérales sont importantes. La correction usuelle de l'excentricité donnée par la formule (24) n'est plus exacte. En pareil cas, il est préférable de calculer l'intégrale de l'orbite et de calculer l'intégrale numérique à l'aide de la formule (20), en tenant compte des harmoniques d'ordre supérieur du potentiel gravitationnel de la Terre.

Système de coordonnées géocentrique

Pour les termes d'ordre $1 / c^2$, les composantes métriques sont $-g_{00} = 1 - 2U/c^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 / c^2 = 1 - 2W/c^2$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j / c$, et $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dans le système de coordonnées géocentrique (ECEF) qui utilise le temps-coordonnée *TT*, le temps-coordonnée écoulé est:

$$\Delta t' = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2} g\,h + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}'^2 \right) d\tau + \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}' \mathrm{d}\tau \qquad (27)$$

où:

h : hauteur au-dessus du géoïde

g : accélération locale de la gravité

v' : vitesse de l'horloge par rapport au géoïde.

On suppose que la valeur de h est petite pour obtenir une bonne précision, il convient de tenir compte de la variation de g en fonction de la latitude et de l'élévation.

La seconde intégrale est l'effet Sagnac pour une horloge embarquée, ce qui peut s'exprimer au moyen de la formule:

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}'\, d\tau = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega R \cos\phi)(v' \cos\theta)\, d\tau = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\, d\lambda \qquad (28)$$

ou au moyen de la formule:

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\; d\lambda = \frac{2\omega A}{c^2} \qquad (29)$$

où:

R :	rayon de la Terre
ϕ :	latitude
λ :	longitude
$v' \cos\theta$:	composante d'orientation vers l'est de la vitesse
A :	projection sur le plan de l'équateur de l'aire balayée par le vecteur position par rapport au centre de la Terre (positive dans la direction est et négative dans la direction ouest).

La correction est positive pour une horloge se déplaçant vers l'est et négative pour une horloge se déplaçant vers l'ouest.

Système de coordonnées barycentrique

L'intervalle de temps-coordonnée barycentrique (TCB) correspondant à l'intervalle de temps propre $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ est:

$$TCB = \int_{\tau_0}^{\tau}\left(1 + \frac{1}{c^2}U_E(\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\,|\mathbf{R}|^2\right)d\tau + \frac{1}{c^2}\int_{\tau_0}^{\tau}\left(U_{ext}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2}\mathrm{v}_E^2\right)d\tau + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R}\Big|_{\tau 0}^{\tau} \qquad (30)$$

où:

$U_E(\mathbf{r})$:	potentiel newtonien de la Terre
$U_{\text{ext}}(\mathbf{r})$:	potentiel newtonien extérieur de tous les corps du système solaire sauf la Terre.

Système de coordonnées des corps du système solaire

Pour les comparaisons d'horloges entre un corps du système solaire M et la Terre, plusieurs transformations sont nécessaires. Il faut transformer les temps propres des horloges en *TT* pour l'horloge ayant pour référentiel la Terre et en *TM* pour l'horloge ayant pour référentiel le corps M. En conséquence, la première transformation consiste à passer de *TT* à *TCB* et la seconde est la transformation correspondante de *TCB* à *TM*. Les transformations de coordonnées sont:

$$TCB - TT = (L_C + L_G)\; TCB + P + \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{R} \,/\, c^2 \qquad (31)$$

et

$$TCB - TM = (L_{CM} + L_M)\,TCB + P + \mathbf{v}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{R} / c^2 \tag{32}$$

Dans ces équations, les termes périodiques P et la position vectorielle R s'appliquent chacun respectivement à la Terre et au corps planétaire M. La différence entre TM et TT est:

$$TM - TT = (TCB - TT) - (TCB - TM) \tag{33}$$

A titre d'exemple, dans le cas de Mars, $L_{CM} = 0{,}972 \times 10^{-8} \approx 0{,}84$ ms/d, $L_M = 1{,}403 \times 10^{-10} \approx$ 12,1 µs/d. La vitesse de dérive est de 0,49 ms/d. Les amplitudes des termes périodiques sont de 1,7 ms à la période orbitale terrestre (365,2422 d) et de 11,4 ms à la période orbitale de Mars (687 d).

Propagation d'un signal électromagnétique

La présente section traite du calcul du temps-coordonnée de propagation d'un signal électromagnétique lorsqu'on connaît à la fois les positions de l'émetteur et du récepteur, telles qu'elles sont exprimées dans les systèmes de coordonnées ECI, ECEF et barycentrique.

Ces équations s'appliquent dans tous les cas. Elles doivent notamment être utilisées lors de la définition des paramètres des horloges à bord de satellites asservies à des horloges sur Terre.

Système de coordonnées inertiel centré sur la Terre

Lorsqu'on envisage de calculer un système de coordonnées inertiel centré sur la Terre (ECI), le temps-coordonnée de propagation (TCG) peut être considéré comme la somme d'une partie géométrique et d'une partie gravitationnelle La partie géométrique s'écrit:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{path} \sqrt{g_{ij}\ dx^i\ dx^j} = \frac{\rho}{c} \tag{34}$$

où:

$g_{ij} \approx$ δ_{ij} et

ρ: longueur du trajet géométrique.

Si le signal est émis au temps-coordonnée t_T et reçu au temps-coordonnée t_R, le TCG de la propagation sur le trajet est:

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_R \tag{35}$$

où, l'émetteur a la position $\mathbf{r}_T$ et le récepteur la position $\mathbf{r}_R$, et la vitesse $\mathbf{v}_\mathrm{R}$, $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$ étant la différence entre la position du récepteur et de l'émetteur au temps-coordonnée de la transmission t_T. La correction apportée au temps-coordonnée en raison de la vitesse du récepteur est:

$$\Delta t_\mathrm{vel} \approx \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_R / c^2 \tag{36}$$

A noter que les termes additionnels d'ordre $1/c^3$ peuvent représenter plusieurs picosecondes, selon la configuration.

Pour tenir compte des effets du potentiel gravitationnel sur un signal électromagnétique, il est nécessaire d'inclure le potentiel à la fois dans les parties spatiales et temporelles de la métrique .Les composantes de la métrique sont $-g_{00} = 1 - 2\ U / c^2$, $g_{0j} = 0$, et $g_{ij} = (1 + 2\ U / c^2)\ \delta_{ij}$. En conséquence, le TCG écoulé est:

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{path} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}} dx^i\, dx^j} \approx \frac{1}{c} \int_{path} \left(1 + \frac{2}{c^2} U\right) \sqrt{\delta_{ij}\, dx^i\, dx^j} = \frac{\rho}{c} + \frac{1}{c^3} \int_{path} 2U\, d\rho \tag{37}$$

Le retard gravitationnel est:

$$\Delta t_{delay} = \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right) \tag{38}$$

où:

R et r: distances entre le géocentre et l'émetteur et le récepteur respectivement.

En général, le retard gravitationnel représente quelques dizaines de picosecondes pour un trajet entre un satellite et la Terre. Le TCG total est la somme des termes des équations (35) et (38).

Le temps-coordonnée de propagation (TT) s'écrit:

$$\Delta t' = (l - L_G)\Delta t = \frac{\rho}{c} - L_G \frac{\rho}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{R + r + \rho}{R + r - \rho}\right) \tag{39}$$

Il s'agit de l'intervalle de temps qui serait mesuré par une horloge sur le géoïde.

Par exemple, pour un signal envoyé depuis un satellite géostationnaire ayant un rayon orbital de 42 164 km vers une horloge sur l'équateur à la même longitude, le retard sur le trajet est de –27 ps. Pour un satellite GPS à un angle d'élévation de 40°, les deuxième et troisième termes s'annulent pratiquement et le retard sur le trajet est de –3 ps.

Système de coordonnées géocentriques

Lorsqu'on envisage de calculer un système de coordonnées ECEF, la partie géométrique du TCG s'écrit:

$$\Delta t \ = \ \frac{1}{c} \int_{\text{path}} \sqrt{\ g_{ij}\ dx^i dx^j} \ + \ \frac{1}{c} \int_{\text{path}} g_{0j}\ dx^i \tag{40}$$

Les composantes métriques sont $-g_{00} \approx 1$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j / c$, et $g_{ij} \approx \delta_{ij}$, où $\mathbf{r}$ est le vecteur position d'un point sur le trajet du signal. Le temps-coordonnée (TT) est $\Delta t' = (1 - L_G)\ \Delta t$.

Le premier terme de l'équation (40) est ρ' / c, où ρ' est la longueur euclidienne du trajet dans le système de coordonnées ECEF. Si l'émetteur a la position $\mathbf{r}_T$ et le récepteur a la position $\mathbf{r}_R$ et la vitesse $\mathbf{v}'_R$, alors

$$\frac{\rho'}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'_R \tag{41}$$

où:

$\Delta\mathbf{r} \equiv \quad \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$

Le deuxième terme de l'équation (40) est l'effet Sagnac. En conséquence,

$$\Delta t_{Sagnac} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c^2}\int_A^B \omega\cdot(\mathbf{r}\times d\mathbf{r}) = 2\frac{1}{c^2}\int_A^B \omega\cdot d\mathbf{A} \;= \frac{2\omega A}{c^2} \tag{42}$$

où:

A: projection sur le plan de l'équateur de l'aire formée par le centre de rotation et les points d'extrémité du trajet du signal.

Le retard gravitationnel doit être pris en considération, ainsi que pour calculer le temps total de propagation.

Système de coordonnées barycentrique

Pour décrire la propagation d'un signal électromagnétique, on peut utiliser un système de coordonnées barycentrique avec des coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Etant donné que l'on ne tient compte ici que de l'effet gravitationnel du Soleil, pour faciliter le calcul du retard gravitationnel, on peut utiliser un maillage spatial où la position de l'émetteur est d ($-a_T$, b, 0) et la position du récepteur est (a_R, b, 0), de telle sorte que la propagation s'effectue approximativement le long du trajet en ligne droite $y = b$ (sans tenir compte des déviations dues à la gravitation), où b est la distance au point le plus proche du Soleil. Le temps-coordonnée de propagation (TCB) est:

$$\Delta t \;\approx\; \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \;\approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{2}{c^2}U_S\right)\,dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{1}{c^2}\,\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx \tag{43}$$

où U_S est le potentiel gravitationnel du soleil. En conséquence,

$$\Delta t = \frac{1}{c}(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{a_R{}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{a_T{}^2 + b^2}} \tag{44}$$

A un niveau d'approximation qui dépend du temps de propagation, on peut extrapoler le temps-coordonnée de propagation TT partir du temps TCB de la façon suivante:

$$\Delta t' = (1-L_B)\;\Delta t = \frac{1}{c}(1-L_B)(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{a_R{}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{a_T{}^2 + b^2}} \tag{45}$$

Références

HARADA,W. et FUKUSHIMA, T. [2003] Harmonic Decomposition of Time Ephemeris TE405. *Astron. J.* 126, 2557 – 2561.

IRWIN, A.W. et FUKUSHIMA, T. [1999] A Numerical Time Ephemeris of the Earth. *Astron. Astrophys.* 348, 642 – 652.

FAIRHEAD, L. et BRETAGNON, P. [1990] An Analytic Formula for the Time Transformation $TB - TT$. *Astron. Astrophys.* 229, 240 – 24.

McCARTHY, D.D. et SEIDELMANN, P. K. [2009] Time: From Earth Rotation to Atomic Physics (Wiley-VCH, Weinheim).

NELSON, R.A. [2011] Relativistic Time Transfer in the Vicinity of the Earth and in the Solar System. *Metrologie* 48, S171 – S180.

PETIT, G. et LUZUM, B. (éditeurs) [2010] Conventions de l'IERS (2010) (Service international de la rotation terrestre et des systèmes de référence).

PETIT, G. et WOLF, P. [2005] Relativistic Theory for Time Comparisons: A Review. *Metrologia* 42, S138 – S144.

Union internationale des télécommunications Genève [2010] *Transfert et diffusion des signaux de référence de temps et de fréquence par satellite*.