国 际 电 信 联 盟

ITU-R

国际电联无线电通信部门

ITU-R TF.2018 建议书

(08/2012)

在地球附近和太阳系中的基于相对论理论的时间传送

TF 系列

时间信号和频率标准发射

国际电信联盟

前言

无线电通信部门的职责是确保卫星业务等所有无线电通信业务合理、平等、有效、经济地使用无线电频谱，不受频率范围限制地开展研究并在此基础上通过建议书。

无线电通信部门的规则和政策职能由或区域无线电通信大会以及无线电通信全会在研究组的支持下履行。

知识产权政策（IPR）

ITU-R的IPR政策述于ITU-R第1号决议的附件1中所参引的《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策》。专利持有人用于提交专利声明和许可声明的表格可从http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en获得，在此处也可获取《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策实施指南》和ITU-R专利信息数据库。

ITU-R 系列建议书

（也可在线查询 http://www.itu.int/publ/R-REC/en）

系列	标题
BO	卫星传送
BR	用于制作、存档和播出的录制；电视电影
BS	广播业务（声音）
BT	广播业务（电视）
F	固定业务
M	移动、无线电定位、业余和相关卫星业务
P	无线电波传播
RA	射电天文
RS	遥感系统
S	卫星固定业务
SA	空间应用和气象
SF	卫星固定业务和固定业务系统间的频率共用和协调
SM	频谱管理
SNG	卫星新闻采集
TF	时间信号和频率标准发射
V	词汇和相关问题

说明：该ITU-R建议书的英文版本根据ITU-R第1号决议详述的程序予以批准。

电子出版
2013年，日内瓦

ITU-R TF.2018 建议书

在地球附近和太阳系中的基于相对论理论的时间传送

（2012年）

范围

此建议书的目的在于确立用于比较地球上的时钟和位于太阳系但远离地球的平台上的时钟的通用常规算法和程序。这些表述在已广泛接受的一般相对论中明确确定，成为时空参考系统的基础。预期这些算法和程序将用于地球卫星、星际航天器和太阳系天体上的时钟的对比。

国际电联无线电通信全会，

考虑到

a) 人们希望在地球附近和太阳系中运行的平台上保持标准时间和频率的协调；

b) 需要传送时间和频率的准确方式，以满足地球附近和太阳系中未来计时、航行、科学和通信需求；

c) 由于其运动及其运行所在的重力势能，原子钟受制于依赖路径的时间和频率变化；

d) 应明确概括时间和频率传送的概念性基础；

e) 在地球附近以及太阳系所有天体和航空器中的时间和频率传送程序要求使用可产生相对论效应的数学算法；

f) 对地球附近以及太阳系中时间和频率传送的准确性要求取决于具体应用，

建议

应酌情使用附件1提供的可产生相对论效应的时间和频率传送数学算法。

附件1

目标

本建议书的目的是增强人们对研究解决计时、导航、科学和通信系统的相对论效应的需求的意识。本建议书对分析此类系统所采用的概念和程序做出回顾，并非试图详细说明任何特定系统。相反，本建议书提供的信息旨在方便人们参考，并被用作具体应用的出发点。

本建议书的一个重要应用领域是对在围绕地球轨道、星际空间和行星表面运行的航天器时钟登记时间与地球时钟记录的时间之间做出比较。进行地面测量的一个适当时间标度是协调时（UTC），因此，本建议书的目的可以是将时钟（无论其在地球附近及太阳系的任何地方）登记的时间与测量UTC的地球时钟之间相关联。

以下讨论以下列资料为基础：国际地球自转服务局（IERS）规范（2010年）、ITU-R卫星时间和频率传送及传播手册（2010年）、Nelson所著的计量学（2011年）、Petit和Wolf所著的计量学（2005年）。本建议书读者可查阅上述出版物和参考资料所含的更多详细信息。

相对论框架

国际科学组织已通过相关决议确定了时空参考体系的相对论框架，其中最为重要的决议包括：

1) 国际天文学联合会（IAU）A4号决议（1991） – 确定地球质心天体参考体系（GCRS）和引力中心天体参考体系（BCRS）及其时间坐标。IAU的B1号决议（2000年）进一步完善了BCRS定义。

2) 国际大地测量与地球物理联合会（IUGG）第2号决议（2007年） – 确定以地球为中心的天体参考体系（GTRS）以及国际天体参考体系（ITRS）。

本文件采用的命名法遵循ITU-R过去建议书使用的命名法，且可能与IAU/IUGG框架关联如下：在本建议书中，GCRS的术语为地心惯性（ECI）坐标体系，GTRS（实践中为ITRS）的术语为地心固连（ECEF）坐标体系，BCRS的术语的为引力中心坐标体系。

定义

原时

原时τ是时钟的实际读数，或时钟自身参照系的本地时间。

坐标时

坐标时t在度量物体运动等式和电磁波传播等式中是自变量。在协调体系的四维时空中，它是一个数学坐标。对特定事件而言，坐标时在各地都具有相同值。坐标时不是测量获得，而是通过时钟原时计算获得。

时空间隔

坐标时与原时之间的关系取决于时钟的位置及其在重力环境中的运动状态，并通过对时空间隔进行积分获得。在比较两个时钟的原时时，基本消除坐标时，因此，时钟之间时间的相对传送与坐标体系无关。可根据方便程度任意选择坐标体系。

总体而言，可通过下列等式描述时空间隔：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2\, g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

其中：

$g_{\mu\nu}$: 度量成份。

希腊指数假设范围为0、1、2、3，拉丁指数假设的范围为1、2、3，重复指数表示该指数的和。度量标准取决于重力势能以及参照系的角速度和线性加速。在坐标变换时，时空间隔保持不变，因此，度量标准$g_{\mu\nu}$作为二阶协变张量变换。

下列等式总体表示原时τ与选定坐标体系坐标（包含坐标时间$x^0 \equiv ct$和空间坐标x^i）之间的关系：

$$ds^2 = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2 g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = -c^2 d\tau^2 \tag{2}$$

其中：

τ: 原时。

因此，对于在惯性参照系中静止的时钟而言，$dt = d\tau$，其$dx^i = 0$和$-g_{00} = 1$、$g_{0j} = 0$和$g_{ij} = \delta_{ij}$。在路径A点与B点之间的、对应时钟登记的被测量原时的消逝坐标时为：

$$\Delta t = \pm \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{-g_{00}}\right) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}}\, d\tau + \frac{1}{c} \int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}} \frac{dx^j}{d\tau}\, d\tau \tag{3}$$

电磁信号的时空间隔为：

$$ds^2 = g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2\, g_{0j}\, c\, dt\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0 \tag{4}$$

在所有惯性参照系中，光速都是c。路径A点与B点之间传播的消逝坐标时为：

$$\Delta t = \pm \frac{1}{c} \int_A^B \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{\left(g_{ij} + \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{-g_{00}}\right) dx^i\, dx^j} + \frac{1}{c} \int_A^B \frac{g_{0j}}{-g_{00}}\, dx^j \tag{5}$$

表达式$\gamma_{ij} \equiv g_{ij} + g_{0i}\, g_{0j} / (-g_{00})$表示三维空间度量标准，$d\rho = \sqrt{\gamma_{ij}\ dx^i\ dx^j}$表示三维距离增量。

时间标度

原子时间标度

原子钟的根本时间标度是国际原子时间（TAI），由国际计量局（BIPM）通过分布世界各地的时间实验室中原子钟的加权平均读数计算得出。这是不存在梯级的连续参考时间标度。

民用计时的原子时间标度是协调时（UTC），它与TAI相差若干整秒。2011年，UTC = TAI – 34秒。UTC每月在 BIPM 的 *T 通告中*以单个实验室实现UTC(k)的差异形式发布。

坐标时标度

地球质心坐标时（TCG）在坐标体系中为坐标时，其来源在地球中心（ECI或ECEF）。

地球时（TT）是以TCG为基础进行重新标度的另一个坐标时，其速率与在地平均面静止的时钟原时约相等。大地平均面是恒定重力势能表面，与平均海平面近似。TCG与TT之间的关系确定为$d\mathrm{TT}/d\mathrm{TCG} \equiv 1 - L_G$，其中$L_G \equiv 6.969\,290\,134 \times 10^{-10} \approx 60.2$ μs/d（如以下等式（18）后所述）。L_G数值是定义常量，因此，

$$TCG - TT = L_G TCG = \frac{L_G}{1 - L_G}(TT - TT_0)$$

$$TCG - TT = L_G(TCG - TCG_0) = \frac{L_G}{1 - L_G}(TT - TT_0) \tag{6}$$

其中：

TCG_0和TT_0：对应JD 2443144.5 TAI（1977年1月1日0时）。*TT*的实际实现为：

$$TT = TAI + 32.184 \text{ s.} \tag{7}$$

引力中心坐标时（TCB）在坐标体系中是坐标时，其来源在太阳系引力中心。*TCB*与*TCG*之间的坐标时差是一种取决于时间和位置的转换。对$1 / c^2$阶：

$$TCB - TCG = \frac{1}{c^2}\int_{t_0}^{t}\left(U_{ext}(\mathrm{r}_E) + \frac{1}{2}v_E^2\right)dt + \frac{1}{c^2}\mathrm{v}_E(t)\cdot \mathrm{R}(t) \tag{8}$$

其中：

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$： 相对于地球质心的取决于时间的位置矢量

$\mathbf{x}$： 观测器的引力中心位置，$\mathbf{x}_e$和$\mathbf{v}_e$表示地球质量中心的引力中心位置和速度。

该等式还可以下列形式表示

$$TCB - TCG = L_C \times (TCB - TCB_0) + P(TCB) - P(TCB_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \qquad (9)$$

其中：

$L_C =$ 1.480 826 867 41 × 10^{-8}≈ 1.28 ms/d。

在该表达式中，P表示一系列周期项，最后一项是地球表面的白天，幅度小于2.1 μs。等式（9）的替代形式是（IERS规范（2010年）第10章）

$$TCB - TCG = \frac{L_C \times (TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)}{1 - L_B} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \qquad (10)$$

其中：

TT和$L_B \equiv$ 1.550 519 768 × 10^{-8} ≈ 1.34 ms/d，是时间引数。

L_B数值是定义常量。

由$P(TT)$表示的周期项的最大幅度约为1.6 ms，并可通过（FB）分析模式（Fairhead和Bretagnon，1990年）进行评估。另一种替代方法是，可通过诸如TE405等数字时间星历表提供$P(TT) - P(TT_0)$（Irwin和Fukushima，1999年），其提供数值的精确度在1600至2200年之间为± 0.1 ns。在TE405中增加了HF2002 A系列，提供作为1600-2200年之间TT函数的L_C $(TT - TT_0) + P(TT) - P(TT_0)$数值（Harada和Fukushima，2003年）。该增加在1600-2200年间与TE405相差不到3 ns，均方根误差为± 0.5 ns。

TCB与TT之间的差为：

$$TCB - TT = (TCB - TCG) + TCG - TT) = L_B\ TCB + (1 - L_G)\left(P + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{R}\right) \qquad (11)$$

由TCB向TCG的转换包括$\langle dTCG/dTCB\rangle \equiv 1 - L_C$速率和周期项的平均偏差。$TCG$向$TT$的转换是$dTT/dTCG \equiv 1 - L_G$速率的精确抵消，因此，$TCB$向$TT$的转换具有速率平均抵消。

$$\langle dTT/dTCB\rangle = (dTT/dTCG)\langle dTCG/dTCB\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C) \qquad (12)$$

由于L_B定义为$(1 - L_G)(1 - L_C) \approx (1 - L_B)$，因此等式(12)可表示为$10^{18}$中若干部分的$\langle dTT/dTCB\rangle = (1 - L_B)$。

与TT类似，引力中心动态时（TDB）是引力中心体系中的另一个坐标时，进行重新标度，以使其与TT具有大约相同的速率。TCB与TDB之间的关系的确定需实现$dTDB/dTCB \equiv 1 - L_B$的目的。

对时钟产生的相对论效应

以下将讨论理想时钟（准确实现国际（SI）秒）原时与地球质心和引力中心坐标体系中的坐标时之间的转换。

地心惯性坐标体系

与地心惯性（ECI）坐标体系相关的坐标时为地球质心坐标时（TCG）。通过$1/c^2$阶项，该坐标体系中的度量张量成份为$-g_{00} = 1 - 2U/c^2$、$g_{0j} = 0$、和$g_{ij} = (1 + 2U/c^2)\,\delta_{ij}$，其中$U$为重力势能。下列等式给出对应于路径$A$点和$B$点（速度为$v$）之间运动时钟所登记的消逝原时的ECI坐标体系中的消逝TCG：

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2\right) d\tau \tag{13}$$

在半径距离r、地球中心纬度ϕ和经度λ上的地球势能可作为球形谐波表示：

$$U(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}$$

$$= \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\phi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi)(J_{mn}\cos m\lambda + K_{mn}\sin m\lambda\right\} \tag{14}$$

其中：

GM:	地球重力常数
R_E:	地球赤道半径
$P_n(\sin\phi)$因素：	n度勒让德多项式
$P_{nm}(\sin\phi)$因素：	n度和m阶的相关勒让德函数。

地心中心纬度ϕ与地理纬度φ相关，$\tan\phi = (1 - f^2)\tan\varphi$，其中$f$为扁平作用。

在实际应用中，可能只包括第一个扁率校正以及近似重力势能就足以，具体表达式为：

$$U = \frac{GM}{r} - J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi) = \frac{GM}{r} + J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 (1 - 3\sin^2\phi) \tag{15}$$

1) 在大地平均面静止的时钟

对于在旋转地球表面静止的时钟，有必要考虑到ECI坐标体系中该时钟的速度$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，其中$\boldsymbol{\omega}$为地球的角速度，$\mathbf{r}$为时钟的位置，因此，随时钟记录原时$\Delta\tau$的$TCG$为：

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\omega\times r)^2\right) d\tau = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}W\right) d\tau \tag{16}$$

其中：

$$W = U + \frac{1}{2}(\omega \times \mathbf{r})^2 = U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \phi$$：　　重力势能。

由于地球均表面的重力势能W_0为常数，因此可以在赤道上进行评估并通过下列等式获得近似值：

$$W_0 \approx \frac{GM}{R_E}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R_E^2 \tag{17}$$

目前最准确的W_0估算值为$6.2636856 \times 10^7\ \mathrm{m^2/s^2}$。按照等式（16），ECI坐标体系中的TCG（对应地球均表面静止时钟测量的原时$\Delta\tau_0$）的等式为：

$$\Delta t \equiv TCG = (1 + W_0 / c^2)\,\Delta\tau_0 \cong (1 + L_G)\,\Delta\tau_0 \tag{18}$$

其中：

$L_G \equiv$ $6.969\,290\,134 \times 10^{-10}$。

按照惯例，L_G数值为定义常量，表示在2000年对其确定时的最佳可用W_0 / c^2的数值。TT通过利用$1 - L_G$因素重新标度而获得，因此：

$$\Delta t' \equiv \mathrm{TT} = (1 - L_G)\,\mathrm{TCG} \tag{19}$$

由此，在10^{18}的若干方中，$\mathrm{TT} = (1 - L_G)(1 + L_G)\,\Delta\tau_0 \cong \Delta\tau_0$。

2) 卫星时钟

对于地球轨道上的卫星时钟，可将轨道视作第一近似值中的开普勒（未受干扰）值。距离地球中心r的势能的近似值为$U = GM / r$，因此，TCG的增量为：

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\,\mathrm{v}^2\right) d\tau \tag{20}$$

卫星速度v由每单位质量$\mathcal{E}$ 的能量守恒定律确定：

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - U = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \tag{21}$$

其中：

a：　　轨道半长轴。

因此，对此阶而言，消逝坐标时为：

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a}\right)\Delta\tau + \frac{2GM}{c^2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r}\,dt \tag{22}$$

在第二积分中，$d\tau$由dt取代，因为该项式是$1/c^2$阶的相对论修正。对开普勒轨道而言，半径距离为$r = a\ (1 - e\ \cos\ E)$，其中e为轨道离心率，E为偏近点角。偏近点角由平近点角确定，通过下列开普勒等式实现$M \equiv n\ \Delta t = E - e\ \sin E$，其中平均运动为$n \equiv 2\pi / T = \sqrt{GM / a^3}$，$T$为轨道周期。因此，随时钟记录$\Delta\tau$原时的消逝TCG约为：

$$\Delta t = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{GM}{2a} + \frac{1}{c^2}\frac{2GM}{r}\right) d\tau = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a}\right)\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\ a}\ e \sin E \tag{23}$$

第二项是周期修正，原因是下列等式给出的造成距离和速度残余变异的轨道离心率：

$$\Delta t_{\mathrm{eccentricity}} = \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\ a}\ e \sin E = \frac{2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} \tag{24}$$

在该表达式中，假设采用开普勒（未受干扰）要素。

为了比较卫星上时钟原时与地球均表面上静止时钟原时，有必要将TCG转换为TT。通过等式（19）和（20），可得出（TT）：

$$\Delta t' = (1 - L_G)\,\Delta t = \int_A^B \left\{1 + \frac{1}{c^2}(U - W_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\mathrm{v}^2\right\} d\tau \tag{25}$$

因此，由于$\Delta t' \approx \Delta\tau_0$，所以由地球均表面上静止时钟记录的原时间隔（对应于卫星时钟记录的原时间隔）为：

$$\Delta\tau_0 = \left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}\frac{GM}{a} - \frac{1}{c^2}W_0\right]\Delta\tau + \frac{2}{c^2}\sqrt{GM\ a}\ e \sin E \tag{26}$$

其中：

GM: 地球重力势能

R_E: 地球轨道半径。

在次毫微秒准确度方面，有必要考虑到由于地球重力势能谐波、月球和太阳潮汐效应及太阳辐射压力造成的轨道扰动。在该准确性层面，J_2扰动使$\mathbf{r}$和$\mathbf{v}$产生变化，从而导致出现约0.1 ns的更多周期效应。

为在等式（15）的势能中充分考虑到J_2扰动，有必要进行轨道的数值积分和等式（20）的数值积分。月球和太阳的潮汐效应以及太阳辐射压力也应得到考虑。

对于低地轨道，带谐也非常重要。通常采用的等式（24）的偏心率修正不再准确。在这种情况下，最好进行轨道和等式（20）的数值积分，包括地球重力势能的高阶谐波。

地心固连坐标体系

通过$1/c^2$阶各项，度量标准成份为$-g_{00} = 1 - 2U/c^2 - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2/c^2 = 1-2W/c^2$、$g_{0j} = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_j/c$ 和$g_{ij} = \delta_{ij}$。在使用坐标时TT的旋转式以地心固连（ECEF）坐标体系中，消逝坐标时为：

$$\Delta t' = \int_A^B \left(1 - \frac{1}{c^2} g\, h + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2} \mathrm{v}'^2\right) d\tau + \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}'\,\mathrm{d}\tau \tag{27}$$

其中：

h： 距地球均表面的高度

g： 重力的局部加速

v'： 相对于地均表面的时钟速度。

假设h很小，对于很高的准确性而言，随纬度和高度变化的g应被考虑在内。

第二个积分是被传送时钟的萨尼亚克效应，可由下列等式表示：

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}'\,d\tau = \frac{1}{c^2}\int_A^B (\omega R\,\cos\phi)(v'\,\cos\theta)\,d\tau = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\,d\lambda \tag{28}$$

或：

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{\omega R^2}{c^2}\int_A^B \cos^2\phi\,d\lambda = \frac{2\omega A}{c^2} \tag{29}$$

其中：

R： 地球半径

ϕ： 纬度

λ： 经度

$\mathrm{v}'\cos\theta$： 速度的东向分量

A： 由对应地球中心的位置矢量扫过的面积在轨道面的投射（东向为正，西向为负）。

对于东向时钟，修正为正，西向时钟的修正为负。

引力中心坐标体系

对应原时间隔$\Delta\tau = \tau - \tau_0$的引力中心坐标体系（TCB）的间隔为：

$$TCB = \int_{\tau_0}^{\tau}\left(1 + \frac{1}{c^2}U_E(\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left|\mathbf{R}\right|^2\right)d\tau + \frac{1}{c^2}\int_{\tau_0}^{\tau}\left(U_{ext}(\mathbf{r}_E) + \frac{1}{2}\mathrm{v}_E^2\right)d\tau + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_E\cdot\mathbf{R}\Big|_{\tau 0}^{\tau} \tag{30}$$

其中：

$U_E(\mathbf{r})$： 地球的牛顿势能

$U_{\text{ext}}(\mathbf{r})$： 除地球以外所有太阳系天体的外部牛顿势能。

太阳系天体坐标体系

为比较太阳系天体M与地球的时钟，需要进行若干变换。须将地球时钟原时变换为*TT*，M时钟原时变换为*TM*，之后第一个变换是从*TT*变为*TCB*，第二个变换是相应的由*TCB*向*TM*的变换。坐标变换为：

$$TCB - TT = (L_C + L_G)\, TCB + P + \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{R} / c^2 \tag{31}$$

及

$$TCB - TM = (L_{CM} + L_M)\, TCB + P + \mathbf{v}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{R} / c^2 \tag{32}$$

在这些等式中，周期项*P*和矢量位置*R*分别用于地球和行星天体M。*TM*与*TT*之间的差为：

$$TM - TT = (TCB - TT) - (TCB - TM) \tag{33}$$

举例而言，在火星情况下，$L_{CM} = 0.972 \times 10^{-8} \approx 0.84$ ms/d、$L_M = 1.403 \times 10^{-10} \approx 12.1$ μs/d，漂移率为0.49毫秒/天（ms/d）。地球轨道的周期项幅度为1.7 ms（365.2422天），火星轨道周期为11.4 ms（687天）。

电磁信号的传播

本节探讨在给出发射和接收机位置（以ECI、ECEF、引力中心坐标体系表示）时有关电磁信号传播的坐标时计算问题。

这些公式适用于所有情况。特别应当指出，在设定与地球时钟较准的卫星时钟的参数时，必须使用这些公式。

以地球为中心的惯性坐标体系

在考虑计算以地球为中心的惯性（ECI）坐标体系时，可将传播坐标时（TCG）看作是几何部分和重力部分之和。几何部分为：

$$\Delta t \approx \frac{1}{c} \int_{path} \sqrt{g_{ij}\ dx^i\ dx^j} = \frac{\rho}{c} \tag{34}$$

其中：

$g_{ij} \approx$ δ_{ij}及

ρ： 几何路径长度。

如果在t_T坐标时发射信号并在t_R坐标时接收信号，则路径上的传播TCG为：

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R \tag{35}$$

其中，发射机的位置为$\mathbf{r}_T$，接收机的位置为$\mathbf{r}_R$，速率$\mathbf{v}_R$和$\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$为$t_T$发射坐标时的接收机与发射机位置之间的差。由接收速度造成的坐标时修正为：

$$\Delta t_{\text{vel}} \approx \Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_R / c^2 \tag{36}$$

应当指出，$1/c^3$的更多项可能根据配置情况达到若干微微秒。

为考虑重力势能对电磁信号的影响，有必要在度量标准的空间和时间部分都加上势能。度量标准的成份为$-g_{00} = 1 - 2U/c^2$、$g_{0j} = 0$和$g_{ij} = (1 + 2U/c^2)\,\delta_{ij}$，因此，消逝的TCG为：

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{path}\sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}dx^i\,dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{path}\left(1+\frac{2}{c^2}U\right)\sqrt{\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j} = \frac{\rho}{c} + \frac{1}{c^3}\int_{path}2U\,d\rho \tag{37}$$

重力时延为：

$$\Delta t_{delay} = \frac{2GM}{c^3}\ln\left(\frac{R+r+\rho}{R+r-\rho}\right) \tag{38}$$

其中：

R和r：	地球中心分别离发射机和接收机的距离。

通常重力时延在卫星与地球之间路径上为几十微微秒，总TCG为等式（35）和（38）各项之和。

传播（TT）坐标时为：

$$\Delta t' = (l - L_G)\Delta t = \frac{\rho}{c} - L_G\frac{\rho}{c} + \frac{2GM}{c^3}\ln\left(\frac{R+r+\rho}{R+r-\rho}\right) \tag{39}$$

这是地球均表面上时钟将测量的时间间隔。

例如，对于从轨道半径42 164 km的对地静止卫星发射到处于同一经度的轨道时钟的信号而言，路径时延为–27 微微秒（ps）。对仰角为40°的GPS卫星，第二和第三项几乎抵消，路径时延为–3 ps。

地心固连坐标体系

当考虑计算ECEF协调体系时，TCG的几何部分为：

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{\text{path}} \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} + \frac{1}{c}\int_{\text{path}} g_{0j}\, dx^i \tag{40}$$

度量成份为$-g_{00}\approx 1$, $g_{0j} = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_j / c$和$g_{ij}\approx \delta_{ij}$，其中$\mathbf{r}$是信号路径上一点的位置矢量，坐标时（TT）为$\Delta t' = (1 - L_G)\,\Delta t$。

等式（40）中的第一项是ρ' / c，其中ρ'是ECEF坐标体系中的欧几里德路径长度。如果发射机位置为$\mathbf{r}_T$，接收机位置为$\mathbf{r}_R$，速度为$\mathbf{v}'_R$，则

$$\frac{\rho'}{c} = \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r} + \mathbf{v}'_R(t_R - t_T)\right| \approx \frac{1}{c}\left|\Delta\mathbf{r}\right| + \frac{1}{c^2}\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}'_R \tag{41}$$

其中：

$\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_R(t_T) - \mathbf{r}_T(t_T)$

等式（40）的第二项为萨尼亚克效应，因此，

$$\Delta t_{Sagnac} \approx \frac{1}{c^2}\int_A^B(\omega\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c^2}\int_A^B\omega\cdot(\mathbf{r}\times d\mathbf{r}) = 2\frac{1}{c^2}\int_A^B\omega\cdot d\mathbf{A} = \frac{2\omega A}{c^2} \tag{42}$$

其中：

A：旋转中心和信号路径端点形成的面积在轨道平面上的投射。

在计算总传播时间时还必须考虑到重力时延。

引力中心坐标体系

为描述电磁信号的传播，可采用具有卡笛尔坐标（x, y, z）的引力中心坐标体系。

由于在此仅考虑了太阳的重力效应，因此，为方便计算重力时延，可使用空间网格，其发射机位置为（$-a_T, b, 0$），接收机位置为（$a_R, b, 0$），使传播大约沿$y = b$的直线路径进行（忽略重力折射），其中b是距离近日点的距离。传播协调时（TCB）为：

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\int_{\text{path}}\sqrt{\frac{g_{ij}}{-g_{00}}\,dx^i dx^j} \approx \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{2}{c^2}U_S\right)dx = \frac{1}{c}\int_{-a_T}^{a_R}\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{2\,GM_S}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx \tag{43}$$

其中U_S为太阳重力势能，因此，

$$\Delta t = \frac{1}{c}(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{{a_R}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{{a_T}^2 + b^2}} \tag{44}$$

为获得取决于传播时间的近似值，从TCB时进行标度的传播TT协调时可以是：

$$\Delta t' = (1 - L_B)\,\Delta t = \frac{1}{c}(1 - L_B)(a_T + a_R) + 2\frac{GM_S}{c^3}\ln\frac{a_R + \sqrt{{a_R}^2 + b^2}}{-a_T + \sqrt{{a_T}^2 + b^2}} \tag{45}$$

参考资料

HARADA ,W. and FUKUSHIMA, T. [2003] Harmonic Decomposition of Time Ephemeris TE405. *Astron. J.* 126, 2557 – 2561.

IRWIN, A.W. and FUKUSHIMA, T. [1999] A Numerical Time Ephemeris of the Earth. *Astron. Astrophys.* 348, 642 – 652.

FAIRHEAD, L. and BRETAGNON, P. [1990] An Analytic Formula for the Time Transformation $TB - TT$. *Astron. Astrophys.* 229, 240 – 24.

McCARTHY, D.D. and SEIDELMANN, P. K. [2009] Time: From Earth Rotation to Atomic Physics (Wiley-VCH, Weinheim).

NELSON, R.A. [2011] Relativistic Time Transfer in the Vicinity of the Earth and in the Solar System. *Metrologia* 48, S171 – S180.

PETIT, G. and LUZUM, B. (editors) [2010] IERS Conventions (2010) (International Earth Rotation and Reference Systems Service).

PETIT, G., and WOLF, P. [2005] Relativistic Theory for Time Comparisons: A Review. *Metrologia* 42, S138 – S144.

International Telecommunication Union, Geneva [2010] *Satellite Time and Frequency Transfer and Dissemination*.