

国 际 电 信 联 盟

ITU-R

国际电联无线电通信部门

ITU-R P.1144-10 建议书
(08/2019)

无线电通信第3研究组
传播方法应用指导

P 系列
无线电波传播



国际电信联盟

前言

无线电通信部门的职责是确保卫星业务等所有无线电通信业务合理、平等、有效、经济地使用无线电频谱，不受频率范围限制地开展研究并在此基础上通过建议书。

无线电通信部门的规则和政策职能由世界或区域无线电通信大会以及无线电通信全会在研究组的支持下履行。

知识产权政策 (IPR)

ITU-R的IPR政策述于ITU-R第1号决议中所参引的《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策》。专利持有人用于提交专利声明和许可声明的表格可从<http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/zh>获得，在此处也可获取《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策实施指南》和ITU-R专利信息数据库。

ITU-R 系列建议书

(也可在线查询 <http://www.itu.int/publ/R-REC/zh>)

系列	标题
BO	卫星传送
BR	用于制作、存档和播出的录制；电视电影
BS	广播业务（声音）
BT	广播业务（电视）
F	固定业务
M	移动、无线电测定、业余和相关卫星业务
P	无线电波传播
RA	射电天文
RS	遥感系统
S	卫星固定业务
SA	空间应用和气象
SF	卫星固定业务和固定业务系统间的频率共用和协调
SM	频谱管理
SNG	卫星新闻采集
TF	时间信号和频率标准发射
V	词汇和相关问题

说明： 该ITU-R建议书的英文版本根据ITU-R第1号决议详述的程序予以批准。

电子出版
2020年，日内瓦

© 国际电联 2020

版权所有。未经国际电联书面许可，不得以任何手段复制本出版物的任何部分。

ITU-R P.1144-10 建议书

无线电通信第3研究组传播方法应用指导

(1995-1999-2001-2001-2007-2009-2012-2015-06/2017-12/2017-2019年)

范围

本建议书为包含传播预测方法的无线电通信第3研究组的建议书提供了指导。它针对特定应用的最适当方法以及这些方法中每一种方法的限值、所需的输入信息和输出结果向用户提供了建议。

关键词

无线电波传播、预测方法、数字产品、空间插值、高度参考系统

国际电联无线电通信全会，

考虑到

有必要为（无线电通信第3研究组制定的）ITU-R P系列建议书的用户提供帮助，

建议

1 应使用表1中的信息指导（无线电通信第3研究组制定的）ITU-R P系列建议书中各种传播方法的应用；

2 应使用表2和附件1中的信息指导应用上述建议1中的传播方法所必需的各种地球物理参数数字地图的使用。

注 1 – 对于表1中的每项ITU-R建议书，均有相关的信息栏用以表示：

应用：建议书所适用的业务或应用。

类型：建议书所适用的情况，如点对点、点对面、视距等。

输出：建议书中的方法所产生的输出参数值，如路径损耗。

频率：建议书所适用的频率范围。

距离：建议书所适用的距离范围。

%时间：建议书所适用的时间百分比值或数值范围；%时间是在平常的一年中超过预测信号时间的比例。

%位置：建议书所适用的位置范围百分比；%位置是在超出预测信号（比如100 到200米边距的广场范围内）的位置比例。

终端高度：建议书所适用的终端天线高度范围。

输入数据：建议书中的方法所使用的参数列表；列表按照参数的重要性排序，在某些情况下，可能使用缺省值。

建议书中已经提供了表1所显示的信息；但该表可使用户快速浏览建议书的各种能力（和局限），而不必费力在案文中搜索。

表1

ITU-R无线电波传播预测方法

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.368建议书	频率在10 kHz和30 MHz间的地波传播曲线	所有业务	点对点	场强	10 kHz至 30 MHz	1至10 000 km	不适用	不适用	陆基	频率 地面传导性
ITU-R P.452建议书	评估在频率高于约0.1 GHz时地球表面上电台之间干扰的预测程序	利用地球表面电台的业务；干扰	点对点	路径损耗	100 MHz至 50 GHz	未具体规定，但高达并超过无线电地平线	0.001至50 平均年和最坏月份	不适用	在大气层表层内无特定限制（不是用于航空应用）。	路径形态数据 频率 时间百分比 Tx天线高度 Rx天线高度 Tx的经纬度 Rx的经纬度 气象数据 极化
ITU-R P.528建议书	使用VHF、UHF和SHF频段的航空移动和无线电导航业务的传播曲线	航空移动	点对点	路径损耗	125 MHz至 15.5 GHz	0至1 800 km （对于航空应用，0 km 水平距离不表示0 km 路径长度）	1至99	不适用	H1: 最小为1.5 m H2: 最小为1-5 m	距离 Tx高度 频率 Rx 高度 时间百分比
ITU-R P.530建议书	设计地面视距系统所需的传播数据和预测方法	视距固定链路	点对点视距	路径损耗 分集改善（晴空条件） XPD ⁽²⁾ 中断 错误性能	约 150 MHz至100 GHz	最多200 km（如果为瞄准线）	晴空条件下全部时间百分比； 降水条件下1至0.001在预测条件下 ⁽¹⁾ 和衰减的最坏月份	不适用	足够高以确保规定的路径间隙	距离 Tx高度 频率 Rx 高度 时间百分比 路径障碍数据 气候数据 地形资料

表1 (续)

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.533建议书	HF电路性能的预测方法	广播 固定 移动	点对点	基本 MUF 天波场强 可用的接收机功率 信噪比 LUF 电路可靠性	2至 30 MHz	0至 40 000 km	全部百分比	不适用	不适用	Tx的经纬度 Rx的经纬度 太阳黑子数量 月份 时间 频率 Tx功率 Tx天线类型 Rx天线类型
ITU-R P.534建议书	计算偶发E层场强的方法	固定 移动 广播	点对点 通过零星E	场强	30至 100 MHz	0至4 000 km	0.1至50	不适用	不适用	距离 频率
ITU-R P.617建议书	超视距无线电中继系统设计所需传播预测技术和数据	超越地平线 固定链路	点对点	路径损耗	>30 MHz	100至 1 000 km	0.001至99.999	不适用	在大气层表内无特定限制（不是用于航空应用）。	频率 Tx天线增益 Rx 天线增益 路径几何图形
ITU-R P.618建议书	设计地对空电信系统所需的传播数据和预测方法	卫星	点对点	路径损耗 分集增益和（降水条件下） XPD ⁽²⁾	1至 55 GHz	任何实际轨道高度	对于雨衰减为0.001-5；对于总衰减为0.001-50；对于 XPD ⁽²⁾ 为0.001-1 和衰减的最坏月份	不适用	无限制	气候数据 频率 仰角 地球站高度 地球站点间隔和角度（对于分集增益） 天线直径和效率（对于闪烁） 极化角（对于XPD(2)）
ITU-R P.619建议书	评估空间和地球表面电台之间干扰所需的传播数据	卫星	点对点	单入干扰的基本传输损耗 晴空条件下单入干扰的基本传输损耗	0.1至100 GHz	任何实际轨道高度	0.001至50	不适用	无限制	频率 地球站仰角 角路径间隔 路径长度 大气衰减 闪烁“增益” 有用信号的最大允许衰减

表1 (续)

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.620建议书	100 MHz-105 GHz频率范围内估计协调距离所需的传播数据	地球站频率协调	协调距离	实现所需传播损耗的距离	100 MHz至105 GHz	最大至1 200 km	0.001至50	不适用	在大气层表层内无特定限制（不是用于航空应用）。	最小基本传输损耗 频率 时间百分比 地球站仰角
ITU-R P.678建议书	对传播现象可变性的特征描述和与传播余量相关的风险评估	降雨率模型卫星	点对点	传播现象的变化性	12至 50 GHz	任何实际轨道高度	对于沿着倾斜路径的降雨率和雨衰为0.01-2	不适用	无限制	超越概率
ITU-R P.679建议书	设计卫星广播系统所需的传播数据	广播卫星	点对面	路径损耗 当地环境作用	0.5至 5.1 GHz	任何实际轨道高度	不适用	无特定限制	无特定限制	频率 仰角 本地环境特点
ITU-R P.680建议书	地对空水上移动通信系统设计所需的传播数据	水上移动卫星	点对点	海面衰减 衰减持续时间干扰 (相邻卫星)	0.8至 8 GHz	任何实际轨道高度	通过Rice-Nakagami分布, 至0.001%, 对于干扰 ⁽¹⁾ , 限制为0.01%	不适用	无限制	频率 仰角 最大天线主波束增益
ITU-R P.681建议书	地对空陆地移动通信系统设计所需的传播数据	陆地移动卫星	点对点	路径衰减 衰减持续时间 非衰减持续时间	0.8至 20 GHz	任何实际轨道高度	不适用 传播距离百分比 1至 80% ⁽¹⁾	不适用	无限制	频率 仰角 传播距离百分比 大约的光遮蔽水平
ITU-R P.682建议书	设计地对空航空移动通信系统所需的传播数据	航空移动卫星	点对点	海面衰减 着陆时地面和飞行器多路径	1至 2 GHz (海面衰减) 1至 3 GHz (来自地面多路径)	任何实际轨道高度	通过 Rice-Nakagami分布 ⁽¹⁾ 至 0.001%	不适用	对于海面衰减无限制 着陆期间地面反射最大为 1 km	频率 仰角 极化 最大天线视轴增益 天线高度

表1 (续)

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.684建议书	约150 kHz以下频率的场强预测	固定 移动	点对点 点对点	天波场强	30至 150 kHz	0至 16 000 km	50	不适用	不适用	Tx的经纬度 Rx的经纬度 距离 Tx功率 频率 地面常数 季节 太阳黑子数量 时间
ITU-R P.843建议书	流星猝发传播通信	固定 移动 广播	通过流星余迹 猝发点对点	接收功率 猝发率	30至 100 MHz	100至 1 000 km	0至5	不适用	不适用	频率 距离 Tx功率 天线增益
ITU-R P.1147建议书	频率约在150和1 700 kHz之间的天波场强的预测	广播	点对点	天波场强	0. 1.7 MHz	50至 12 000 km	1、10、50	不适用	不适用	Tx的经纬度 Rx的经纬度 距离 太阳黑子数量 Tx功率 频率
ITU-R P.1238建议书	用于规划频率范围在300 MHz到100 GHz内的室内无线电通信系统和无线局域网的传播数据和预测方法	移动 RLAN	建筑物内传播方法	路径损耗 延迟扩展	300MHz 至450 GHz	建筑物内	不适用	不适用	固定地点：约 2-3 m 移动：约 0.5-3 m	频率 距离 地板和墙壁因素
ITU-R P.1410建议书	3-60 GHz频带范围内地面宽带无线电接入系统设计所需的传播数据和预测方法	宽带无线电接入	点对点	覆盖率 因降雨造成临时覆盖率降低	3 至 60 GHz	0-5 km	0.001至 1 (用于计算因降雨造成的覆盖率降低)	最大为 100	无限制；0-300 m (典型)	频率 覆盖区域 终端高度 建筑高度统计参数

表1 (续)

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.1411 建议书	300 MHz至100 GHz频率范围内的短距离室外无线电通信系统和无线本地网规划所用的传播数据和预测方法	移动	短路经传播方法	路径损耗 延迟扩展	300 MHz至 100 GHz	< 1 km	不适用	不适用	固定位置: 约4-50 m 移动: 约0.5-3 m	频率 距离 街道宽度 结构高度
ITU-R P.1546 建议书	30 MHz至3 000 MHz频率范围内地面业务点对点预测的方法	地面业务	点对点	场强	30至 4 000 MHz	1至 1 000 km	1至 50	1至 99	Tx/固定位置: 有效高度从小于0 m-3 000 m Rx/移动: ≥ 1 m	地形高度和地面覆盖 (可选) 路径分类 距离 Tx天线高度 频率 时间百分比 Rx 天线高度 离地高度角 位置百分比 折射倾斜度
ITU-R P.1622 建议书	在20 THz和375 THz频段之间运行的地对空系统设计所需的预测方法	卫星光链路	点对点	吸收损耗 散射损耗 背景噪声 振幅 闪烁 到达角 光束飘移 光束扩展	20至 375 THz	远场地对空光链路	不适用	不适用	无限制	波长 终端高度 仰角 湍流结构参数
ITU-R P.1623 建议书	地-空路径衰落动态范围的预测方法	卫星	点对点	衰减持续时间, 衰减斜坡	10至 50 GHz	任何实际轨道高度	不适用	不适用	无限制	频率 仰角 衰减门限值 滤波器带宽
ITU-R P.1812 建议书	VHF和UHF波段中有关点对点地面业务的一种路径特定的传播预测方法	地面业务	点对点	场强	30 MHz至 3 000 MHz	未具体规定, 但可高达并超过无线电地平线	1至 50	1至 99	在大气层表层内无特定限制 (不是用于航空应用)	路径形态数据 频率 时间百分比 Tx天线高度 Rx天线高度 Tx的经纬度 Rx的经纬度 气象数据极化

表1 (完)

方法	标题	应用	类型	输出	频率	距离	时间%	位置%	终端高度	输入数据
ITU-R P.1814 建议书	设计地面自由空间光链路所需的预测方法	地面光链路	点对点	吸收损耗 散射损耗 背景噪声 振幅 闪烁 光束扩展	20至 375 THz	无限制	不适用	不适用	无限制	波长 能见度 (雾中) 路径长度 湍流结构参数
ITU-R P.1853 建议书	对流层衰减时间系列的合成方法	地面卫星	点对点	地面路径雨衰减 地对空路径的总衰减和对流层闪烁	地面路径4至40 GHz 地对空路径4至55 GHz	对于GEO卫星地面路径在2和60 km之间	不适用	不适用	无限制	气象数据 频率 仰角 地球站高度 地球站点的间隔和角度 (用于分集增益) 天线直径与效率 (用于闪烁)
ITU-R P.2001 建议书	一种30MHz至50GHz频率范围广泛通用的地面传播模型	地面业务	点对点	路径损耗	30 MHz至 50 GHz	3至1 000 km	0.001至99.999	不适用	在对流层内无特定限制	路径形态数据 频率 时间百分比 Tx天线高度、增益和方位角朝向 Rx 天线高度、增益和方位角朝向 Tx的经纬度 Rx的经纬度 极化
ITU-R P.2041 建议书	预测机载平台与空间以及机载平台与地表之间链路的路径衰减	机载	点对点	路径损耗	1至 55 GHz	任何高度	0.001至 50	不适用	<8000米平均海拔但靠近地面, 在对流层以内, m.s.l.-平均海平面	气象数据 频率 仰角 可用性 机载平台的高度 天线直径和效率 (对于闪烁)

(1) 中断的时间百分比; 对于业务可用性, 用100减去数值。

(2) XPD: 交叉极化鉴别。

表2

ITU-R用于无线电波传播预测方法的数字产品

ITU-R建议书	描述	栅格分辨率	所需的空间插值 (见附件1)	概率插值	变量插值	注
P.452	年 ΔN 中值 年 N_0 中值	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.453	表面折射率湿项 (Nwet) 的年度和月度概率分布	$0.75^\circ \times 0.75^\circ$	双线性	对数	不适用	有关适用的文件名, 请参考相关的自述文件 ⁽²⁾
	<ul style="list-style-type: none"> 在大气层最低 65m的折射率梯度 (N-units/km) 在大气层最低 1 km 的折射率梯度 (N-units/km) 最低 100 m 折射率梯度 < -100 N-unit/km 的时间百分比 	$0.75^\circ \times 0.75^\circ$	双线性	未定义	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
	表面波导数据	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	未定义	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页
	悬空波导数据	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	未定义	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页
P.617	年 ΔN 中值 年 N_0 中值	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.678	气候比地图	$0.5^\circ \times 0.5^\circ$	双线性	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.834	沿着地球-空间路径的过度路径长度的谐波系数	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	未定义	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
	流体静力与湿润映射函数的谐波系数	$5^\circ \times 5^\circ$	不要求			

表2 (续)

ITU-R建议书	描述	栅格分辨率	所需的空间插值 (见附件1)	概率插值	变量插值	注
P.835	大气层垂直剖面的实验数据 (附件2)	353个位置	不要求	不适用	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页
	大气层垂直剖面的气象预测数据 (附件3)	1.5° × 1.5°	未规定	不适用	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页
P.836	总柱状水蒸气超越概率(%) (IWVC)	1.125° × 1.125°	双线性 ⁽¹⁾	对数	线性	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
	表面水蒸气密度超越概率(%) (Rho)	1.125° × 1.125°	双线性 ⁽¹⁾	对数	线性	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
	水蒸气标高	1.125° × 1.125°	双线性 ⁽¹⁾	对数	线性	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
	地形高度 (a.m.s.l.) (km)	0.5° × 0.5°	双三次	不适用	不适用	参见相关建议书
P.837	降雨率超越概率(%) (降雨率)	1.125° × 1.125°	双线性	不适用	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页
	在不同积分时间的降雨率统计值转换 (附件3)	不适用	不要求	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.839	平均年0°C 等温线高度(km)	1.5° × 1.5°	双线性	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.840	柱状降低云液体水容量的年统计值 柱状降低云液体水容量的月统计值 采用一个对数正太分布对降低云液体水容量的近似	1.125° × 1.125°	双线性	对数	线性	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.1510	平均年表面温度	1.5° × 1.5°	双线性	不适用	不适用	请参见电离层和对流层传播的软件和无线电噪声网页

表2 (完)

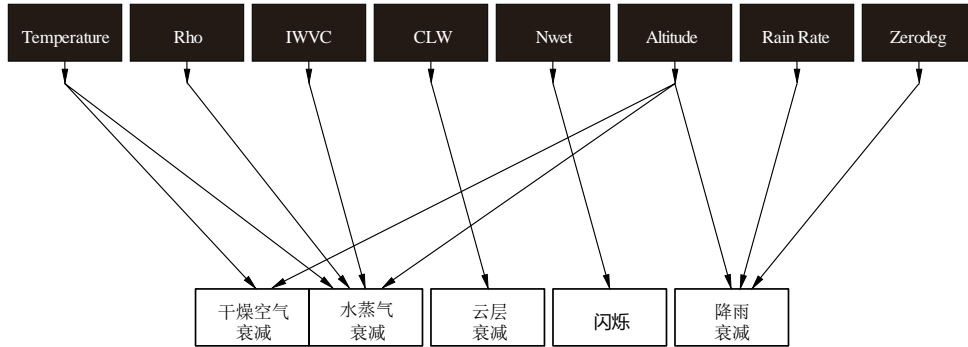
ITU-R建议书	描述	栅格分辨率	所需的空間插值 (见附件1)	概率插值	变量插值	注
P.1511	地形高度 (a.m.s.l.) (m)	$0.08333^\circ \times 0.08333^\circ$	双三次	不适用	不适用	本建议书包含P系列建议书中纬度、经度和高度的定义。有关适用的文件名, 请参考相关的自述文件 ⁽²⁾
	地球引力模型2008 (EGM2008) (m)	$0.08333^\circ \times 0.08333^\circ$	双三次	不适用	不适用	有关适用的文件名, 请参考相关的自述文件 ⁽²⁾
P.1812	中值年 ΔN 中值年 N_0	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	不适用	不适用	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.2001	大气层最低1km的表层折射率和梯度	多重	双线性	不适用	线性	请参见适用文件名称的相关自述文件 ⁽²⁾
P.2001和P.534	分散-E临界频率(F_oE_s)	$1.5^\circ \times 1.5^\circ$	双线性	线性	线性	FoEs50.txt FoEs10.txt FoEs01.txt FoEs0.1.txt

⁽¹⁾ 按照本建议书中标度程序, 在空间插值前按所需高度调整周围栅格点的变量。

⁽²⁾ 自述文件包含在与本建议书相关网页上的压缩(组成)文件之中。

为便于参考，图1显示了地球物理图（黑框）和传播效果之间的关系（白框）。

图1



P.1144-01

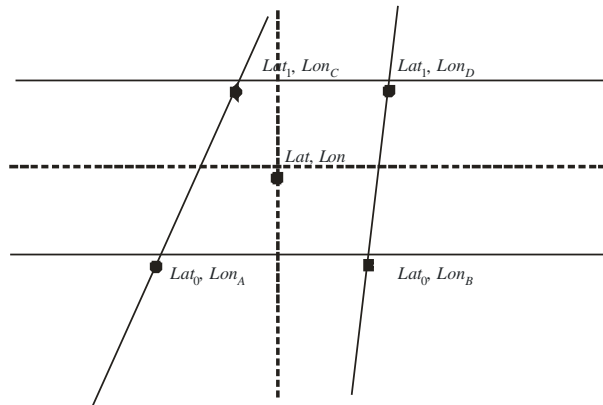
附件1

1a 在一个不规则四边形格栅上的双线性插值

假定：周围四个点 (Lat_1, Lon_C) 、 (Lat_1, Lon_D) 、 (Lat_0, Lon_A) 、和 (Lat_0, Lon_B) 的X值为： $X(Lat_1, Lon_C)$ 、 $X(Lat_1, Lon_D)$ 、 $X(Lat_0, Lon_A)$ 、和 $X(Lat_0, Lon_B)$ 。

问题：采用双线性插值确定在一个中间点 (Lat, Lon) 处的值 $X(Lat, Lon)$ 。

图2



P.1144-02

解答：定义二个辅助变量 t 和 s ：

$$t = \frac{Lat - Lat_0}{Lat_1 - Lat_0}$$

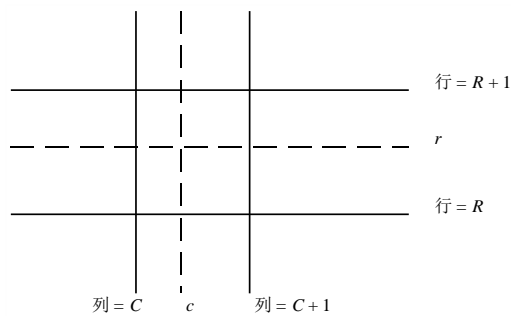
$$s = \frac{Lon - Lon_A + t(Lon_A - Lon_C)}{Lon_B - Lon_A + t(Lon_A - Lon_C + Lon_D - Lon_B)}$$

并且计算：

$$\begin{aligned} X(Lat, Lon) = & (1 - s)(1 - t)X(Lat_0, Lon_A) \\ & + (1 - s)tX(Lat_1, Lon_C) \\ & + s(1 - t)X(Lat_0, Lon_B) \\ & + tsX(Lat_1, Lon_B) \end{aligned}$$

1b 在一个正方形格栅上的双线性插值

图3



P.1144-03

假定：周围四个栅格点的I值为： $I(R,C)$ 、 $I(R,C+1)$ 、 $I(R+1,C)$ 和 $I(R+1,C+1)$ ，其中， R 、 $R+1$ 、 C 和 $C+1$ 是整数行和列数。

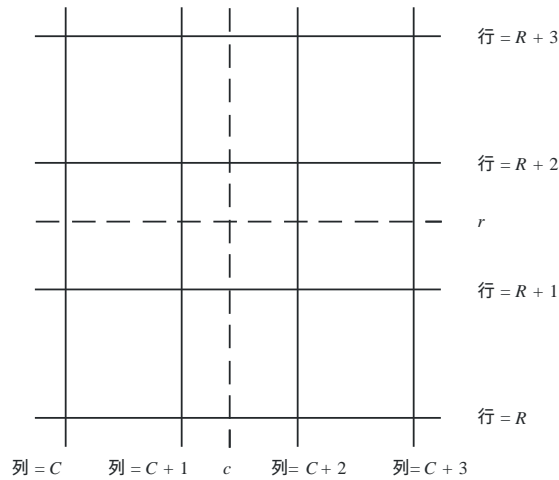
问题：采用双线性插值确定 $I(r,c)$ ，其中 r 是介于 R 和 $R+1$ 之间的一个分行数，而 c 是介于 C 和 $C+1$ 之间的一个分列数。

解答：计算

$$\begin{aligned} I(r,c) = & I(R,C) [(R+1-r)(C+1-c)] \\ & + I(R+1,C) [(r-R)(C+1-c)] \\ & + I(R,C+1) [(R+1-r)(c-C)] \\ & + I(R+1,C+1) [(r-R)(c-C)] \end{aligned}$$

2 双三次插值

图4



1144-04

假定：周围16个栅格点的I值为：

$$\begin{aligned}
 &I(R,C), I(R,C + 1), I(R,C + 2), I(R,C + 3), \\
 &I(R + 1,C), I(R + 1,C + 1), I(R + 1,C + 2), I(R + 1,C + 3), \\
 &I(R + 2,C), I(R + 2,C + 1), I(R + 2,C + 2), I(R + 2,C + 3), \\
 &I(R + 3,C), I(R + 3,C + 1), I(R + 3,C + 2), I(R + 3,C + 3)
 \end{aligned}$$

其中， $R, R + 1$ 等，和 $C, C + 1$ 等是整数。

问题：采用双三次插值计算 $I(r,c)$ ，其中 r 是介于 $R + 1$ 和 $R + 2$ 之间的一个分行数， c 是介于 $C + 1$ 和 $C + 2$ 之间的一个分列数。

解答：

第1步：对于每一行 X ，其中 $X = \{R, R + 1, R + 2, R + 3\}$ ，计算所希望的分行 c 的插值如下：

$$RI(X,c) = \sum_{j=C}^{C+3} I(X,j) K(c-j)$$

如果：

$$K(\delta) = \begin{cases} (a+2)|\delta|^3 - (a+3)|\delta|^2 + 1 & \text{对于 } 0 \leq |\delta| \leq 1 \\ a|\delta|^3 - 5a|\delta|^2 + 8a|\delta| - 4a & \text{对于 } 1 \leq |\delta| \leq 2 \\ 0 & \text{对于 } 2 \leq |\delta| \end{cases}$$

以及

$$a = -0.5$$

第2步：通过插入一维度插值，以行插值同样的方式计算 $I(r,c)$ ， $RI(R,c)$ ， $RI(R + 1,c)$ ， $RI(R + 2,c)$ 和 $RI(R + 3,c)$ 。

3 高斯正交积分

如果被积函数 $f(x)$ 在积分区间内用 $2n-1$ 次或更小的多项式逼近，那么高斯正交积分就是对定积分的精确逼近。 n 值应根据所需的精度来选择。

高斯正交点 X_i 和高斯正交权重 W_i 的值是本建议书不可分割的组成部分，并在GaussQuadrature_n.txt文件中提供，其中 $n = 16、32、64、128$ 和 256 （Gaussian Quadrature Weights.zip）。

3.1 单积分

单个积分可以通过高斯正交积分很好地近似，注意：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt$$

$$\approx \sum_{i=1}^n W_i' f(X_i')$$

式中：

$$W_i' = \left(\frac{b-a}{2}\right) W_i$$

$$X_i' = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} X_i$$

3.2 双重积分

双重积分可以通过高斯正交积分很好地近似，注意：

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}s, \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}t\right) ds dt$$

$$\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i' Y_j' f(X_i', Z_j')$$

式中：

$$W_i' = \left(\frac{b-a}{2}\right) W_i$$

$$X_i' = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} X_i$$

$$Y_j' = \left(\frac{d-c}{2}\right) W_j$$

$$Z_j' = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} Y_j$$
