Unión Internacional de Telecomunicaciones

UIT-R

Sector de Radiocomunicaciones de la UIT

Recomendación UIT-R P.1057-7

(08/2022)

Distribuciones de probabilidad para establecer modelos de propagación de las ondas radioeléctricas

Serie P

Propagación de las ondas radioeléctricas

Unión Internacional de Telecomunicaciones

Prólogo

El Sector de Radiocomunicaciones tiene como cometido garantizar la utilización racional, equitativa, eficaz y económica del espectro de frecuencias radioeléctricas por todos los servicios de radiocomunicaciones, incluidos los servicios por satélite, y realizar, sin limitación de gamas de frecuencias, estudios que sirvan de base para la adopción de las Recomendaciones UIT-R.

Las Conferencias Mundiales y Regionales de Radiocomunicaciones y las Asambleas de Radiocomunicaciones, con la colaboración de las Comisiones de Estudio, cumplen las funciones reglamentarias y políticas del Sector de Radiocomunicaciones.

Política sobre Derechos de Propiedad Intelectual (IPR)

La política del UIT-R sobre Derechos de Propiedad Intelectual se describe en la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI a la que se hace referencia en la Resolución UIT-R 1. Los formularios que deben utilizarse en la declaración sobre patentes y utilización de patentes por los titulares de las mismas figuran en la dirección web http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/es, donde también aparecen las Directrices para la implementación de la Política Común de Patentes UIT-T/UIT-R/ISO/CEI y la base de datos sobre información de patentes del UIT-R sobre este asunto.

Series de las Recomendaciones UIT-R

(También disponible en línea en http://www.itu.int/publ/R-REC/es)

Series	Título
BO	Distribución por satélite
BR	Registro para producción, archivo y reproducción; películas en televisión
BS	Servicio de radiodifusión (sonora)
BT	Servicio de radiodifusión (televisión)
F	Servicio fijo
M	Servicios móviles, de radiodeterminación, de aficionados y otros servicios por satélite conexos
P	**Propagación de las ondas radioeléctricas**
RA	Radioastronomía
RS	Sistemas de detección a distancia
S	Servicio fijo por satélite
SA	Aplicaciones espaciales y meteorología
SF	Compartición de frecuencias y coordinación entre los sistemas del servicio fijo por satélite y del servicio fijo
SM	Gestión del espectro
SNG	Periodismo electrónico por satélite
TF	Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias
V	Vocabulario y cuestiones afines

***Nota**: Esta Recomendación UIT-R fue aprobada en inglés conforme al procedimiento detallado en la Resolución UIT-R 1.*

Publicación electrónica
Ginebra, 2023

RECOMENDACIÓN UIT-R P.1057-7

Distribuciones de probabilidad para establecer modelos de propagación de las ondas radioeléctricas

(1994-2001-2007-2013-2015-2017-2019-2022)

Cometido

Esta Recomendación describe las diversas distribuciones de probabilidad para establecer modelos y métodos de predicción de la propagación de las ondas radioeléctricas.

Palabras clave

Distribuciones de probabilidad, normal, gaussiano, log-normal, Rayleigh, Nakagami-Rice, gamma, exponencial, Pearson, Weibull

La Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT,

considerando

a) que la propagación de las ondas radioeléctricas está asociada principalmente con un medio aleatorio, lo que hace necesario analizar los fenómenos de propagación con métodos estadísticos;

b) que, en la mayoría de los casos, es posible describir satisfactoriamente las variaciones de los parámetros de propagación en el tiempo y en el espacio sobre la base de distribuciones de probabilidad estadísticas conocidas;

c) que es importante conocer las propiedades fundamentales de las distribuciones de probabilidad más comúnmente utilizadas en las estadísticas de los estudios de propagación,

recomienda

1 que para la planificación de los servicios de radiocomunicaciones y para la predicción de los parámetros de calidad de funcionamiento de los sistemas se utilice la información estadística pertinente al modelo de propagación proporcionado en el Anexo 1;

2 que el procedimiento paso a paso suministrado en el Anexo 2 se utilice para aproximar una distribución de probabilidad acumulativa complementaria mediante una distribución de probabilidad acumulativa complementaria log-normal;

3 que el procedimiento paso a paso suministrado en el Anexo 3 se utilice para aproximar una distribución de probabilidad acumulativa complementaria mediante una distribución de probabilidad acumulativa complementaria de Weibull.

Anexo 1

Distribuciones de probabilidad para establecer modelos de la propagación de las ondas radioeléctricas

1 Introducción

La experiencia ha mostrado que la información sobre los valores medios de las señales recibidas no es suficiente para caracterizar de manera precisa la calidad de funcionamiento de los sistemas de radiocomunicaciones, por lo que se debería también considerar las variaciones en función del tiempo, el espacio y la frecuencia.

El comportamiento dinámico de las señales deseadas e interferentes desempeña un papel significativo en el análisis de la fiabilidad del sistema y en la elección de los parámetros del sistema, tal como el tipo de modulación. Es esencial conocer la distribución de probabilidad y la velocidad de las fluctuaciones de la señal para especificar parámetros como el tipo de modulación, la potencia de transmisión, la relación de protección contra la interferencia, las medidas de diversidad, el método de codificación, etc.

Para la descripción de la calidad de funcionamiento de un sistema de comunicaciones a menudo es suficiente observar la serie temporal de la fluctuación de las señales y caracterizar estas fluctuaciones como un proceso estocástico. Para establecer modelos de las fluctuaciones de las señales con el propósito de predecir el funcionamiento del sistema radioeléctrico, se requiere el conocimiento de los mecanismos de la interacción de las ondas radioeléctricas con la atmósfera neutra y la ionosfera.

La composición y el estado físico de la atmósfera es muy variable en el espacio y en el tiempo. Por tanto, el establecimiento de modelos de interacción de la onda, exige el uso extensivo de métodos estadísticos para caracterizar diversos parámetros físicos que describan la atmósfera, así como los parámetros eléctricos que definen el comportamiento de la señal y los procesos interactivos que relacionan estos parámetros.

A continuación, se proporciona información general sobre las distribuciones de probabilidad más importantes. Con ella, se proporciona una base común a los métodos estadísticos para la predicción de la propagación utilizados en las Recomendaciones de la Comisiones de Estudio de Radiocomunicaciones.

2 Distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad de los procesos estocásticos se describen generalmente mediante una función de densidad de probabilidad (FDP) o mediante una función de distribución acumulativa (FDA). La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria *X*, designada por $p(x)$, es la probabilidad de que *X* tome un valor de *x*, y la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria *X*, designada por $F(x)$, es la probabilidad de que *X* tome un valor inferior o igual a *x*. La FDP y la FDA están relacionadas de la siguiente manera:

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right] \tag{1a}$$

o:

$$F(x) = \int_c^x p(t)\ \mathrm{d}t \tag{1b}$$

donde *c* es el límite inferior de la integración.

Las siguientes distribuciones de probabilidad son las más importantes para el análisis de la propagación de las ondas radioeléctricas:

– distribución de probabilidad normal o gaussiana;
– distribución de probabilidad log-normal;
– distribución de probabilidad de Rayleigh;
– distribución de probabilidad combinada log-normal y de Rayleigh;
– distribución de probabilidad de Nakagami-Rice (Nakagami-n);
– distribución de probabilidad gamma y distribución de probabilidad exponencial;
– distribución de probabilidad *m* de Nakagami (Nakagami-m);
– distribución de probabilidad χ^2 de Pearson;
– distribución de probabilidad de Weibull.

3 Distribución de probabilidad normal

La distribución de probabilidad normal (gaussiana) de una variable aleatoria de propagación se encuentra generalmente cuando una variable aleatoria es la suma de un gran número de otras variables aleatorias.

La distribución de probabilidad normal (gaussiana) es una distribución de probabilidad continua en el intervalo $x = -\infty$ a $+\infty$. La función de densidad de probabilidad (FDP), $p(x)$, de una distribución normal es:

$$p(x) = k\, e^{-T(x)} \tag{2}$$

donde $T(x)$ es un polinomio de segundo grado no negativo de la forma $\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$, donde m y σ son la media y la desviación típica, respectivamente, de la distribución de probabilidad normal, y k se selecciona para que $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$. Entonces $p(x)$ es:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \tag{3}$$

Una distribución de probabilidad normal estándar se define como $m = 0$ y $\sigma = 1$. La función de distribución acumulativa (FDA), $F(x)$, de una distribución de probabilidad normal es:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt \tag{3a}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3b}$$

donde:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \exp(-t^2)\, dt \tag{3c}$$

Entonces, la FDA de una distribución de probabilidad normal con $m \neq 0$ y/o $\sigma \neq 1$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt = F\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{3d}$$

La función de distribución acumulativa complementaria (FDAC), $\mathrm{Q}(x)$, de una distribución de probabilidad normal estándar es:

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \tag{4a}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{4b}$$

donde:

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-t^2\right) dt \tag{4c}$$

Entonces, la FDAC de una distribución de probabilidad normal con $m \neq 0$ y/o $\sigma \neq 1$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x-m)/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{4d}$$

Obsérvese que $F(x) + \mathrm{Q}(x) = 1$, $F(-x) = \mathrm{Q}(x)$ y $\mathrm{erf}(x) + \mathrm{erfc}(x) = 1$.

La función de distribución acumulativa inversa $x = F^{-1}(p)$ es el valor de x para que $F(x) = p$; y la función de distribución acumulativa complementaria inversa $x = \mathrm{Q}^{-1}(p)$ es el valor de x para que $\mathrm{Q}(x) = p$.

Obsérvese que de la ecuación (4b), $Q^{-1}(p) = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2p)$, y que de la ecuación (3b), $F^{-1}(p) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)$.

Las líneas continuas de la Fig. 1 representan las funciones $p(x)$ y $F(x)$, siendo $m = 0$ y $\sigma = 1$ y el Cuadro 1 muestra la correspondencia entre x y $1 - F(x)$ para varios valores de x y $1 - F(x)$.

CUADRO 1

x	$1 - F(x)$	x	$1 - F(x)$
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1{,}350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3{,}167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2{,}867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9{,}866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

La siguiente aproximación de $\mathrm{Q}(x) = 1 - F(x)$ tiene un error relativo de aproximación inferior a $7{,}5 \times 10^{-8}$:

$$Q(x) \approx \begin{cases} 1 - T(-x), & x < 0 \\ T(x), & x \geq 0 \end{cases} \tag{5a}$$

donde:

$$T(x) = Z \times \left(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\right) \tag{5b}$$

y:

$$b_1 = 0{,}319381530$$
$$b_2 = -0{,}356563782$$
$$b_3 = 1{,}781477937$$
$$b_4 = -1{,}821255978$$
$$b_5 = 1{,}330274429$$
$$a = 0{,}2316419$$
$$t = \frac{1}{1 + a\,x}$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

La siguiente aproximación de $x = Q^{-1}(p)$ tiene un error absoluto de aproximación inferior a $1{,}2 \times 10^{-9}$:

$$Q^{-1}(p) \approx \begin{cases} -U^{-1}(p), & 0 < p \leq 0{,}5 \\ U^{-1}(q), \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} & 0{,}5 < p < 1 \end{cases} \tag{5c}$$

Para $0 \leq p \leq 0{,}02425$, el valor de $U^{-1}(p)$ puede calcularse de la siguiente manera:

$$t = \sqrt{-2\ln(p)}$$

$$U^{-1}(p) = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + C_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4} \tag{5d}$$

siendo

$$c_0 = 2{,}938163982698783$$
$$c_1 = 4{,}374664141464968$$
$$c_2 = -2{,}549732539343734$$
$$c_3 = -2{,}400758277161838$$
$$c_4 = -0{,}3223964580411365$$
$$c_5 = -0{,}007784894002430293$$

y

$$d_1 = 3{,}754408661907416$$
$$d_2 = 2{,}445134137142996$$
$$d_3 = 0{,}3224671290700398$$
$$d_4 = 0{,}007784695709041462$$

Para $0{,}02425 < p \leq 0{,}5$, el valor de $U^{-1}(p)$ puede calcularse de la siguiente manera:

$$t = (p - 0{,}5)^2$$

$$U^{-1}(p) = (p - 0{,}5)\,\frac{\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5\}}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5} \tag{5e}$$

siendo

$$a_0 = 2{,}506628277459239$$
$$a_1 = -30{,}66479806614716$$
$$a_2 = 138{,}3577518672690$$
$$a_3 = -275{,}9285104469687$$
$$a_4 = 220{,}9460984245205$$
$$a_5 = -39{,}69683028665376$$

y

$$b_1 = -13{,}28068155288572$$
$$b_2 = 66{,}80131188771972$$
$$b_3 = -155{,}6989798598866$$
$$b_4 = 161{,}5858368580409$$
$$b_5 = -54{,}47609879822406$$

Las ecuaciones (5d) y (5e) pueden utilizarse para calcular el $U^{-1}(q)$ de la ecuación (5c) considerando q como p de las ecuaciones (5d) y (5e).

Cabe señalar que el valor de $Q^{-1}(p)$ obtenido de la ecuación (5c) tiende a ∞ y $-\infty$ cuando p tiende a 0 y 1, respectivamente, lo que se atribuye al término $ln(p)$ en la ecuación (5d).

Si se desea, puede reducirse el error de aproximación en $Q^{-1}(p)$ como sigue: sea $x_0 = Q^{-1}(p)$ en la ecuación (5c), entonces:

$$x = x_0 - \sqrt{2\pi}\,\exp\left(\frac{x_0^2}{2}\right)\left(p - Q(x_o)\right) \tag{5f}$$

Los paquetes informáticos matemáticos más modernos incluyen las funciones de probabilidad $F(x)$, $\mathrm{Q}(x)$, $\mathrm{erf}\,(x)$, $\mathrm{erfc}(\mathrm{x})$ y sus inversas.

En la propagación, la mayoría de las magnitudes físicas que intervienen (potencia, tensión, duración de un desvanecimiento, etc.) son magnitudes esencialmente positivas, y no pueden representarse directamente mediante una distribución de probabilidad normal. La distribución de probabilidad normal se utiliza en dos casos importantes:

– para representar las fluctuaciones de una variable aleatoria alrededor de su valor medio (por ejemplo, desvanecimientos e intensificaciones por centelleo);

– para representar las fluctuaciones del logaritmo de una variable aleatoria, en cuyo caso la variable tiene una distribución de probabilidad log-normal (véase el § 4).

Existen en el comercio diagramas en los que una de las coordenadas tiene la forma denominada normal, donde una distribución de probabilidad normal acumulativa se representa mediante una recta. Estos diagramas se utilizan mucho, incluso para representar distribuciones de probabilidad que no son normales.

4 Distribución de probabilidad log-normal

La distribución de probabilidad log-normal es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria positiva X cuyo logaritmo natural tiene una distribución de probabilidad normal. La función de densidad de probabilidad, $p(x)$, y la función de distribución acumulativa, $F(x)$, son:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{7}$$

donde m y σ son el valor medio y la desviación típica del logaritmo de X (es decir, no son el valor medio y la desviación típica de X).

La distribución de probabilidad log-normal se encuentra a menudo en distribuciones de probabilidad de propagación relacionadas con un nivel de potencia o de intensidad de campo. Como la potencia y la intensidad de campo suelen estar expresadas en decibelios, se hace referencia a veces incorrectamente a sus distribuciones de probabilidad como normales y no como log-normales. En el caso de las distribuciones de probabilidad relacionadas con el tiempo (por ejemplo, la duración de la atenuación en segundos), siempre se utiliza explícitamente el término log-normal porque la variable dependiente natural es el tiempo y no su logaritmo.

Como la inversa de una variable que tiene una distribución de probabilidad log-normal tiene también una distribución de probabilidad log-normal, ésta se encuentra en el caso de la distribución de probabilidad de la intensidad de cambio (por ejemplo, la variación de la atenuación en dB/s o la intensidad de la lluvia en mm/h).

Frente a la distribución de probabilidad normal, una distribución de probabilidad log-normal se encuentra habitualmente cuando los valores de la variable aleatoria considerada son el resultado del producto de otras variables aleatorias ponderadas de manera aproximadamente igual.

A diferencia de la distribución de probabilidad normal, una distribución de probabilidad log-normal es extremadamente asimétrica. En particular, el valor medio, el valor mediano y el valor más probable (a menudo denominado moda) no son idénticos (véanse las líneas de puntos de la Fig. 1).

Los valores característicos de la variable aleatoria X son:

– valor más probable: $\exp\,(m - \sigma^2)$;

– valor mediano: $\exp\,(m)$;

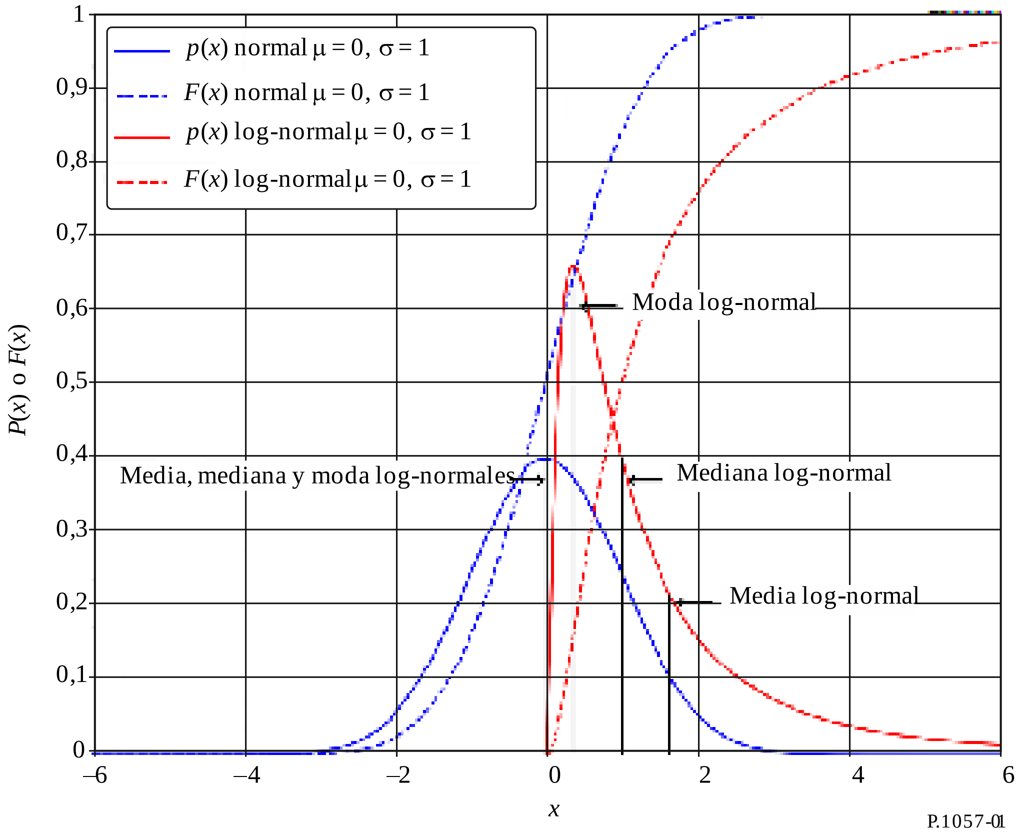
– valor medio: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$;

– valor cuadrático medio: $\exp\,(m + \sigma^2)$;

– desviación típica: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\,(\sigma^2) - 1}$.

FIGURA 1

Distribución de probabilidad normal y log-normal



5 Distribución de probabilidad de Rayleigh

La distribución de probabilidad de Rayleigh es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria positiva. Por ejemplo, dada una distribución de probabilidad normal bidimensional con dos variables aleatorias independientes y y z, de media cero y con la misma desviación típica σ, la variable aleatoria:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

tiene una distribución de probabilidad de Rayleigh. La distribución de probabilidad de Rayleigh también representa la distribución de probabilidad de la longitud de un vector que es el vector suma de un gran número de vectores componentes de amplitudes similares donde las fases de cada vector componente tiene una distribución de probabilidad uniforme.

La función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulativa de una distribución de probabilidad de Rayleigh vienen dadas por:

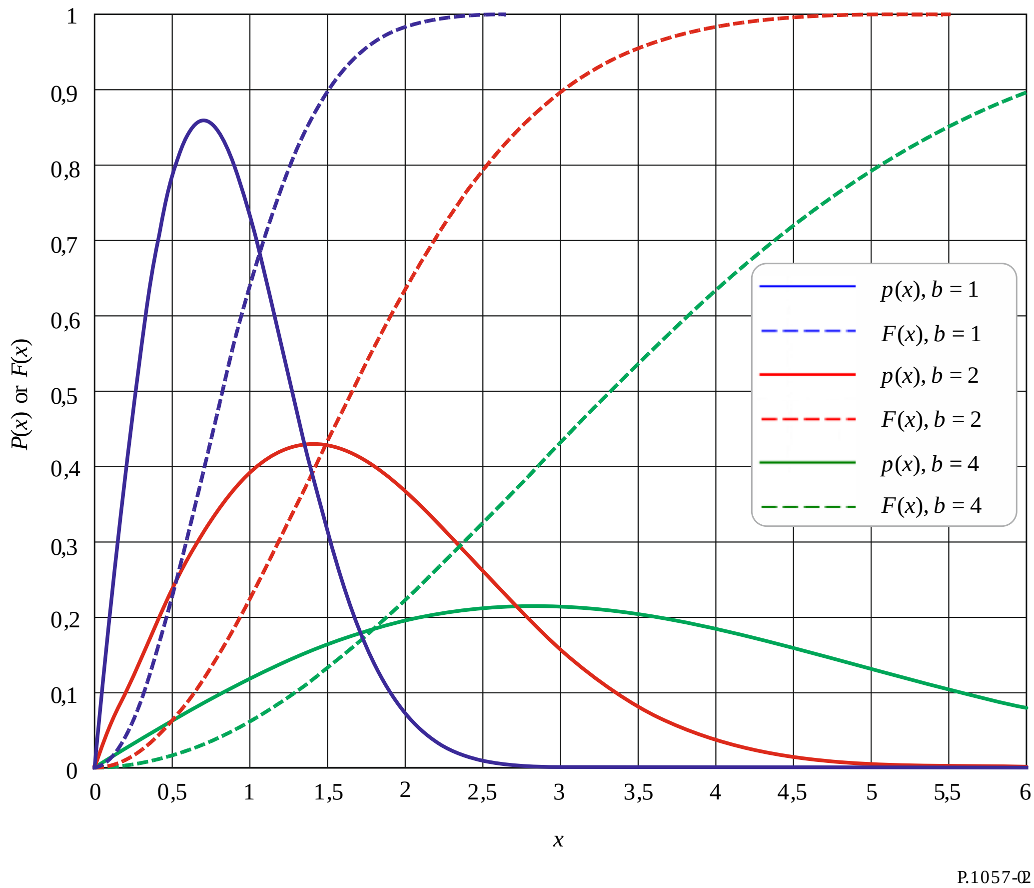
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

La Fig. 2 proporciona ejemplos de $p(x)$ y $F(x)$ para tres valores distintos de b.

FIGURA 2

Distribución de probabilidad de Rayleigh



Siendo $b = \sigma\sqrt{2}$, los valores característicos de la variable X son los siguientes:

– valor más probable: $\frac{b}{\sqrt{2}}$;

– valor mediano: $b\sqrt{\ln 2} = 0{,}833b$;

– valor medio: $\frac{b}{2}\sqrt{\pi} \approx 0{,}886b$;

– valor cuadrático medio: b;

– desviación típica: $b\sqrt{1-\frac{\pi}{4}} = 0{,}463b$.

La distribución de probabilidad de Rayleigh es a menudo aplicable para valores bajos de x. En ese caso, la función de distribución acumulativa, $F(x)$, puede aproximarse con:

$$F(x) \approx \frac{x^2}{b^2} \tag{11}$$

Esta expresión aproximada puede interpretarse de la siguiente manera: la probabilidad de que la variable aleatoria X tenga un valor inferior a x es proporcional al cuadrado de x. Si la variable considerada es una tensión, su cuadrado representa la potencia de la señal. En otros términos, en una escala en decibelios, la potencia disminuye 10 dB por cada década de probabilidad. Esta propiedad se utiliza a menudo para determinar si un nivel recibido tiene una distribución de probabilidad de Rayleigh asintótica. Cabe observar, sin embargo, que otras distribuciones de probabilidad pueden tener el mismo comportamiento.

En la propagación de ondas radioeléctricas, una distribución de probabilidad de Rayleigh se produce en el análisis de la dispersión causada por múltiples dispersores independientes y situados aleatoriamente en los cuales no domina ninguna componente única de dispersión.

6 Distribución de probabilidad combinada log-normal y de Rayleigh

En ciertos casos, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria puede considerarse como la combinación de dos distribuciones de probabilidad: una distribución de probabilidad log-normal para las variaciones a largo plazo (es decir, lentas) y una distribución de probabilidad de Rayleigh para las variaciones a corto plazo (es decir, rápidas). Esta distribución de probabilidad ocurre en los análisis de propagación de ondas radioeléctricas cuando la falta de homogeneidad del medio de propagación tiene variaciones significativas a largo plazo, como, por ejemplo, en la dispersión troposférica.

La distribución de probabilidad instantánea de la variable aleatoria se obtiene considerando una distribución de probabilidad de Rayleigh cuyo valor medio (o valor cuadrático medio) es en sí una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad log-normal.

La función de densidad de probabilidad de la distribución de probabilidad combinada log-normal y de Rayleigh es:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right) du \qquad (12a)$$

y la función de distribución acumulativa complementaria de la distribución de probabilidad combinada log-normal y de Rayleigh es:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - \frac{u^2}{2}\right) du \qquad (12b)$$

donde, m y σ, en neperios, son respectivamente el valor medio y la desviación típica de la distribución de probabilidad normal asociada con la distribución log-normal.

El valor de k depende de la interpretación de σ y m:

1) si σ y m son la desviación típica y la media del logaritmo natural del valor más probable de la distribución de probabilidad de Rayleigh, $k = 1/2$;

2) si σ y m son la desviación típica y la media del logaritmo natural del valor mediano de la distribución de probabilidad de Rayleigh, $k = \ln 2$;

3) si σ y m son la desviación típica y la media del logaritmo natural del valor medio de la distribución de probabilidad de Rayleigh, $k = \pi/4$; y

4) si σ y m son la desviación típica y la media del logaritmo natural del valor cuadrático medio de la distribución de probabilidad de Rayleigh, $k = 1$.

El valor medio (E), el valor cuadrático medio (RMS), la desviación típica (SD), la mediana y el valor más probable de la distribución de probabilidad combinada log-normal y Rayleigh son los siguientes:

Valor medio, *E*

$$E = \int_0^\infty x\sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\left[\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-kx^2[-2(\sigma u+m)] - 2(\sigma u+m) - \frac{u^2}{2}\right)du\right]dx \qquad (13a)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right) \qquad (13b)$$

Valor cuadrático medio, *RMS*

$$RMS = \sqrt{\int_0^\infty x^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\left[\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-kx^2\exp[-2(\sigma u+m)] - 2(\sigma u+m) - \frac{u^2}{2}\right)du\right]dx} \qquad (13c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\exp\left(m+\sigma^2\right) \qquad (13d)$$

Desviación típica, *SD*

$$SD = \sqrt{\frac{1}{k}\exp\big(2(m+\sigma^2)\big) - \frac{\pi}{4k}\exp\left(2\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)} \qquad (13e)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp(\sigma^2) - \frac{\pi}{4}} \qquad (13f)$$

Valor mediano

El valor mediano es el valor de *x* que es la solución de:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-kx^2\exp\big(-2(\sigma u+m)\big) - \frac{u^2}{2}\right)du \qquad (13g)$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-kx^2\exp\big(-2(\sigma u+m)\big) - \frac{u^2}{2}\right)du \qquad (13h)$$

Valor más probable

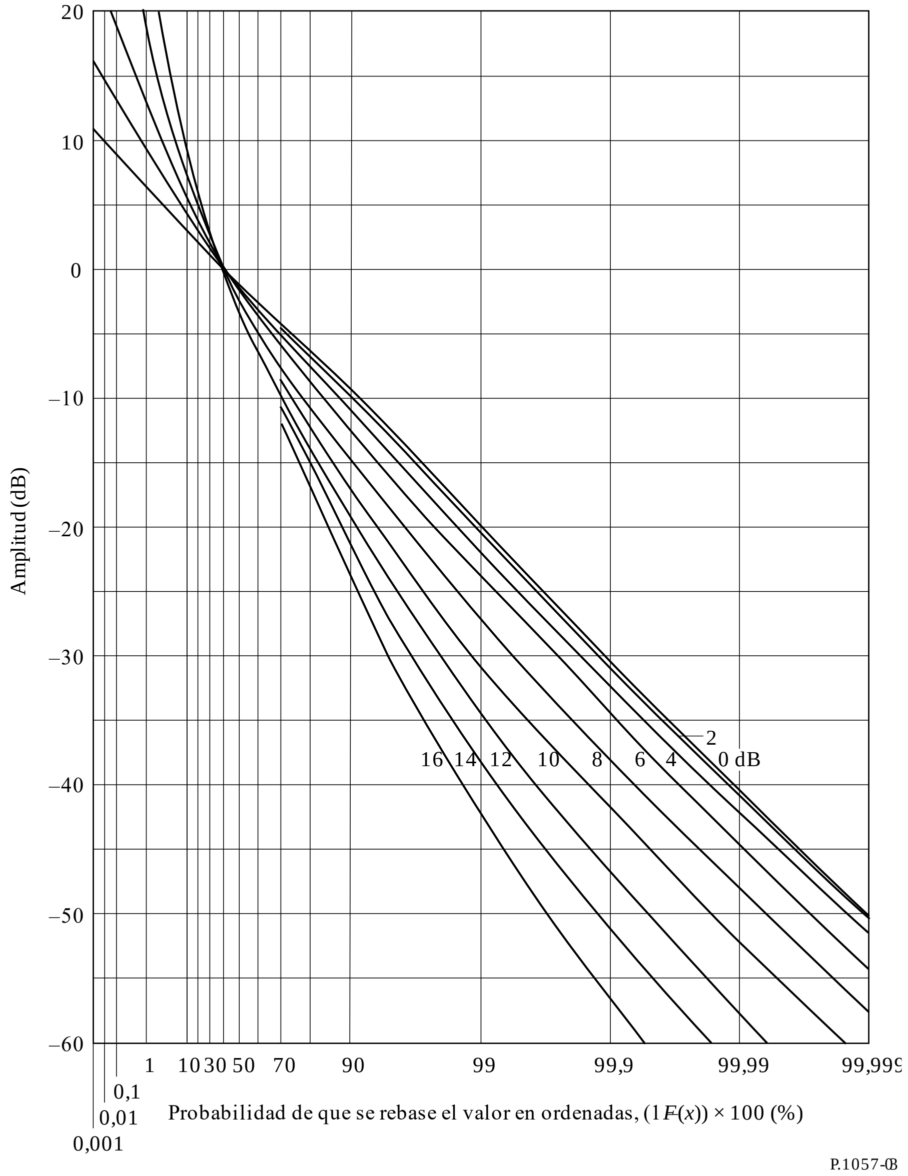
El valor más probable (es decir, el modo) es el valor de x que representa la solución de:

$$\int_{-\infty}^\infty \left\{1-2kx^2\exp[-2(\sigma u+m)]\right\}\exp\left\{-kx^2\exp[-2(\sigma u+m)] - 2(\sigma u+m) - \frac{u^2}{2}\right\}\mathrm{d}u = 0 \qquad (13i)$$

La Fig. 3 muestra una representación gráfica de esta distribución de probabilidad para varios valores de la desviación típica, donde $m = 0$, y $k = 1$.

FIGURA 3

Distribución de probabilidad combinada log-normal y de Rayleigh (con la desviación típica de la distribución de probabilidad log-normal como parámetro)



7 Distribución de probabilidad de Nakagami-Rice (Nakagami-n)

La distribución de probabilidad de Nakagami- Rice (Nakagami-n), que es diferente de la distribución de probabilidad *m* de Nakagami (Nakagami-m), es una generalización de la distribución de probabilidad de Rayleigh. Puede considerarse como la distribución de probabilidad de la longitud de un vector que es la suma de un vector fijo y de un vector cuya longitud tiene una distribución de probabilidad de Rayleigh.

De forma alternativa, dada una distribución de probabilidad normal bidimensional con dos variables independientes x e y, con la misma desviación típica σ, la longitud de un vector que une un punto de la distribución de probabilidad con un punto fijo, diferente del centro de la distribución de probabilidad, tiene una distribución de probabilidad de Nakagami-Rice.

Si a indica la longitud del vector fijo, y σ la longitud más probable del vector de Rayleigh, la función de densidad de probabilidad es:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

donde I_0 es la función de Bessel modificada de primera especie y de orden cero.

Esta distribución de probabilidad depende de la relación entre la amplitud del vector fijo a y la amplitud cuadrática media del vector aleatorio, $\sigma\sqrt{2}$. Existen dos aplicaciones principales de ondas radioeléctricas como se indica a continuación:

a) La potencia del vector fijo es constante, pero varía la potencia total de las componentes fija y aleatoria es una distribución de probabilidad aleatoria.

Si se estudia la influencia de un rayo reflejado por una superficie rugosa, o si se consideran las componentes por trayectos múltiples además de la componente fija, la potencia media viene dada por ($a^2 + 2\sigma^2$).

Esta distribución de probabilidad suele definirse en términos de un parámetro K:

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{dB} \tag{15}$$

que es la relación entre las potencias del vector fijo y de la componente aleatoria.

b) La potencia total de las componentes fija y aleatoria es constante, pero varían ambas componentes.

Si se estudia la propagación por trayectos múltiples a través de la atmósfera, se puede considerar que la suma de la potencia transportada por el vector fijo y de la potencia media transportada por el vector aleatorio es constante, puesto que la potencia transportada por el vector aleatorio proviene del vector fijo. Tomando la potencia total como unidad, entonces:

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1 \tag{16}$$

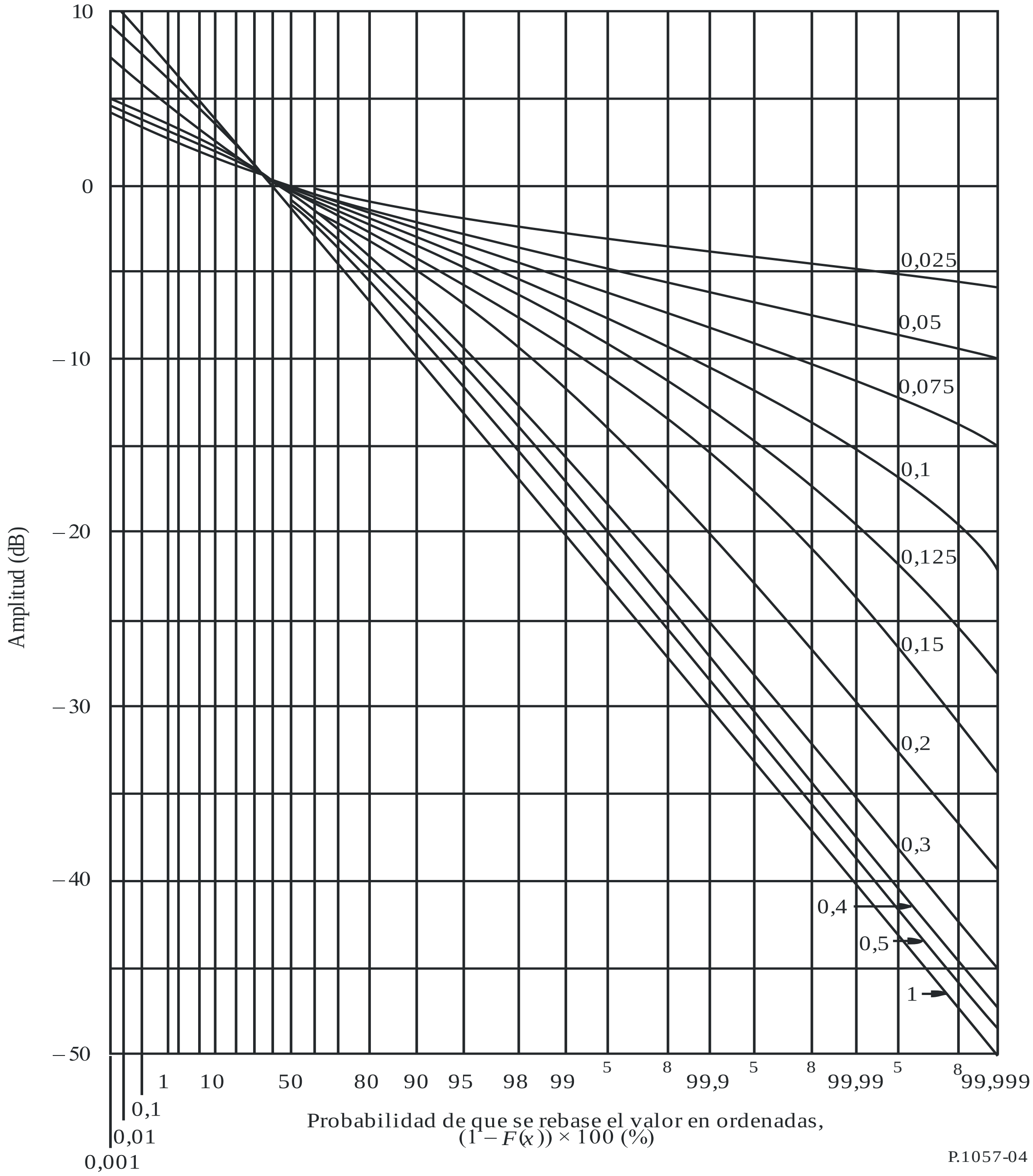
y la fracción de la potencia total transportada por el vector aleatorio es, pues, igual a $2\,\sigma^2$. Si X es la variable aleatoria del vector resultante, la probabilidad de que la variable aleatoria X sea mayor que x es:

$$\text{Prob}\ (X > x) = 1 - F(x) = 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \tag{17}$$

La Fig. 4 muestra esta distribución de probabilidad para diferentes valores de la fracción de potencia transportada por el vector aleatorio.

FIGURA 4

Distribución de probabilidad de Nakagami-Rice para una potencia total constante (con la fracción de potencia transportada por el vector aleatorio como parámetro)



Para las aplicaciones prácticas, se muestran las amplitudes en una escala en decibelios y, las probabilidades en una escala donde la distribución de probabilidad de Rayleigh acumulativa se representa mediante una recta. Para los valores de la fracción de potencia total del vector aleatorio superior a 0,5 aproximadamente, las curvas se acercan asintóticamente a una distribución de probabilidad de Rayleigh porque el vector fijo tiene una amplitud del mismo orden de magnitud que la del vector aleatorio y prácticamente ya no se distingue el vector fijo de del vector aleatorio. En cambio, para pequeños valores de esta fracción de la potencia total del vector aleatorio, la distribución de probabilidad de la amplitud tiende hacia una distribución de probabilidad normal.

Si bien la amplitud presenta una distribución de probabilidad de Nakagami-Rice, la función de densidad de probabilidad de la fase es:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a\cos\theta}{\sigma}\,e^{\frac{a^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\right\}\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \qquad (18)$$

8 Distribución de probabilidad gamma y distribución de probabilidad exponencial

Contrariamente a las distribuciones de probabilidad anteriores que derivan de una distribución de probabilidad normal, la distribución de probabilidad gamma es una generalización de la distribución exponencial, de la que constituye una generalización. Es la distribución de probabilidad de una variable positiva y no limitada. La función de densidad de probabilidad es:

$$p(x) = \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-\alpha x} \qquad (19)$$

donde Γ es la función de Euler de segundo orden.

Esta función de distribución acumulativa depende de dos parámetros α y ν. Sin embargo, α es sólo un parámetro de escala de la variable *x*. Los valores característicos de la variable aleatoria *X* son:

– valor medio: $\frac{\nu}{\alpha}$

– valor cuadrático medio: $\frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– desviación típica: $\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

La integral que expresa la función de distribución acumulativa no puede evaluarse en forma cerrada, salvo para valores enteros de ν. A continuación, se muestran desarrollos de series para dos casos especiales:

Una aproximación mediante una serie con $x \ll 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^{\nu}\left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)\,(\nu+2)} + \ldots.\right] \qquad (20)$$

Una aproximación asintótica con $x \gg 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^{\nu-1}\left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + \ldots.\right] \qquad (21)$$

Para ν igual a la unidad, $F(x)$ se vuelve una distribución de probabilidad exponencial. Para ν entero, el desarrollo asintótico posee un número fijo de términos y da la distribución de probabilidad gamma en forma explícita.

En la propagación de las ondas radioeléctricas, los valores útiles de ν son los valores muy bajos, del orden de 1×10^{-2} a 1×10^{-4}. Para ν próximo a cero:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu \qquad (22)$$

en este caso, para $\alpha\, x > 0{,}03$:

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha\, x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \qquad (23)$$

Para el cálculo práctico, se puede aproximar la integral anterior:

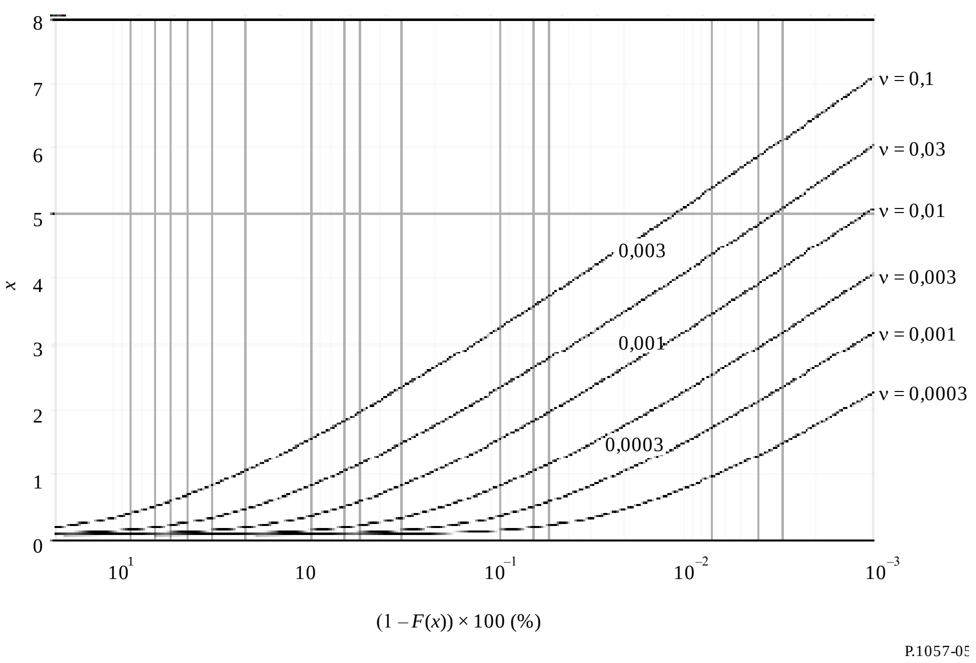
$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha\, x}}{0{,}68 + \alpha\, x + 0{,}28 \log \alpha\, x} \qquad (24)$$

que es válida para $\nu < 0{,}1$ y $\alpha\, x > 0{,}03$.

La función de distribución acumulativa de la función gamma complementaria para pequeños valores de ν se muestra en la Fig. 5. La probabilidad de que la variable X sea significativamente superior a cero es siempre pequeña. Esto explica en particular el empleo de la distribución de probabilidad gamma para representar la intensidad de lluvia, puesto que el porcentaje total de tiempo de lluvia es en general del orden de 2 a 10%.

FIGURA 5

Distribución de probabilidad gamma
α = 1, ν ≤ 0,1



9 Distribución de probabilidad *m* de Nakagami (Nakagami-m)

La distribución de probabilidad *m* de Nakagami se aplica a una variable positiva no limitada. La función de densidad de probabilidad es:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\,\Omega^m}\, x^{2m-1}\, e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{25}$$

Ω es un parámetro de escala que es igual al valor medio de x^2, es decir:

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{26}$$

donde *m* es un parámetro de la distribución de probabilidad *m* de Nakagami y no un valor medio como en las secciones anteriores de este Anexo.

Esta distribución de probabilidad tiene relación con otras distribuciones de probabilidad:

– si una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad *m* de Nakagami, el cuadrado de esta variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad gamma;

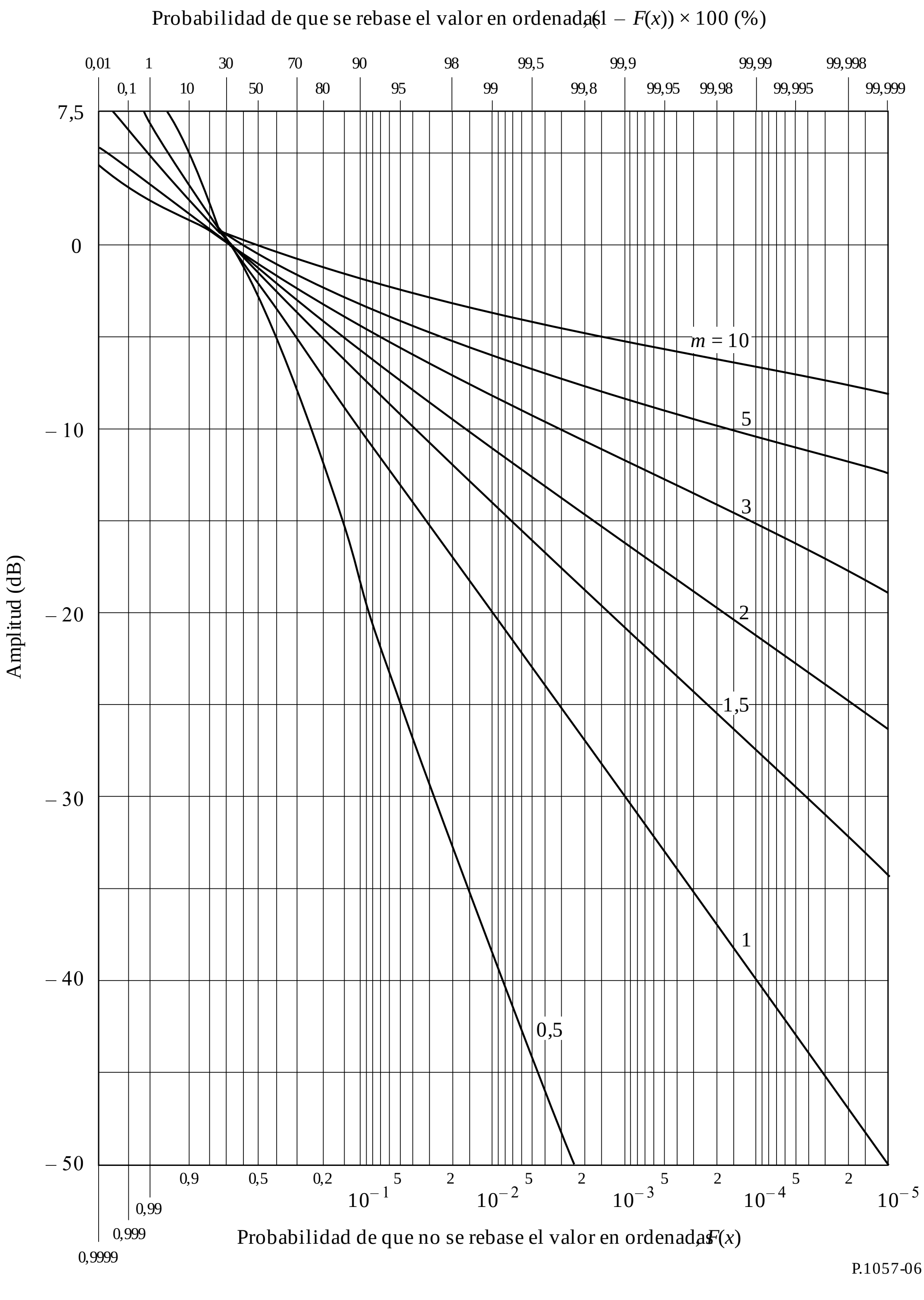
– para $m = 1$, la distribución de probabilidad *m* de Nakagami es una distribución de probabilidad de Rayleigh;

– para $m = 1/2$, la distribución de probabilidad *m* de Nakagami es una distribución de probabilidad normal unilateral.

La distribución de probabilidad *m* de Nakagami y la distribución de probabilidad de Nakagami-Rice son dos generalizaciones diferentes de la distribución de probabilidad de Rayleigh. Para señales de niveles muy bajos, la pendiente de la distribución de probabilidad *m* de Nakagami tiende hacia un valor que depende del parámetro *m* contrariamente a la distribución de probabilidad de Nakagami-Rice, en la cual, la pendiente límite es siempre la misma (10 dB por década de probabilidad). La Fig. 6 muestra la distribución de probabilidad acumulativa *m* de Nakagami para diversos valores del parámetro *m*.

FIGURA 6

Distribución de probabilidad *m* de Nakagami ($\overline{x^2} = 1$)



10 Distribución de probabilidad χ^2 de Pearson

La función de densidad de probabilidad $\chi 2$ de Pearson es:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\; e^{\frac{-\chi^2}{2}}\,(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \tag{27}$$

donde χ^2 es una variable positiva e ilimitada; el parámetro ν, un número entero positivo, es el número de grados de libertad de la distribución de probabilidad. Γ representa la función de Euler de segundo orden. Según la paridad de ν se tiene:

$$\nu \text{ par:} \qquad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)! \tag{28}$$

$$\nu \text{ impar:} \quad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{29}$$

La función de distribución acumulativa es:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\, \mathrm{d}t \tag{30}$$

El valor medio y la desviación típica son:

$$m = \nu \tag{31}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \tag{32}$$

Una propiedad esencial de la distribución de probabilidad χ^2 es que, si n variables x_i {i=1, 2, …, n} tienen distribuciones de probabilidad de Gauss con una media m_i y una desviación típica σ_i, la variable:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{33}$$

tiene una distribución de probabilidad χ^2 con n grados de libertad. En particular, el cuadrado de una variable de Gauss tipificada tiene una distribución de probabilidad χ^2 con un grado de libertad.

Si varias variables independientes tienen distribuciones de probabilidad χ^2, su suma tiene también una distribución de probabilidad χ^2 con un número de grados de libertad igual a la suma de los grados de libertad de cada una de las variables.

La distribución de probabilidad χ^2 no es esencialmente distinta de la distribución de probabilidad gamma. Las dos distribuciones de probabilidad están relacionadas:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha\, x \tag{34}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{35}$$

Asimismo, la distribución de probabilidad χ^2 está relacionada con la distribución de probabilidad *m* de Nakagami por:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega}\, x^2 \tag{36}$$

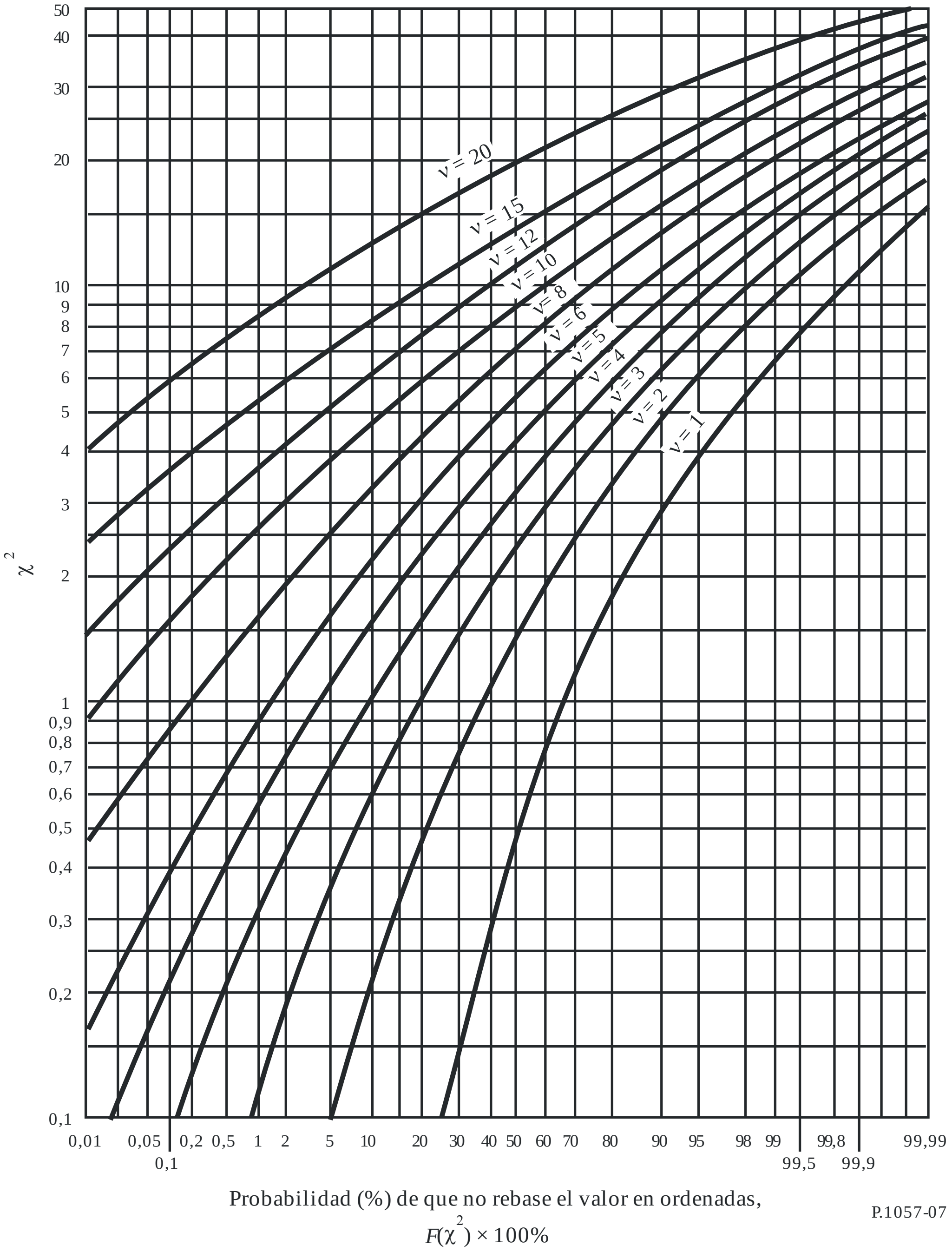
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{37}$$

La distribución de probabilidad χ^2 se utiliza en pruebas estadísticas que sirven para determinar si un conjunto de valores experimentales de una magnitud (por ejemplo, intensidad de lluvia, atenuación, etc.) puede modelizarse con una distribución de probabilidad estadística dada.

La Fig. 7 muestra una representación gráfica de la distribución de probabilidad χ^2 para varios valores de ν.

FIGURA 7

Distribución de probabilidad χ^2



11 Distribución de probabilidad de Weibull

La distribución de probabilidad de Weibull es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria positiva.

La función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulativa de una distribución de probabilidad de Weibull se obtienen con la ecuación:

$$p(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad x \geq 0 \tag{38}$$

$$F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_0^x \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{39}$$

donde $k > 0$ es el parámetro forma y $\lambda > 0$ es el parámetro escala de la distribución.

Su función de distribución acumulativa complementaria es una función de estiramiento exponencial:

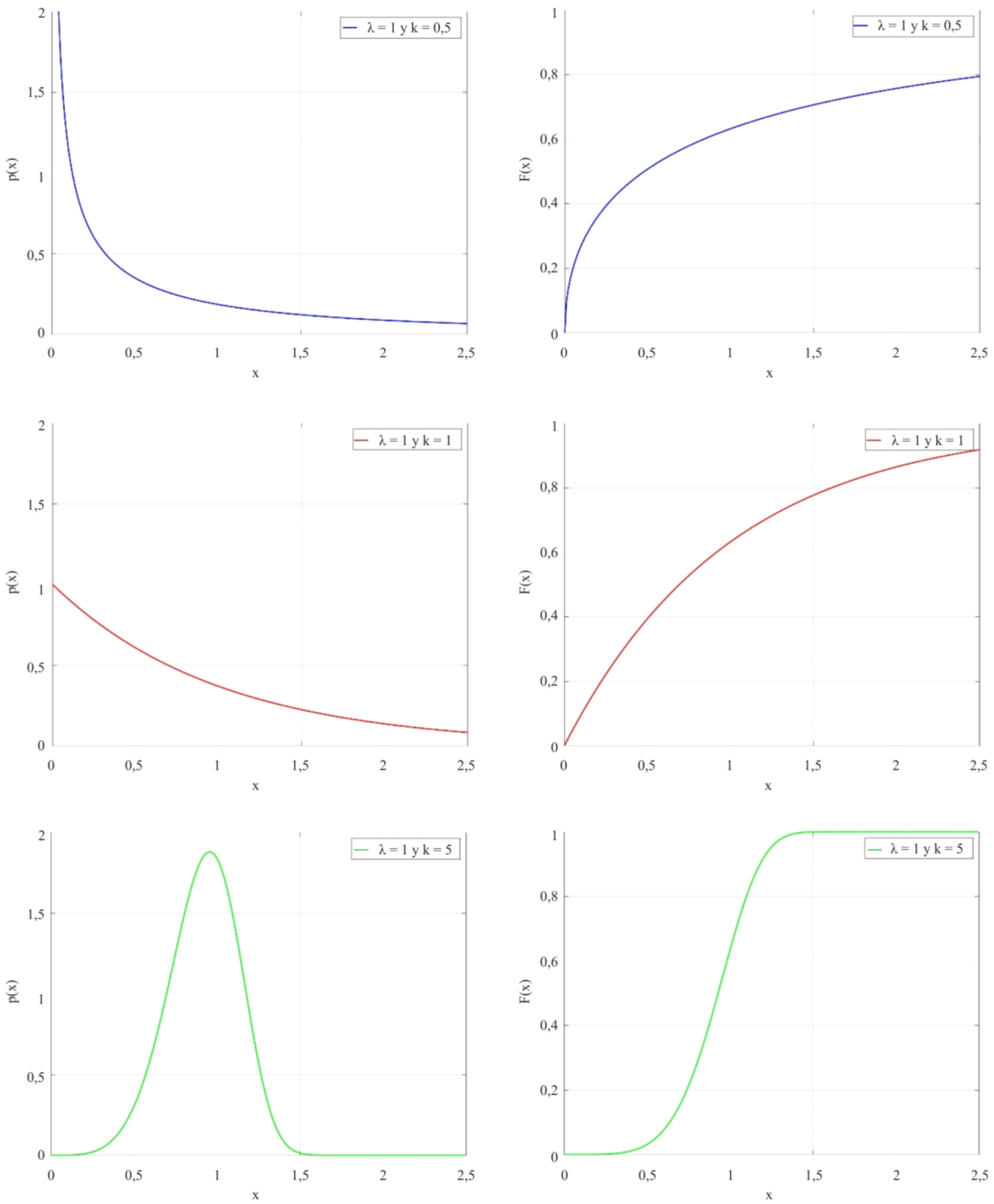
$$G(x) = 1 - F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_x^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = e^{-(x/\lambda)^k} \tag{40}$$

La distribución de Weibull es una interpolación entre la distribución exponencial $(k = 1)$ y la distribución de Rayleigh ($k = 2$ y $\lambda = \sqrt{2}\sigma$).

En la Fig. 8 se dan ejemplos de $p(x)$ y $F(x)$ para $\lambda = 1$ y tres valores de k distintos.

FIGURA 8

Distribución de probabilidad Weibull



P.1057-08

Los valores característicos de la variable aleatoria X tras una distribución de probabilidad de Weibull son:

– valor más probable: $\begin{cases} \lambda\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/k} & k > 1 \\ 0 & k \leq 1 \end{cases}$

– valor mediano: $\lambda(\ln 2)^{1/k}$

– valor medio: $\lambda\Gamma(1 + 1/k)$

– valor cuadrático medio: $\lambda\sqrt{\Gamma(1 + 2/k)}$

– desviación típica: $\lambda\sqrt{\Gamma(1 + 2/k) - \left(\Gamma(1 + 1/k)\right)^2}$

En la propagación de ondas radioeléctricas, la distribución de probabilidad de Weibull puede darse en el análisis del oxígeno, el vapor de agua y la velocidad del viento.

Anexo 2

Procedimiento paso a paso para aproximar una distribución acumulativa complementaria mediante una distribución acumulativa complementaria log-normal

1 Antecedentes

La distribución acumulativa log-normal se define como:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \quad (41)$$

o equivalentemente:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t \quad (42)$$

De modo similar, la distribución acumulativa complementaria log-normal se define como:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \tag{43}$$

o equivalentemente:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t$$

$$= Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right) \tag{44}$$

donde $Q(.)$ es la integral de la probabilidad acumulativa complementaria normal. Los parámetros m y σ pueden estimarse a partir del conjunto de n pares (G_i,x_i) tal como se describe en el párrafo siguiente.

2 Procedimiento

Estimar los dos parámetros logarítmico-normales m y σ como sigue:

Paso 1: Construir el conjunto de n pares (G_i,x_i), donde G_i es la probabilidad de que x_i sea rebasado.

Paso 2: Transformar el conjunto de n pares de (G_i,x_i) en $(Z_i, \ln x_i)$, donde:

$Z_i = \sqrt{2}\operatorname{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(1 - 2G_i)$ o, de modo equivalente, $Z_i = \mathrm{Q}^{-1}(G_i)$

Paso 3: *D*eterminar las variables m y σ realizando un ajuste de mínimos cuadrados a la función lineal:

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

como sigue:

$$\sigma = \frac{n \sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n \sum_{i=1}^{n} Z_i^{\,2} - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i \right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

Anexo 3

Procedimiento paso a paso para aproximar una distribución acumulativa complementaria mediante una distribución acumulativa complementaria de Weibull

1 Antecedentes

La distribución acumulativa de Weibull se define como:

$$F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_{0}^{x}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{45}$$

Del mismo modo, la distribución acumulativa complementaria de Weibull se define como:

$$G(x) = \frac{k}{\lambda}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt$$

$$G(x) = e^{-(x/\lambda)^k} \tag{46}$$

Los parámetros λ (escala) y k (forma) pueden estimarse a partir del conjunto de n pares (G_i, x_i) descrito en el apartado siguiente.

2 Procedimiento

Estimar los dos parámetros de Weibull, λ (escala) y k (forma), de la siguiente manera:

Paso 1: Construir el conjunto de n pares (G_i, x_i), donde G_i es la probabilidad de que x_i sea rebasado.

Paso 2: Transformar el conjunto de n pares de (G_i, x_i) a (Z_i, ln x_i), donde:

$$Z_i = \ln(-\ln G_i)$$

Paso 3: Determinar las variables a y b realizando un ajuste de mínimos cuadrados a la función lineal:

$$\ln x_i = aZ_i + \mathrm{b}$$

como sigue:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - a\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

Paso 4: Calcular los parámetros λ y k de la siguiente manera:

$$\lambda = e^{b}$$

$$k = \frac{1}{a}$$

____