Union internationale des télécommunications

UIT-R

Secteur des Radiocommunications de l'UIT

Recommandation UIT-R P.1057-7

(08/2022)

Distributions de probabilité et modélisation de la propagation des ondes radioélectriques

Série P

Propagation des ondes radioélectriques

Avant-propos

Le rôle du Secteur des radiocommunications est d’assurer l’utilisation rationnelle, équitable, efficace et économique du spectre radioélectrique par tous les services de radiocommunication, y compris les services par satellite, et de procéder à des études pour toutes les gammes de fréquences, à partir desquelles les Recommandations seront élaborées et adoptées.

Les fonctions réglementaires et politiques du Secteur des radiocommunications sont remplies par les Conférences mondiales et régionales des radiocommunications et par les Assemblées des radiocommunications assistées par les Commissions d’études.

Politique en matière de droits de propriété intellectuelle (IPR)

La politique de l'UIT-R en matière de droits de propriété intellectuelle est décrite dans la «Politique commune de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI en matière de brevets», dont il est question dans la Résolution UIT-R 1. Les formulaires que les titulaires de brevets doivent utiliser pour soumettre les déclarations de brevet et d'octroi de licence sont accessibles à l'adresse http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/fr, où l'on trouvera également les Lignes directrices pour la mise en oeuvre de la politique commune en matière de brevets de l'UIT-T, l'UIT-R, l'ISO et la CEI et la base de données en matière de brevets de l'UIT-R.

Séries des Recommandations UIT-R

(Egalement disponible en ligne: http://www.itu.int/publ/R-REC/fr)

Séries	Titre
BO	Diffusion par satellite
BR	Enregistrement pour la production, l'archivage et la diffusion; films pour la télévision
BS	Service de radiodiffusion sonore
BT	Service de radiodiffusion télévisuelle
F	Service fixe
M	Services mobile, de radiorepérage et d'amateur y compris les services par satellite associés
P	**Propagation des ondes radioélectriques**
RA	Radio astronomie
RS	Systèmes de télédétection
S	Service fixe par satellite
SA	Applications spatiales et météorologie
SF	Partage des fréquences et coordination entre les systèmes du service fixe par satellite et du service fixe
SM	Gestion du spectre
SNG	Reportage d'actualités par satellite
TF	Emissions de fréquences étalon et de signaux horaires
V	Vocabulaire et sujets associés

***Note**: Cette Recommandation UIT-R a été approuvée en anglais aux termes de la procédure détaillée dans la Résolution UIT-R 1.*

Publication électronique
Genève, 2023

RECOMMANDATION UIT-R P.1057-7

Distributions de probabilité et modélisation de la propagation des ondes radioélectriques

(1994-2001-2007-2013-2015-2017-2019-2022)

Champ d'application

La présente Recommandation décrit les diverses distributions de probabilité à utiliser pour la modélisation et les méthodes de prévision de la propagation des ondes radioélectriques.

Mots clés

Distributions de probabilité, normale, gaussienne, log-normale, Rayleigh, Nakagami-Rice, gamma, exponentielle, Pearson, Weibull

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

considérant

a) que la propagation des ondes radioélectriques est surtout associée à un milieu aléatoire, d'où la nécessité d'analyser les phénomènes de propagation à l'aide de méthodes statistiques;

b) que, dans la plupart des cas, il est possible de décrire de façon satisfaisante les variations dans le temps et dans l'espace des paramètres de propagation par des distributions de probabilité statistiques connues;

c) qu'il est important de connaître les propriétés fondamentales des distributions de probabilité les plus courantes utilisées pour l'étude statistique des phénomènes de propagation,

recommande

1 d'utiliser les données statistiques relatives à la modélisation de la propagation fournies dans l'Annexe 1 pour la planification des services de radiocommunication et la prévision des paramètres de qualité de fonctionnement des systèmes de radiocommunication;

2 d'utiliser la procédure par étapes d'approximation d'une distribution de probabilité cumulative complémentaire par une distribution de probabilité cumulative complémentaire log-normale, décrite en Annexe 2;

3 d'utiliser la procédure par étapes d'approximation d'une distribution de probabilité cumulative complémentaire par une distribution de probabilité cumulative complémentaire de Weibull, décrite en Annexe 3.

Annexe 1

Distributions de probabilité et modélisation de la propagation des ondes radioélectriques

1 Introduction

L'expérience a montré que les informations sur les valeurs moyennes des signaux reçus ne suffisent pas à caractériser précisément la qualité de fonctionnement des systèmes de radiocommunication. Il faut également prendre en considération les variations dans le temps, dans l'espace et en fonction de la fréquence.

Le comportement dynamique des signaux utiles et des signaux brouilleurs joue un rôle important dans l'analyse de la fiabilité des systèmes et dans le choix des paramètres des systèmes, comme le type de modulation. Il est essentiel de connaître la distribution de probabilité et le taux de fluctuation des signaux pour pouvoir définir certains paramètres: type de modulation, puissance d'émission, rapport de protection contre les brouillages, mesures de la diversité et méthode de codage, etc.

Pour décrire la qualité de fonctionnement des systèmes de communication, il suffit souvent d'observer les séries temporelles des fluctuations des signaux et de caractériser ces fluctuations comme un processus stochastique. Si l'on veut utiliser la modélisation des fluctuations des signaux pour prévoir la qualité de fonctionnement des systèmes radioélectriques, il faut connaître les mécanismes d'interaction des ondes radioélectriques avec l'atmosphère neutre et l'ionosphère.

La composition et l'état physique de l'atmosphère varient beaucoup dans l'espace et dans le temps. La modélisation de l'interaction des ondes radioélectriques suppose donc une large utilisation de méthodes statistiques pour définir divers paramètres physiques décrivant l'atmosphère ainsi que des paramètres électriques définissant le comportement des signaux et les processus d'interaction qui lient ces paramètres entre eux.

On trouvera par la suite quelques données générales sur les distributions de probabilité les plus importantes. Ces informations serviront peut-être de dénominateur commun aux méthodes statistiques de prévision de la propagation utilisées dans les Recommandations des Commissions d'études des radiocommunications.

2 Distributions de probabilité

Les distributions de probabilité des processus stochastiques sont en général décrites par une fonction de densité de probabilité (FDP) ou une fonction de distribution cumulative (FDC). La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X, notée $p(x)$, est la probabilité que X prenne la valeur x; et la fonction de distribution cumulative de la variable aléatoire X, notée $F(x)$, est la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x. La FDP et la FDC sont liées comme suit:

$$p(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] \tag{1a}$$

ou:

$$F(x) = \int_c^x p(t)\ dt \tag{1b}$$

où c désigne la limite inférieure de l'intégration.

Les distributions de probabilité les plus importantes pour l'analyse de la propagation des ondes radioélectriques sont les suivantes:

– distribution de probabilité normale ou gaussienne;

– distribution de probabilité log-normale;
– distribution de probabilité de Rayleigh;
– distribution de probabilité combinée log-normale et de Rayleigh;
– distribution de probabilité de Nakagami-Rice (distribution *n* de Nakagami);
– distribution de probabilité gamma et distribution de probabilité exponentielle;
– distribution de probabilité *m* de Nakagami;
– distribution de probabilité χ^2 de Pearson;
– distribution de probabilité de Weibull.

3 Distribution de probabilité normale

On rencontre habituellement la distribution de probabilité normale (gaussienne) d'une variable aléatoire de propagation lorsqu'une variable aléatoire est la somme d'un grand nombre d'autres variables aléatoires.

La distribution de probabilité normale (gaussienne) est une distribution de probabilité continue dans l'intervalle $x = -\infty$ à $+\infty$. La fonction de densité de probabilité (FDP), $p(x)$, d'une distribution normale est:

$$p(x) = k \, \mathrm{e}^{-T(x)} \tag{2}$$

où $T(x)$ est un polynôme du second degré non négatif de la forme $\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$, où m et σ désignent respectivement la moyenne et l'écart type de la distribution de probabilité normale, et k est choisi de sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$. Alors $p(x)$ s'écrit comme suit:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \tag{3}$$

Une distribution de probabilité normale standard est définie comme suit: $m = 0$ et σ = 1. La fonction de distribution cumulative (FDC), $F(x)$, d'une distribution de probabilité normale standard est:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathrm{t}^2\right) dt \tag{3a}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3b}$$

où:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt \tag{3c}$$

Par suite, la fonction de distribution cumulative d'une distribution de probabilité normale avec $m \neq 0$ et/ou $\sigma \neq 1$ est:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt = F\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{3d}$$

La fonction de distribution cumulative complémentaire (FDCC), $\mathrm{Q}(x)$, d'une distribution de probabilité normale standard est:

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \tag{4a}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{4b}$$

où:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2)\, dt \tag{4c}$$

Par suite, la fonction de distribution cumulative complémentaire d'une distribution de probabilité normale avec $m \neq 0$ et/ou $\sigma \neq 1$ est:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x-m)/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{4d}$$

À noter que $F(x) + \mathrm{Q}(x) = 1$, $F(-x) = \mathrm{Q}(x)$, et $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$.

La fonction de distribution cumulative inverse $x = F^{-1}(p)$ est la valeur de x tel que $F(x) = p$; et la fonction de distribution cumulative complémentaire inverse $x = \mathrm{Q}^{-1}(p)$ est la valeur de x tel que $\mathrm{Q}(x) = p$.

À noter qu'à partir de l'équation (4b), $Q^{-1}(p) = \sqrt{2}\operatorname{erfc}^{-1}(2p)$, et qu'à partir de l'équation (3b), $F^{-1}(p) = \sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)$.

Les courbes en trait plein de la Fig. 1 représentent les fonctions *p(x)* et *F(x)* avec $m = 0$ et $\sigma = 1$, et le Tableau 1 donne la correspondance entre *x* et $1 - F(x)$ pour diverses valeurs de *x* ou de $1 - F(x)$.

TABLEAU 1

x	**1 − *F*(*x*)**	***x***	**1 − *F*(*x*)**
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1{,}350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3{,}167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2{,}867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9{,}866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

La valeur approchée de $\mathrm{Q}(x) = 1 - F(x)$ suivante a une erreur d'approximation absolue inférieure à $7{,}5 \times 10^{-8}$:

$$Q(x) \approx \begin{cases} 1 - T(-x), & x < 0 \\ T(x), & x \geq 0 \end{cases} \tag{5a}$$

où:

$$T(x) = Z \times (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) \tag{5b}$$

et

$$b_1 = 0{,}319381530$$
$$b_2 = -0{,}356563782$$
$$b_3 = 1{,}781477937$$

$$b_4 = -1{,}821255978$$
$$b_5 = 1{,}330274429$$
$$a = 0{,}2316419$$
$$t = \frac{1}{1 + a\,x}$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

La valeur approchée de $x = Q^{-1}(p)$ suivante a une erreur d'approximation absolue inférieure à $1{,}2 \times 10^{-9}$:

$$Q^{-1}(p) \approx \begin{cases} -U^{-1}(p), & 0 < p \leq 0{,}5 \\ U^{-1}(q), \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} & 0{,}5 < p < 1 \end{cases} \tag{5c}$$

Pour $0 \leq p \leq 0{,}02425$, la valeur de $U^{-1}(p)$ peut être calculée de la façon suivante:

$$t = \sqrt{-2\ln(p)}$$

$$U^{-1}(p) = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + C_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4} \tag{5d}$$

avec

$$c_0 = 2{,}938163982698783$$
$$c_1 = 4{,}374664141464968$$
$$c_2 = -2{,}549732539343734$$
$$c_3 = -2{,}400758277161838$$
$$c_4 = -0{,}3223964580411365$$
$$c_5 = -0{,}007784894002430293$$

et

$$d_1 = 3{,}754408661907416$$
$$d_2 = 2{,}445134137142996$$
$$d_3 = 0{,}3224671290700398$$
$$d_4 = 0{,}007784695709041462$$

Pour $0{,}02425 < p \leq 0{,}5$, la valeur de $U^{-1}(p)$ peut être calculée de la façon suivante:

$$t = (p - 0{,}5)^2$$

$$U^{-1}(p) = (p - 0{,}5)\ \frac{\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5\}}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5} \tag{5e}$$

avec

$$a_0 = 2{,}506628277459239$$
$$a_1 = -30{,}66479806614716$$
$$a_2 = 138{,}3577518672690$$
$$a_3 = -275{,}9285104469687$$
$$a_4 = 220{,}9460984245205$$
$$a_5 = -39{,}69683028665376$$

et

$$b_1 = -13{,}28068155288572$$
$$b_2 = 66{,}80131188771972$$
$$b_3 = -155{,}6989798598866$$
$$b_4 = 161{,}5858368580409$$
$$b_5 = -54{,}47609879822406$$

On peut utiliser les équations (5d) et (5e) pour calculer la valeur de $U^{-1}(q)$ de l'équation (5c) en remplaçant p par q dans les équations (5d) et (5e).

Il convient de noter que la valeur de $Q^{-1}(p)$ donnée dans l'équation (5c) va de ∞ à $-\infty$ lorsque p va de 0 à 1 respectivement, ce qui est attribué au terme $ln(p)$ dans l'équation (5d).

Si on le souhaite, on peut réduire l'erreur d'approximation dans $Q^{-1}(p)$ comme suit; soit $x_0 = Q^{-1}(p)$ défini par l'équation (5c), alors:

$$x = x_0 - \sqrt{2\pi}\,\exp\left(\frac{x_0^2}{2}\right)\left(p - Q(x_o)\right) \tag{5f}$$

La plupart des progiciels mathématiques modernes comprennent les fonctions de probabilité $F(x)$, Q(x), erf (x) et erfc(x) et leurs inverses.

En propagation, la plupart des grandeurs physiques qui interviennent (puissance, tension, durée d'un évanouissement, etc.) sont des grandeurs essentiellement positives et, par suite, ne peuvent être représentées directement par une distribution de probabilité normale. La distribution de probabilité normale est employée dans deux cas importants:

– pour représenter les fluctuations d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne (évanouissements et renforcements dus à la scintillation par exemple);
– pour représenter les fluctuations du logarithme d'une variable aléatoire, auquel cas la variable possède une distribution de probabilité log-normale (voir le § 4).

Il existe dans le commerce des diagrammes dont l'une des coordonnées est dite normale, dans lesquels une distribution de probabilité cumulative normale est représentée par une droite. Ces diagrammes sont utilisés couramment, même pour la représentation des distributions de probabilité non normales.

4 Distribution de probabilité log-normale

La distribution de probabilité log-normale est la distribution de probabilité d'une variable aléatoire positive X dont le logarithme népérien a une distribution de probabilité normale. La fonction de densité de probabilité, $p(x)$, et la fonction de distribution cumulative, $F(x)$, sont données par:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{7}$$

où m et σ désignent la moyenne et l'écart type du logarithme de X (et non la moyenne et l'écart type de X).

La distribution de probabilité log-normale se rencontre très souvent dans les distributions de probabilité de propagation associées à la puissance et au champ. Etant donné que la puissance et le champ sont généralement exprimés en décibels, leurs distributions de probabilité sont parfois qualifiées, à tort, de normales au lieu de log-normales. Dans le cas des distributions de probabilité en fonction du temps (par exemple, durée des évanouissements en secondes), le terme «log-normal» est toujours employé expressément, car la variable dépendante naturelle est le temps et non le logarithme du temps.

Comme l'inverse d'une variable ayant une distribution de probabilité log-normale a également une distribution de probabilité log-normale, cette distribution de probabilité se rencontre dans certains cas pour des vitesses de variation (par exemple, fréquence des évanouissements en dB/s ou intensité de pluie en mm/h).

Contrairement aux distributions de probabilité normales, les distributions de probabilité log-normales se rencontrent habituellement lorsque les valeurs de la variable aléatoire concernée résultent du produit d'autres variables aléatoires qui sont pondérées de façon à peu près égale.

Contrairement à la distribution de probabilité normale, la distribution de probabilité log-normale est extrêmement dissymétrique. En particulier, la valeur moyenne, la valeur médiane et la valeur la plus probable (souvent appelée mode) ne sont pas identiques (voir les lignes en pointillés dans la Fig. 1).

Les grandeurs caractéristiques de la variable numérique X sont:

– valeur la plus probable: $\exp\,(m - \sigma^2)$;

– valeur médiane: $\exp\,(m)$;

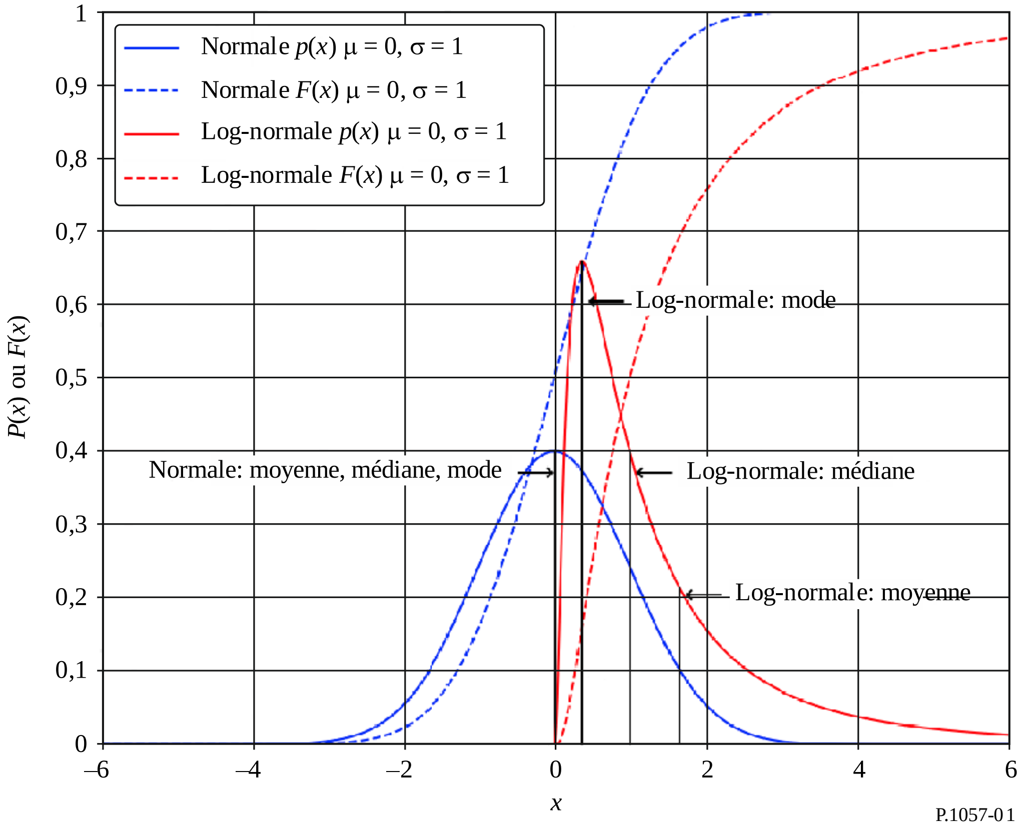
– valeur moyenne: $\exp\left(m + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$;

– valeur quadratique moyenne: $\exp\,(m + \sigma^2)$;

– écart type: $\exp\left(m + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\,(\sigma^2) - 1}$.

FIGURE 1

Distribution de probabilité normale et log-normale



P.1057-01

5 Distribution de probabilité de Rayleigh

La distribution de probabilité de Rayleigh est une distribution de probabilité continue d'une variable aléatoire à valeurs positives. Par exemple, étant donné une distribution de probabilité normale bidimensionnelle à deux variables aléatoires indépendantes y et z de moyenne nulle et de même écart type σ, la variable aléatoire:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

a une distribution de probabilité de Rayleigh. La distribution de probabilité de Rayleigh représente aussi la distribution de probabilité de la longueur d'un vecteur qui est la somme vectorielle d'un grand nombre de vecteurs constitutifs d'amplitudes similaires, la phase de chaque vecteur ayant une distribution de probabilité uniforme.

La fonction de densité de probabilité et la fonction de distribution cumulative d'une distribution de probabilité de Rayleigh sont données par:

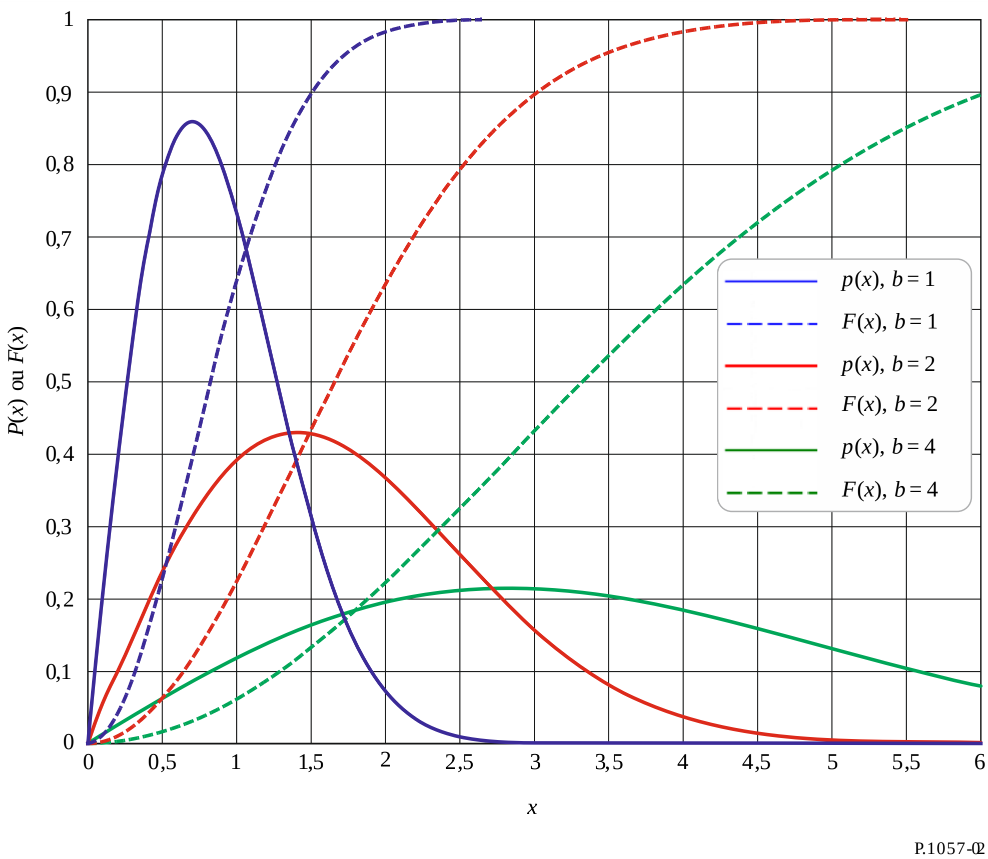
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

La Fig. 2 donne des exemples des fonctions $p(x)$ et $F(x)$ pour trois valeurs différentes de b.

FIGURE 2

Distribution de probabilité de Rayleigh



En posant par définition $b = \sigma\sqrt{2}$, les grandeurs caractéristiques de la variable aléatoire X sont:

– valeur la plus probable: $\frac{b}{\sqrt{2}}$;

– valeur médiane: $b\sqrt{\ln 2} = 0{,}833b$;

– valeur moyenne: $\frac{b}{2}\sqrt{\pi} \approx 0{,}886b$;

– valeur quadratique moyenne: b;

– écart type: $b\sqrt{1-\frac{\pi}{4}} = 0{,}463b$.

La distribution de probabilité de Rayleigh s'applique souvent aux petites valeurs de x. Dans ce cas, la fonction de distribution cumulative, $F(x)$, peut être approchée par:

$$F(x) \approx \frac{x}{b^2}^2 \tag{11}$$

Cette expression approchée s'interprète de la façon suivante: la probabilité que la variable aléatoire X ait une valeur inférieure à x est proportionnelle au carré de x. Si la variable considérée est une tension, son carré représente la puissance du signal. En d'autres termes, sur une échelle en décibels, la puissance décroît de 10 dB pour chaque décade de probabilité. Cette propriété est souvent utilisée pour savoir si un niveau reçu suit une distribution de probabilité de Rayleigh asymptotique. Il faut noter, cependant, que d'autres distributions de probabilité peuvent avoir le même comportement.

Dans le cas de la propagation des ondes radioélectriques, la distribution de probabilité de Rayleigh intervient dans l'analyse d'une diffusion provenant de multiples diffuseurs indépendants et situés de façon aléatoire pour lesquels aucune composante de diffusion n'est dominante.

6 Distribution de probabilité combinée log-normale et de Rayleigh

Dans certains cas, la distribution de probabilité d'une variable aléatoire peut être considérée comme résultant de la combinaison de deux distributions de probabilité, à savoir une distribution de probabilité log-normale pour les variations à long terme (donc lentes) et une distribution de probabilité de Rayleigh pour les variations à court terme (donc rapides). Cette distribution de probabilité intervient dans les analyses de la propagation des ondes radioélectriques lorsque les hétérogénéités du milieu de propagation ont des variations à long terme non négligeables, comme dans l'analyse de la diffusion troposphérique.

La distribution de probabilité instantanée de la variable aléatoire est obtenue en considérant une distribution de probabilité de Rayleigh dont la valeur moyenne (ou la valeur quadratique moyenne) est elle-même une variable aléatoire ayant une distribution de probabilité log-normale.

Pour la distribution de probabilité combinée log-normale et de Rayleigh, la fonction de densité de probabilité est donnée par:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-kx^2\exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right)du \tag{12a}$$

et la fonction de distribution cumulative complémentaire de la distribution de probabilité combinée log-normale et de Rayleigh est donnée par:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-kx^2\exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - \frac{u^2}{2}\right)du \tag{12b}$$

où m et σ, exprimés en népers, désignent la moyenne et l'écart type de la distribution de probabilité normale associée à la distribution log-normale.

La valeur de k dépend de l'interprétation de σ and m:

1) si σ et m sont l'écart type et la moyenne du logarithme népérien de la valeur la plus probable de la distribution de probabilité de Rayleigh, alors $k = 1/2$;

2) si σ et m sont l'écart type et la moyenne du logarithme népérien de la valeur médiane de la distribution de probabilité de Rayleigh, alors $k = ln\, 2$;

3) si σ et m sont l'écart type et la moyenne du logarithme népérien de la valeur moyenne de la distribution de probabilité de Rayleigh, alors $k = \pi/4$; et

4) si σ et m sont l'écart type et la moyenne du logarithme népérien de la valeur quadratique moyenne de la distribution de probabilité de Rayleigh, alors $k = 1$.

La moyenne (E), la valeur quadratique moyenne (RMS), l'écart type (ET), la médiane et la valeur la plus probable de la distribution de probabilité combinée log-normale et de Rayleigh sont:

Valeur moyenne, *E*

$$E = \int_0^\infty x \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2} \right) du \right] dx \qquad (13a)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) \qquad (13b)$$

Valeur quadratique moyenne, *RMS*

$$RMS = \sqrt{\int_0^\infty x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2} \right) du \right] dx} \qquad (13c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\,(m + \sigma^2) \qquad (13d)$$

Ecart type, *ET*

$$ET = \sqrt{\frac{1}{k} \exp\big(2(m + \sigma^2)\big) - \frac{\pi}{4k} \exp\left(2\left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right)} \qquad (13e)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - \frac{\pi}{4}} \qquad (13f)$$

Valeur médiane

La valeur médiane est la valeur de *x* qui est la solution de:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - \frac{u^2}{2} \right) du \qquad (13g)$$

autrement dit

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\big(-2(\sigma u + m)\big) - \frac{u^2}{2} \right) du \qquad (13h)$$

Valeur la plus probable

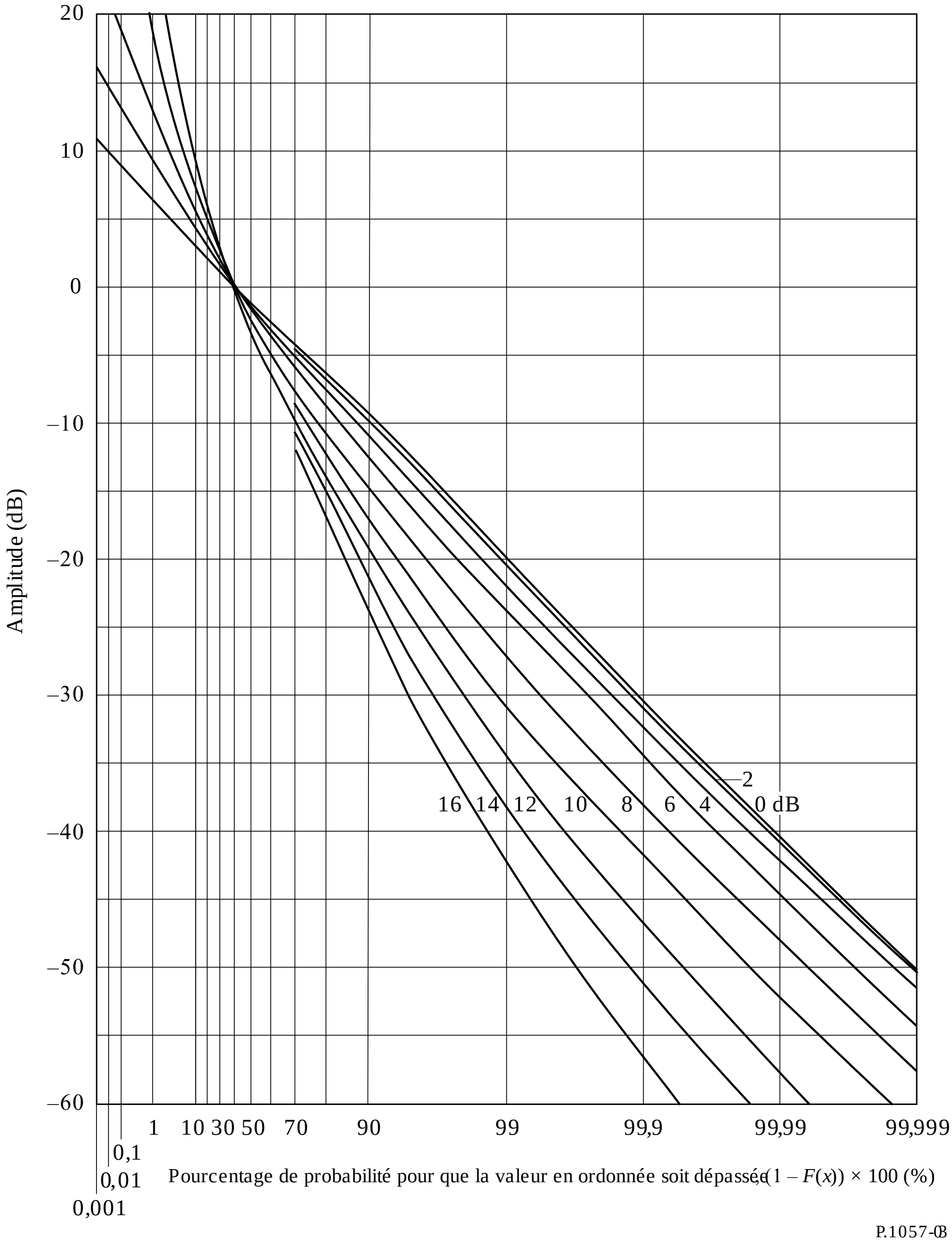
La valeur la plus probable (autrement dit le mode) est la valeur de *x* qui est la solution de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{1 - 2kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)]\} \exp\left\{ -kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2} \right\} \mathrm{d}u = 0 \qquad (13i)$$

La Fig. 3 donne une représentation graphique de cette distribution de probabilité pour plusieurs valeurs de l'écart type, avec $m = 0$ et $k = 1$.

FIGURE 3

Distributions de probabilité combinées log-normale et de Rayleigh (avec, en paramètre, l'écart type de la distribution de probabilité log-normale)



7 Distribution de probabilité de Nakagami-Rice (distribution *n* de Nakagami)

La distribution de probabilité de Nakagami-Rice (distribution *n* de Nakagami), qui est différente de la distribution de probabilité *m* de Nakagami, est une généralisation de la distribution de probabilité de Rayleigh. Elle peut être considérée comme la distribution de probabilité de la longueur d'un vecteur qui serait la somme d'un vecteur fixe et d'un vecteur dont la longueur a une distribution de probabilité de Rayleigh.

De même, étant donné une distribution de probabilité normale bidimensionnelle à deux variables indépendantes x et y de même écart type σ, la longueur d'un vecteur joignant un point de la distribution de probabilité à un point fixe différent du centre de la distribution de probabilité suit une distribution de probabilité de Nakagami-Rice.

Si on désigne par a la longueur du vecteur fixe et par σ la longueur la plus probable du vecteur de Rayleigh, la fonction de densité de probabilité est donnée par:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

où I_0 désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro.

Cette distribution de probabilité dépend du rapport entre l'amplitude du vecteur fixe a et l'amplitude quadratique moyenne du vecteur aléatoire, $\sigma\sqrt{2}$. Il existe deux principales applications à la propagation des ondes radioélectriques:

a) La puissance dans le vecteur fixe est constante, mais la puissance totale dans les composantes fixe et aléatoire est une distribution de probabilité aléatoire.

Si on étudie l'influence d'un rayon réfléchi par une surface rugueuse, ou si l'on veut prendre en compte des composantes multitrajets en plus d'une composante fixe, la puissance moyenne est donnée par la formule $(a^2 + 2\sigma^2)$. La distribution de probabilité est souvent définie en fonction d'un paramètre K:

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{dB} \tag{15}$$

qui représente le rapport entre les puissances du vecteur fixe et de la composante aléatoire.

b) La puissance totale dans l'ensemble constitué par le vecteur fixe et par le vecteur aléatoire est constante, mais les deux composantes varient.

Si on étudie la propagation par trajets multiples à travers l'atmosphère, on peut considérer que la somme de la puissance transportée par le vecteur fixe et de la puissance moyenne transportée par le vecteur aléatoire est constante, puisque la puissance transportée par le vecteur aléatoire provient de celle du vecteur fixe. En prenant la puissance totale égale à l'unité, on a alors:

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1 \tag{16}$$

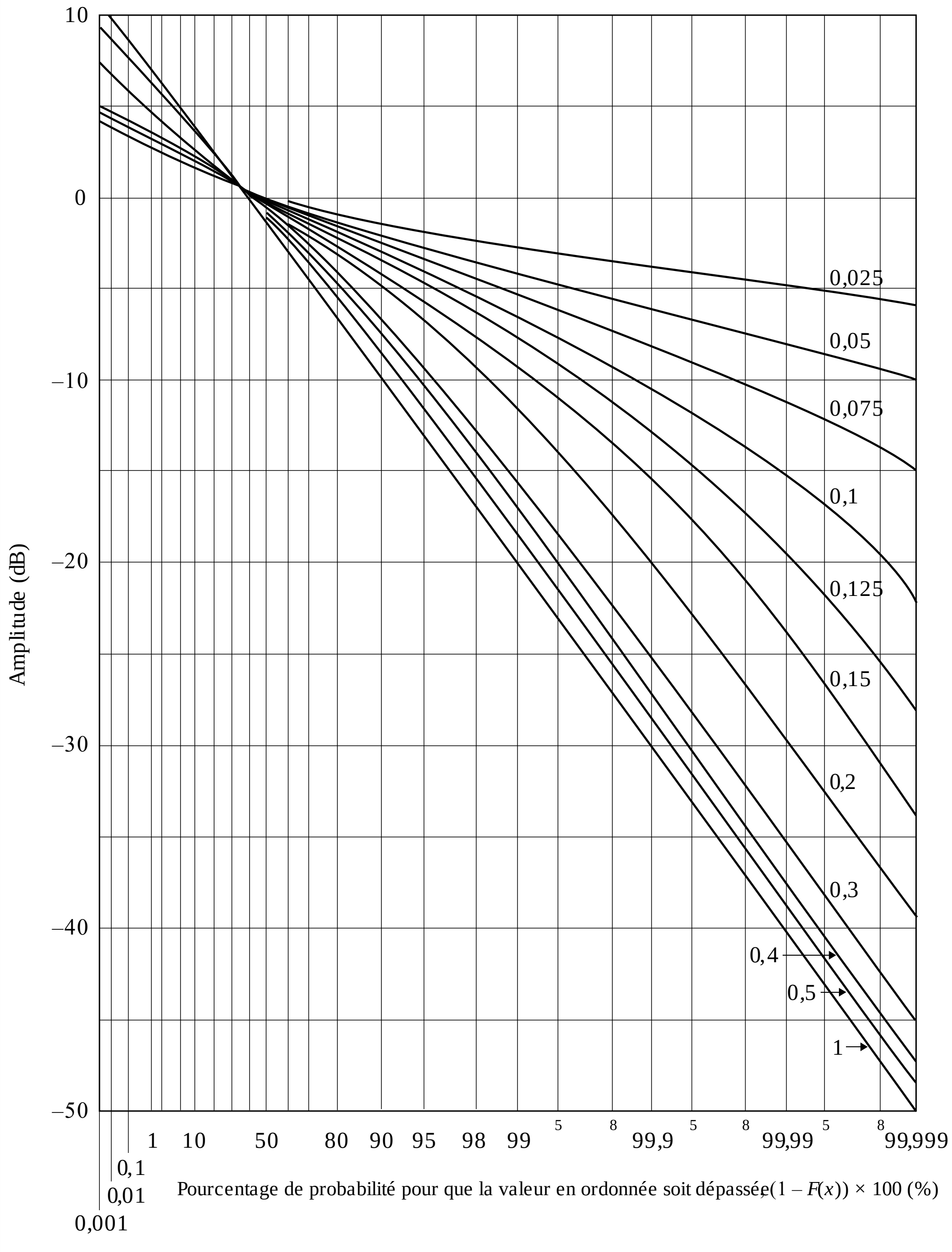
et la fraction de la puissance totale transportée par le vecteur aléatoire est alors égale à $2\,\sigma^2$. Si X désigne la variable aléatoire du vecteur résultant, la probabilité que la variable aléatoire X soit supérieure à x est donnée par:

$$\text{Prob}\ (X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \tag{17}$$

La Fig. 4 montre cette distribution de probabilité, pour différentes valeurs de la fraction de puissance transportée par le vecteur aléatoire.

FIGURE 4

Distribution de probabilité de Nakagami-Rice pour une puissance totale constante (avec, en paramètre, la fraction de puissance transportée par le vecteur aléatoire)



P.1057-04

En vue des applications pratiques, les amplitudes sont représentées avec une échelle en décibels et les probabilités avec une échelle telle qu'une distribution de probabilité cumulative de Rayleigh soit représentée par une droite. Pour des valeurs de la fraction de la puissance totale dans le vecteur aléatoire supérieures à 0,5 environ, les courbes se rapprochent asymptotiquement d'une distribution de probabilité de Rayleigh, car le vecteur fixe a une amplitude du même ordre de grandeur que celle du vecteur aléatoire et il est en pratique impossible à distinguer du vecteur aléatoire. Par contre, pour les petites valeurs de cette fraction, on peut montrer que la distribution de probabilité de l'amplitude tend vers une distribution de probabilité normale.

L'amplitude suit une distribution de probabilité de Nakagami-Rice, tandis que la fonction de densité de probabilité de la phase est la suivante:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos\theta}{\sigma} e^{\frac{a^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2}} \left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a \cos\theta}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \right\} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

8 Distribution de probabilité gamma et distribution de probabilité exponentielle

Contrairement aux distributions de probabilité précédentes qui dérivaient d'une distribution de probabilité normale, la distribution de probabilité gamma est une généralisation de la distribution de probabilité exponentielle. Il s'agit de la distribution de probabilité d'une variable positive et non limitée. La fonction de densité de probabilité est:

$$p(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \, e^{-\alpha x} \tag{19}$$

où Γ représente la fonction d'Euler de second ordre.

Cette fonction de distribution cumulative dépend de deux paramètres α et ν. Cela dit, α est seulement un paramètre d'échelle de la variable *x*. Les grandeurs caractéristiques de la variable aléatoire *X* sont:

– valeur moyenne: $\frac{\nu}{\alpha}$

– valeur quadratique moyenne: $\frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– écart type: $\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

L'intégrale exprimant la fonction de distribution cumulative ne peut être évaluée sous forme explicite, sauf pour les valeurs entières de ν. On en donne ci-dessous les développements en série dans deux cas particuliers:

Développement en série pour $x << 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\alpha x} \, (\alpha x)^\nu \left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)\,(\nu+2)} + ... \right] \tag{20}$$

Développement asymptotique pour $x >> 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x} \, (\alpha x)^{\nu-1} \left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + ... \right] \tag{21}$$

Pour ν égal à l'unité, $F(x)$ devient une distribution de probabilité exponentielle. Pour ν entier, le développement asymptotique possède un nombre fini de termes et donne la distribution de probabilité gamma sous forme explicite.

Dans le cas de la propagation des ondes radioélectriques, les valeurs intéressantes de ν sont les valeurs très faibles, de l'ordre de 1×10^{-2} à 1×10^{-4}. Pour ν proche de zéro:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu \tag{22}$$

auquel cas pour $\alpha\, x > 0{,}03$:

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \tag{23}$$

Pour les calculs pratiques, il est possible de prendre une valeur approchée de l'intégrale ci-dessus:

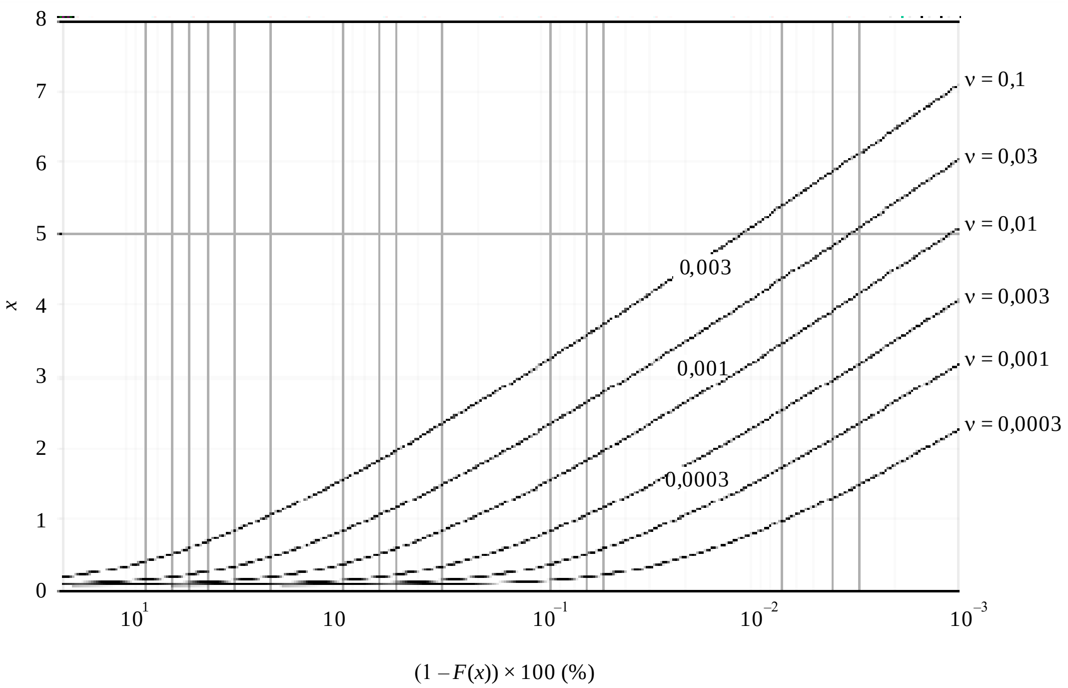
$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0{,}68 + \alpha\, x + 0{,}28 \log \alpha\, x} \tag{24}$$

qui est valide pour $\nu < 0{,}1$ et $\alpha\, x > 0{,}03$.

La fonction distribution cumulative de la fonction gamma complémentaire pour les petites valeurs de ν est reproduite à la Fig. 5. La probabilité que la variable X ait une valeur significativement supérieure à zéro est toujours faible. C'est ce qui explique, en particulier, l'utilisation de la distribution de probabilité gamma pour représenter l'intensité de pluie, puisque le pourcentage total de temps de pluie est, en général, de l'ordre de 2 à 10%.

FIGURE 5

Distribution de probabilité gamma
$\alpha = 1$, $\nu \leq 0{,}1$



P.1057-05

9 Distribution de probabilité *m* de Nakagami

La distribution de probabilité *m* de Nakagami s'applique à une variable positive non limitée. La fonction de densité de probabilité est:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\,\Omega^m}\, x^{2m-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{25}$$

Ω est un paramètre d'échelle qui est égal à la valeur moyenne de x^2, à savoir:

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{26}$$

où *m* indique un paramètre de la distribution de probabilité *m* de Nakagami et non une valeur moyenne comme dans les paragraphes précédents de la présente Annexe.

Cette distribution de probabilité est liée à d'autres distributions de probabilité:

– si une variable aléatoire a une distribution de probabilité *m* de Nakagami, le carré de cette variable suit une distribution de probabilité gamma;

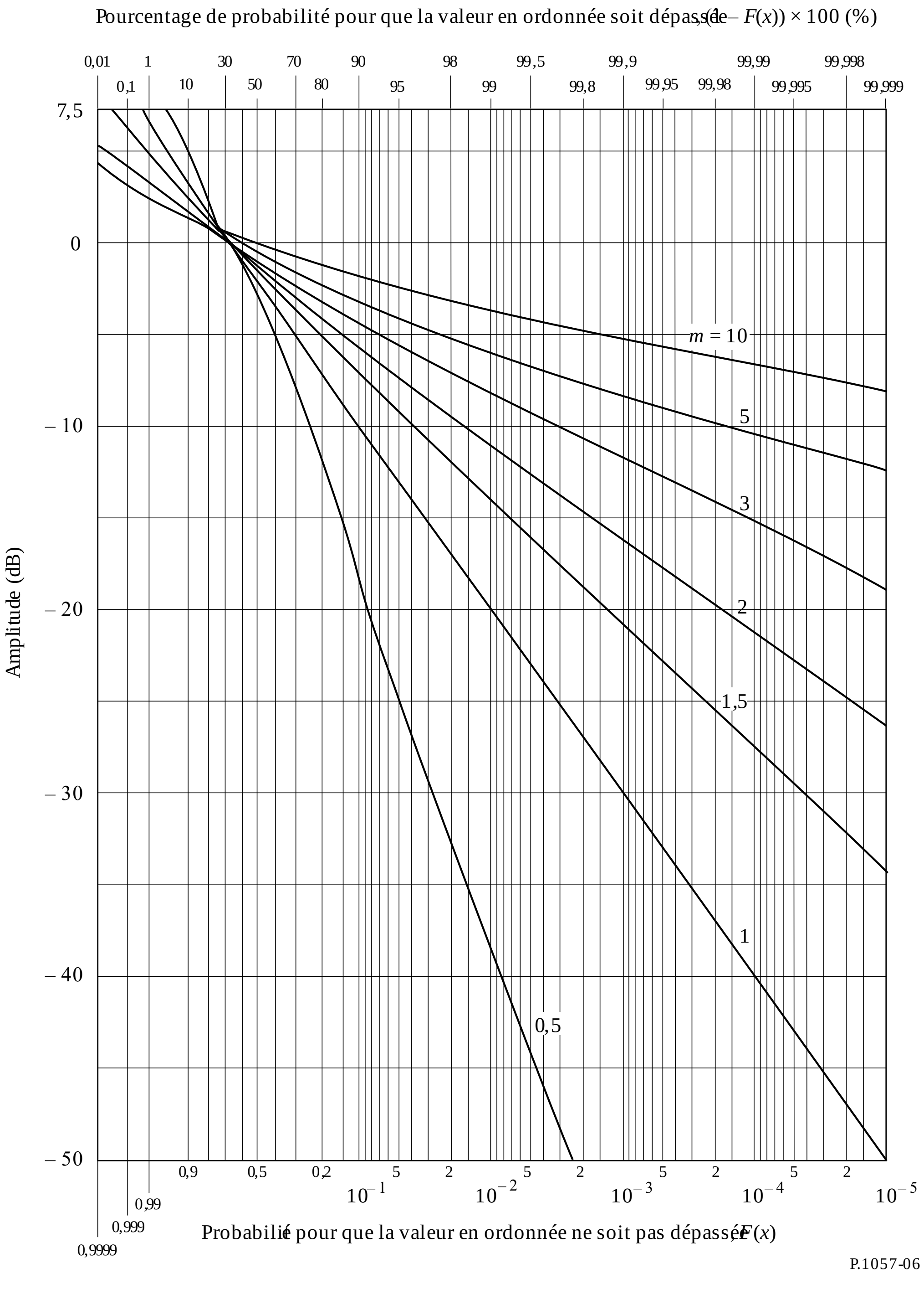
– pour *m* = 1, la distribution de probabilité *m* de Nakagami devient une distribution de probabilité de Rayleigh;

– pour *m* = 1/2, la distribution de probabilité *m* de Nakagami devient une distribution de probabilité normale unilatérale.

La distribution de probabilité *m* de Nakagami et la distribution de probabilité de Nakagami-Rice sont deux généralisations différentes de la distribution de probabilité de Rayleigh. Pour les niveaux de signal très faibles, la pente de la distribution de probabilité *m* de Nakagami tend vers une valeur qui dépend du paramètre *m*, contrairement à la distribution de probabilité de Nakagami-Rice pour laquelle la pente limite est toujours la même (10 dB par décade de probabilité). La Fig. 6 montre la fonction de distribution cumulative *m* de Nakagami pour différentes valeurs du paramètre *m*.

FIGURE 6

Distribution de probabilité *m* de Nakagami ($\overline{x^2} = 1$)



10 Distribution de probabilité χ^2 de Pearson

La fonction de densité de probabilité χ^2 de Pearson est:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\; e^{\frac{-\chi^2}{2}}\;(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \tag{27}$$

où χ^2 est une variable positive non limitée, et le paramètre ν, nombre entier positif, est le nombre de degrés de liberté de la distribution de probabilité. Γ représente la fonction d'Euler de second ordre. Suivant la parité de ν, on a:

$$\nu \text{ pair:} \quad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)! \tag{28}$$

$$\nu \text{ impair:} \quad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right)\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{29}$$

La fonction de distribution cumulative est donnée par:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\,\mathrm{d}t \tag{30}$$

La moyenne et l'écart type sont:

$$m = \nu \tag{31}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \tag{32}$$

Une propriété essentielle de la distribution de probabilité en χ^2 est la suivante: si n variables x_i $\{i=1, 2, \dots, n\}$ suivent des distributions de probabilité gaussiennes de moyenne m_i et d'écart type σ_i, la variable:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{33}$$

suit une distribution de probabilité en χ^2 à n degrés de liberté. En particulier, le carré d'une variable réduite gaussienne suit une distribution de probabilité en χ^2 à un degré de liberté.

Si plusieurs variables indépendantes suivent des distributions de probabilité en χ^2, leur somme suit aussi une distribution de probabilité en χ^2 dont le nombre de degrés de liberté est égal à la somme des degrés de liberté de chacune des variables.

La distribution de probabilité en χ^2 n'est pas essentiellement différente de la distribution de probabilité gamma. Les deux distributions de probabilité sont liées par les relations suivantes:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha\, x \tag{34}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{35}$$

De même, la distribution de probabilité en χ^2 est liée à la distribution de probabilité m de Nakagami par la relation:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega}\, x^2 \tag{36}$$

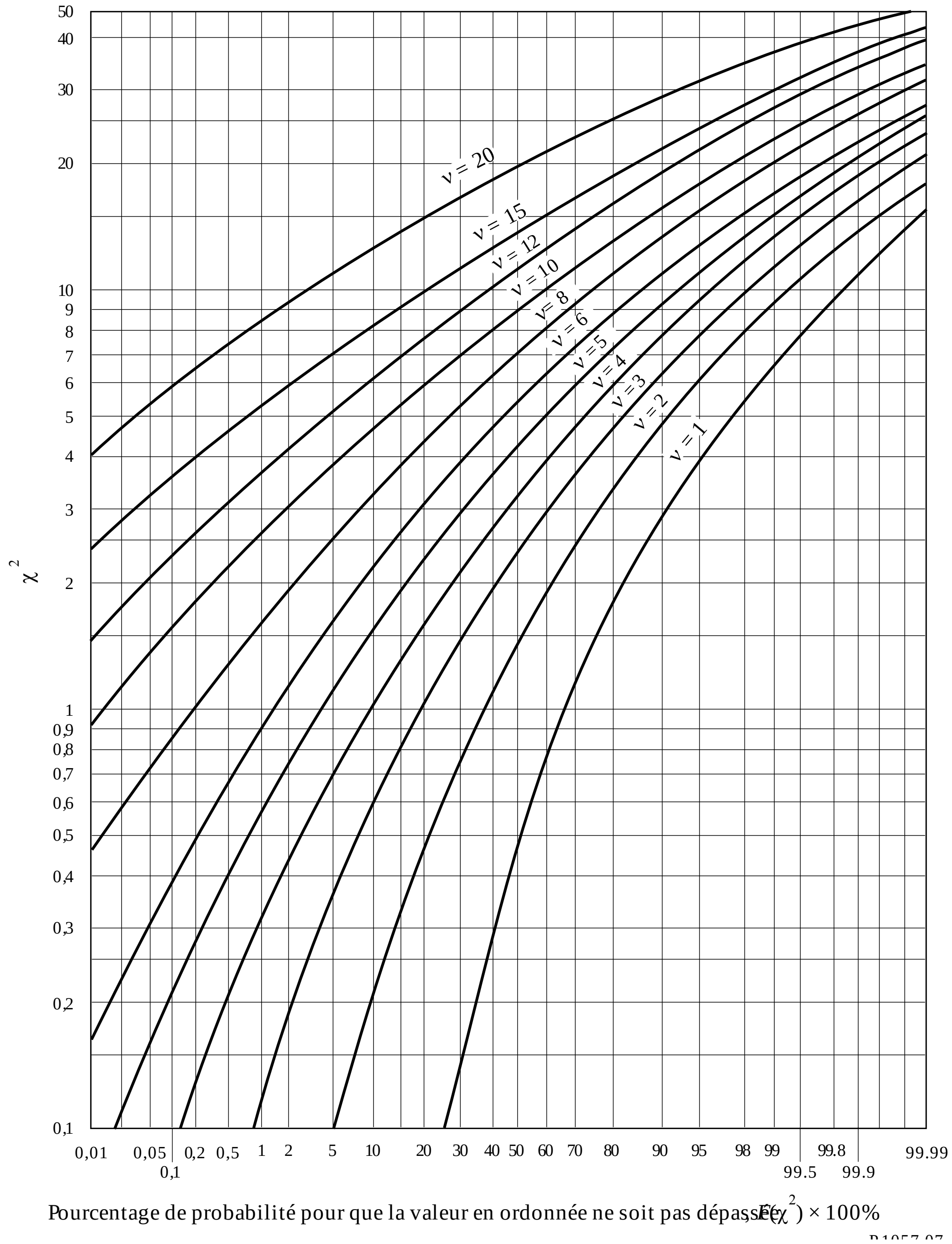
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{37}$$

La distribution de probabilité en χ^2 est utilisée dans des tests statistiques pour déterminer si un ensemble de valeurs expérimentales d'une grandeur (intensité de pluie, affaiblissement, etc.) peut être modélisé par une distribution de probabilité statistique donnée.

La Fig. 7 donne une représentation graphique de la distribution de probabilité en χ^2 pour un certain nombre de valeurs de ν.

FIGURE 7

Distribution de probabilité en χ^2



11 Distribution de probabilité de Weibull

La distribution de probabilité de Weibull est une distribution de probabilité continue d'une variable aléatoire à valeurs positives.

La fonction de densité de probabilité et la fonction de distribution cumulative d'une distribution de probabilité de Weibull sont données par:

$$p(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad x \geq 0 \tag{38}$$

$$F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_0^x \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{39}$$

où $k > 0$ est le paramètre de forme et $\lambda > 0$ est le paramètre d'échelle de la distribution.

La fonction de distribution cumulative complémentaire associée est une fonction exponentielle étendue:

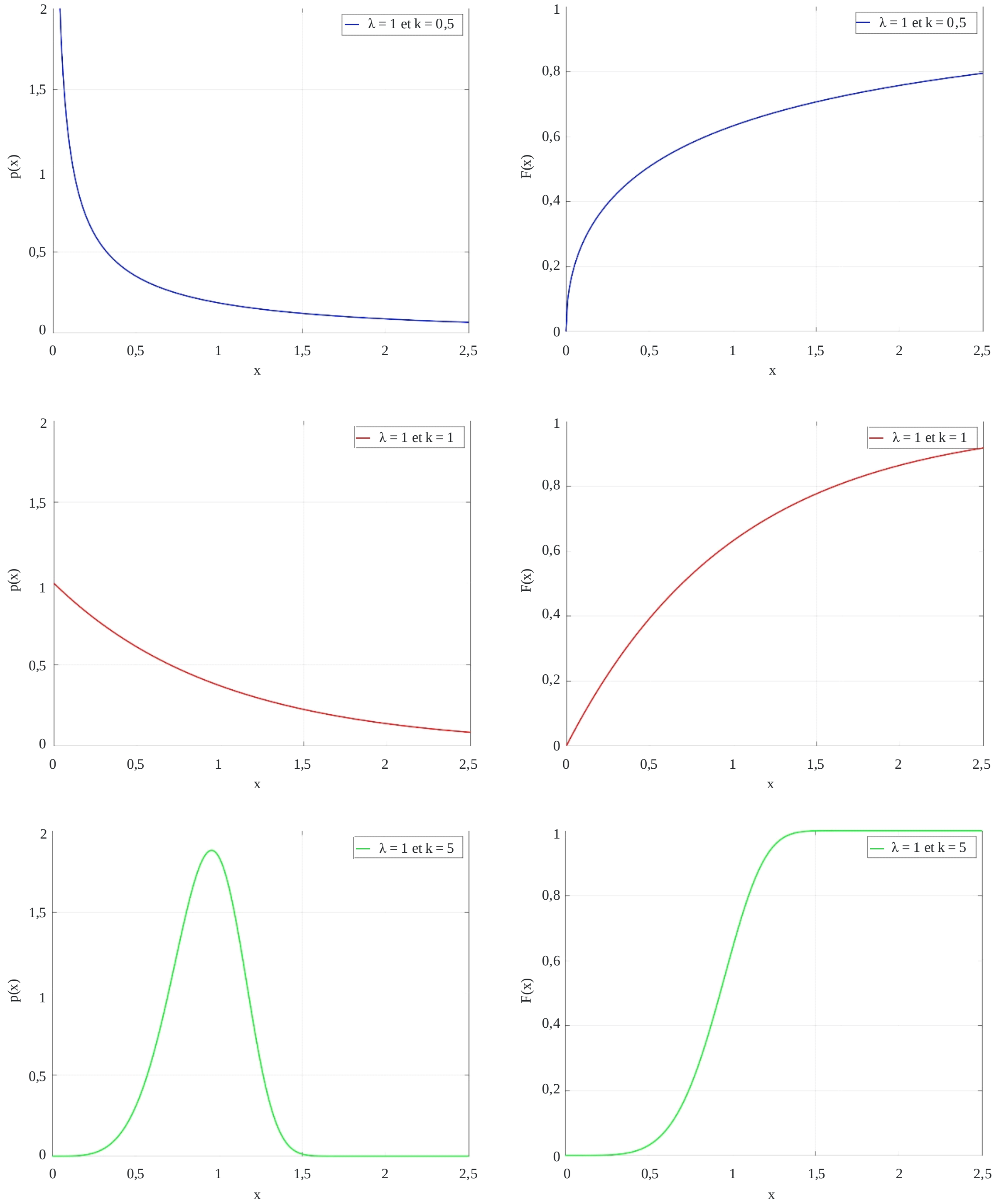
$$G(x) = 1 - F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_x^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = e^{-(x/\lambda)^k} \tag{40}$$

La distribution de Weibull permet d'effectuer une interpolation entre la distribution exponentielle ($k = 1$) et la distribution de Rayleigh ($k = 2$ et $\lambda = \sqrt{2}\sigma$).

La Fig. 8 donne des exemples des fonctions $p(x)$ et $F(x)$ pour une valeur de $\lambda = 1$ et pour trois valeurs différentes de k.

FIGURE 8

Distribution de probabilité de Weibull



P.1057-08

Les valeurs caractéristiques de la variable numérique X suivant une distribution de probabilité de Weibull sont:

– valeur la plus probable: $\begin{cases} \lambda\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/k} & k > 1 \\ 0 & k \leq 1 \end{cases}$

– valeur médiane: $\lambda(\ln 2)^{1/k}$
– valeur moyenne: $\lambda\Gamma(1+1/k)$
– valeur quadratique moyenne: $\lambda\sqrt{\Gamma(1+2/k)}$
– écart type: $\lambda\sqrt{\Gamma(1+2/k)-\left(\Gamma(1+1/k)\right)^2}$

Dans le cas de la propagation des ondes radioélectriques, une distribution de probabilité de Weibull peut intervenir dans l'analyse de l'oxygène, de la vapeur d'eau et de la vitesse du vent.

Annexe 2

Procédure par étapes d'approximation d'une distribution cumulative complémentaire par une distribution cumulative complémentaire log-normale

1 Contexte

La distribution cumulative log-normale est définie comme suit:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{41}$$

ou, de façon équivalente:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\mathrm{d}t \tag{42}$$

De manière analogue, la distribution cumulative complémentaire log-normale est définie comme suit:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{1}{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{43}$$

ou, de manière équivalente:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t = Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) \tag{44}$$

où $Q(.)$ est l'intégrale de la probabilité cumulative complémentaire normale. Les paramètres m et σ peuvent être calculés à partir d'un ensemble de n paires (G_i, x_i), comme décrit dans le paragraphe suivant.

2 Procédure

Calculer les deux paramètres de la distribution log-normale m et σ comme suit:

Etape 1: Construire l'ensemble de n paires (G_i, x_i), où G_i est la probabilité que x_i soit dépassé.

Etape 2: Transformer l'ensemble des n paires (G_i, x_i) en n paires (Z_i, ln x_i), où:

$Z_i = \sqrt{2}\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1 - 2G_i)$ ou, de manière équivalente, $Z_i = \mathrm{Q}^{-1}(G_i)$

Etape 3: Déterminer les variables m et σ en effectuant un ajustement par les moindres carrés à la fonction linéaire,

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

comme suit:

$$\sigma = \frac{n \sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n \sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

Annexe 3

Procédure par étapes d'approximation d'une distribution cumulative complémentaire par une distribution cumulative complémentaire de Weibull

1 Contexte

La distribution cumulative de Weibull est définie comme suit:

$$F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_0^x \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{45}$$

De manière analogue, la distribution cumulative complémentaire de Weibull est définie comme suit:

$$G(x) = \frac{k}{\lambda}\int_x^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt$$

$$G(x) = e^{-(x/\lambda)^k} \tag{46}$$

Les paramètres d'échelle λ et de forme k peuvent être calculés à partir d'un ensemble de n paires (G_i, x_i), comme décrit ci-dessous.

2 Procédure

Calculer les deux paramètres d'échelle λ et de forme k de Weibull comme suit:

Étape 1: Construire l'ensemble de n paires (G_i, x_i), où G_i est la probabilité que x_i soit dépassé.

Étape 2: Transformer l'ensemble des n paires (G_i, x_i) en n paires (Z_i, ln x_i), où:

$$Z_i = \ln(-\ln G_i)$$

Étape 3: Déterminer les variables a et b en effectuant un ajustement par les moindres carrés à la fonction linéaire,

$$\ln x_i = aZ_i + \mathrm{b}$$

comme suit:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n Z_i \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n\sum_{i=1}^n Z_i^2 - \left[\sum_{i=1}^n Z_i\right]^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i - a\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$$

Étape 4: Calculer les paramètres λ et k comme suit:

$$\lambda = e^b$$

$$k = \frac{1}{a}$$

____