国 际 电 信 联 盟

ITU-R

国际电联无线电通信部门

ITU-R P.1057-7 建议书
(08/2022)

与无线电波传播建模相关的概率分布

P 系列
无线电波传播

国际电信联盟

前言

无线电通信部门的职责是确保卫星业务等所有无线电通信业务合理、平等、有效、经济地使用无线电频谱，不受频率范围限制地开展研究并在此基础上通过建议书。

无线电通信部门的规则和政策职能由世界或区域无线电通信大会以及无线电通信全会在研究组的支持下履行。

知识产权政策（IPR）

ITU-R的IPR政策述于ITU-R第1号决议中所参引的《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策》。专利持有人用于提交专利声明和许可声明的表格可从http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/zh获得，在此处也可获取《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策实施指南》和ITU-R专利信息数据库。

ITU-R系列建议书

（也可在线查询**http://www.itu.int/publ/R-REC/zh**）

系列	标题
BO	卫星传送
BR	用于制作、存档和播出的录制；电视电影
BS	广播业务（声音）
BT	广播业务（电视）
F	固定业务
M	移动、无线电定位、业余和相关卫星业务
P	无线电波传播
RA	射电天文
RS	遥感系统
S	卫星固定业务
SA	空间应用和气象
SF	卫星固定业务和固定业务系统间的频率共用和协调
SM	频谱管理
SNG	卫星新闻采集
TF	时间信号和频率标准发射
V	词汇和相关问题

说明： 该ITU-R建议书的英文版本根据ITU-R第1号决议详述的程序予以批准。

电子出版
2023年，日内瓦

ITU-R P.1057-7 建议书

与无线电波传播建模相关的概率分布

（1994-2001-2007-2013-2015-2017-2019-2022年）

范围

本建议书描述与无线电传播建模和预测方法有关的各种概率分布。

关键词

概率分布、正态、高斯、对数正态、瑞利、Nakagami-Rice、伽马、指数、皮尔森、威布尔

国际电联无线电通信全会，

考虑到

a) 无线电波的传播主要涉及随机媒介，因此有必要通过统计方法分析传播现象；

b) 在大多数情况下，有可能通过已知的概率分布统计，对各种传播参数的时间与空间变化作出满意地描述；

c) 至关重要的是了解统计传播研究中应用最为普遍的概率分布基本属性，

建议

1 附件1中提供的与传播建模相关的统计信息须用于无线电通信业务的规划和系统性能参数的预测；

2 应使用附件2中提供的分步程序，通过对数正态余补累积概率分布模拟余补累积概率分布；

3 应使用附件3中提供的分步程序，通过威布尔余补累积概率分布模拟余补累积概率分布。

附件1

与无线电波传播建模相关的概率分布

1 引言

经验表明，仅有接收信号平均值方面的资料不足以准确地描述无线电通信系统的性能。时间、空间和频率的变化亦应考虑在内。

有用信号和干扰的动态表现，在分析系统可靠性和选择调制类型等系统参数时，发挥着重要的作用。最为关键的是要了解信号波动的概率分布与速率，以便规定如调制类型、发射功率、干扰保护比、分集措施、编码方法等参数。

描述通信系统的性能，一般通过观察信号波动的时间序列并将信号波动视为随机过程即可。为预测无线电系统的性能而为信号波动建模，则要了解无线电波与中性大气层和电离层之间的互动机制。

大气组成和物理状态的时空变化非常快。因此，波互动建模，需大量使用统计方法来定义各类物理参数，描述大气及定义信号表现的电参数，以及建立参数间关系的互动流程。

下文提供了最重要的、有关概述分布的一些总体信息。这些信息为无线电通信研究组建议书使用的各种传播预测统计方法，提供了共同的背景。

2 概率分布

随机概率分布流程一般使用概率密度函数（PDF）或余补累积分布函数（CDF）描述。随机变量X的概率密度函数，用$p(x)$表示，X的概率取x值，随机变量X余补累积分布函数，用$F(x)$表示，它是X值小于或等于x时的概率，PDF和CDF两函数间的关系如下：

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right] \tag{1a}$$

或

$$F(x) = \int_{c}^{x} p(t)\ \mathrm{d}t \tag{1b}$$

其中c是整合的较小值。

下述概率分布对无线电波传播的分析最为重要：

– 正态或高斯概率分布；

– 对数正态概率分布；

– 瑞利概率分布；

– 对数正态和瑞利概率分布的组合；

– Nakagami-Rice（Nakagami n）概率分布；

– 伽玛概率分布和指数概率分布；

– Nakagami$m$概率分布；
– 皮尔森χ^2概率分布。
– 威布尔概率分布。

3 正态概率分布

当一个随机变量是其它大量随机变量的总和时，随机变量的传播通常容易发生正态（高斯）概率分布。

正态（高斯）概率此分布是一个连续的概率分布，区间在$x = -\infty$至$+\infty$。概率密度函数（PDF）$p(x)$的正态分布为：

$$p(x) = k\, \mathrm{e}^{-T(x)} \tag{2}$$

其中$T(x)$是格式为$\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$的非负二阶多项式，式中的$m$和σ分别为正态概率分布的平均和标准方差，$k$选择为$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$，则$p(x)$为：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \tag{3}$$

标准正态概率分布被定义为$m = 0$ 和 $\sigma = 1$。累积分布函数（CDF）$F(x)$的正态概率分布为：

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{t}^2\right) dt \tag{3a}$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3b}$$

其中：

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt \tag{3c}$$

那么，当 $m \neq 0$和/或$\sigma \neq 1$时，正态概率分布的CDF为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = F\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{3d}$$

余补累积分布函数（CCDF）$\mathrm{Q}(x)$的正态概率分布为：

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \tag{4a}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{4b}$$

其中：

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-t^2\right) dt \tag{4c}$$

那么，当 $m \neq 0$和/或$\sigma \neq 1$时，正态概率分布的CCDF为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x-m)/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{4d}$$

注意$F(x) + \mathrm{Q}(x) = 1$, $F(-x) = \mathrm{Q}(x)$, 和$\mathrm{erf}(x) + \mathrm{erfc}(x) = 1$。

逆累积分布函数$x = F^{-1}(p)$中x的值为$F(x) = p$，逆余补累积分布函数$x = \mathrm{Q}^{-1}(p)$中x的值为$x = \mathrm{Q}^{-1}(p)$。

注意，根据等式(4b)，$Q^{-1}(p) = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2p)$，根据等式(3b)，$F^{-1}(p) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)$。

图1中的实线代表函数$p(x)$和$F(x)$，m等于零，σ等于单一。表1显示了在多种x或$1 - F(x)$示例值下x与$1 - F(x)$的对应关系。

表1

x	**1 – *F*(*x*)**	***x***	**1 – *F*(*x*)**
0	0.5	1.282	10^{-1}
1	0.1587	2.326	10^{-2}
2	0.02275	3.090	10^{-3}
3	1.350×10^{-3}	3.719	10^{-4}
4	3.167×10^{-5}	4.265	10^{-5}
5	2.867×10^{-7}	4.753	10^{-6}
6	9.866×10^{-10}	5.199	10^{-7}
		5.612	10^{-8}

以下关于$\mathrm{Q}(x) = 1 - F(x)$的近似具有小于7.5×10^{-8}的近似误差：

$$Q(x) \approx \begin{cases} 1 - T(-x), & x < 0 \\ T(x), & x \geq 0 \end{cases} \tag{5a}$$

其中：

$$T(x) = Z \times (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) \tag{5b}$$

且

$$\begin{aligned} b_1 &= 0.319381530 \\ b_2 &= -0.356563782 \\ b_3 &= 1.781477937 \\ b_4 &= -1.821255978 \\ b_5 &= 1.330274429 \\ a &= 0.2316419 \\ t &= \frac{1}{1 + a\,x} \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

有关$x = Q^{-1}(p)$的近似具有小于1.2×10^{-9}的绝对近似误差：

$$Q^{-1}(p) \approx \begin{cases} -U^{-1}(p), & 0 < p \leq 0.5 \\ U^{-1}(q), \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} & 0.5 < p < 1 \end{cases} \tag{5c}$$

对于$0 \le p \le 0.02425$，$U^{-1}(p)$ 的值可以计算如下：

$$t = \sqrt{-2\ln(p)}$$

$$U^{-1}(p) = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + C_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4} \tag{5d}$$

其中：

$$c_0 = 2.938163982698783$$
$$c_1 = 4.374664141464968$$
$$c_2 = -2.549732539343734$$
$$c_3 = -2.400758277161838$$
$$c_4 = -0.3223964580411365$$
$$c_5 = -0.007784894002430293$$

且：

$$d_1 = 3.754408661907416$$
$$d_2 = 2.445134137142996$$
$$d_3 = 0.3224671290700398$$
$$d_4 = 0.007784695709041462$$

对于$0.02425 < p \le 0.5$，$U^{-1}(p)$ 的值可以计算如下：

$$t = (p - 0.5)^2$$

$$U^{-1}(p) = (p - 0.5)\,\frac{\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5\}}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5} \tag{5e}$$

其中：

$$a_0 = 2.506628277459239$$
$$a_1 = -30.66479806614716$$
$$a_2 = 138.3577518672690$$
$$a_3 = -275.9285104469687$$
$$a_4 = 220.9460984245205$$
$$a_5 = -39.69683028665376$$

且：

$$b_1 = -13.28068155288572$$
$$b_2 = 66.80131188771972$$
$$b_3 = -155.6989798598866$$
$$b_4 = 161.5858368580409$$
$$b_5 = -54.47609879822406$$

通过将q视为等式(5d)和(5e)的p，可使用等式(5d)和(5e)计算等式(5c)的$U^{-1}(q)$。

应该注意的是，当p分别变为0和1时，等式(5c)中给出的$Q^{-1}(p)$分别为∞和$-\infty$，这要归因于等式(5d)中的$ln(p)$项。

如需要，$Q^{-1}(p)$的近似误差可减少如下：每等式 $x_0 = Q^{-1}(p)$ (5c), 那么：

$$x = x_0 - \sqrt{2\pi}\,\exp\left(\frac{x_0^2}{2}\right)\left(p - Q(x_o)\right) \tag{5f}$$

大多数现代数学软件包包含$F(x)$、Q(x)、erf(x) 、erfc(x)及其反数的概率函数。

在传播过程中涉及的大部分物理参量（功率、电压、衰减时间等）基本上都是正数参量，不能直接使用正态概率分布表示。正态概率分布在两类重要情况下使用：

– 表示随机变量在其平均值附近波动（例如闪烁减弱和增强）；

– 表示某随机变量的对数波动，此情况下变量的对数正态概率分布（见第4节）。

存在一个所谓正态坐标的图示已经上市，即正态累积概率分布用直线表示，该图示可购买。基至对于非正态概率分布的表达，也经常使用这些图示。

4 对数正态概率分布

对数正态概率分布为正态随机变量X的自然对数的正态概率分布。概率密度函数$p(x)$和累积密度函数$F(x)$：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{7}$$

其中m和σ 是对数X的平均和标准方差（即并非X的平均和标准方差）。

对数正态概率分布经常出现在传播概率分布，与功率、场强电平相关。功率和场强电平通常用分贝表示，两者的概率分布有时是对对数正态分布的参考而不是正态分布参考。就概率分布对时间而言（例如衰减时长），由于自然的因变量是时间，而不是时间的对数，所以对数正态的术语总能被明确地使用。

由于对数正态概率分布变量的倒数也呈对数正态概率分布，此概率分布有时会出现在变化率的概率分布中（例如衰减率dB/s，降雨率mm/hr。）

在随机变量的值是由其他近似的同等权重随机变量的乘积产生时，与正态概率分布相比，通常更容易发生对数概率正态分布。

与正态概率分布不同的是，对数正态概率分布极不对称。特别是平均值、中值和最可能值（称作模式）均不相同（见图1中的虚线）。

随机变量X的特性数值为：

– 最可能值： $\exp(m - \sigma^2)$；

– 中值： $\exp(m)$；

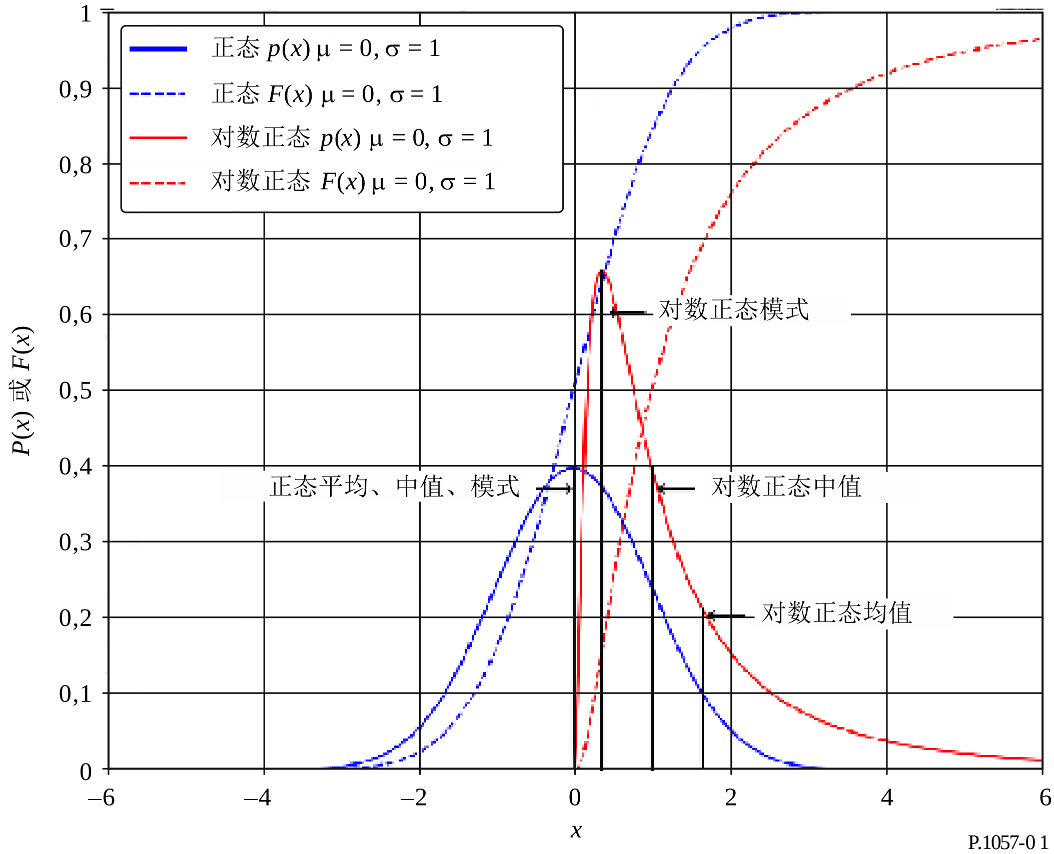
– 平均值： $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$；

– 平方根值： $\exp(m+\sigma^2)$；

– 标准偏差： $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$。

图1

正态和对数正态概率分布



5 瑞利概率分布

瑞利概率分布是一种正值随机变量的连续概率分布。例如呈零平均值的两独立随机变量y和z的二维正态概率分布，且标准方差σ 相同的情况下，随机变量

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

表现为瑞利概率分布。瑞利概率分布亦表示某矢量长度的概率分布，该矢量为大量类似振幅且相位均匀分布的矢量之和，其中每个构成矢量的相位具有均匀的概率分布。

瑞利概率分布下的概率密度函数和累积函数分布的公式为：

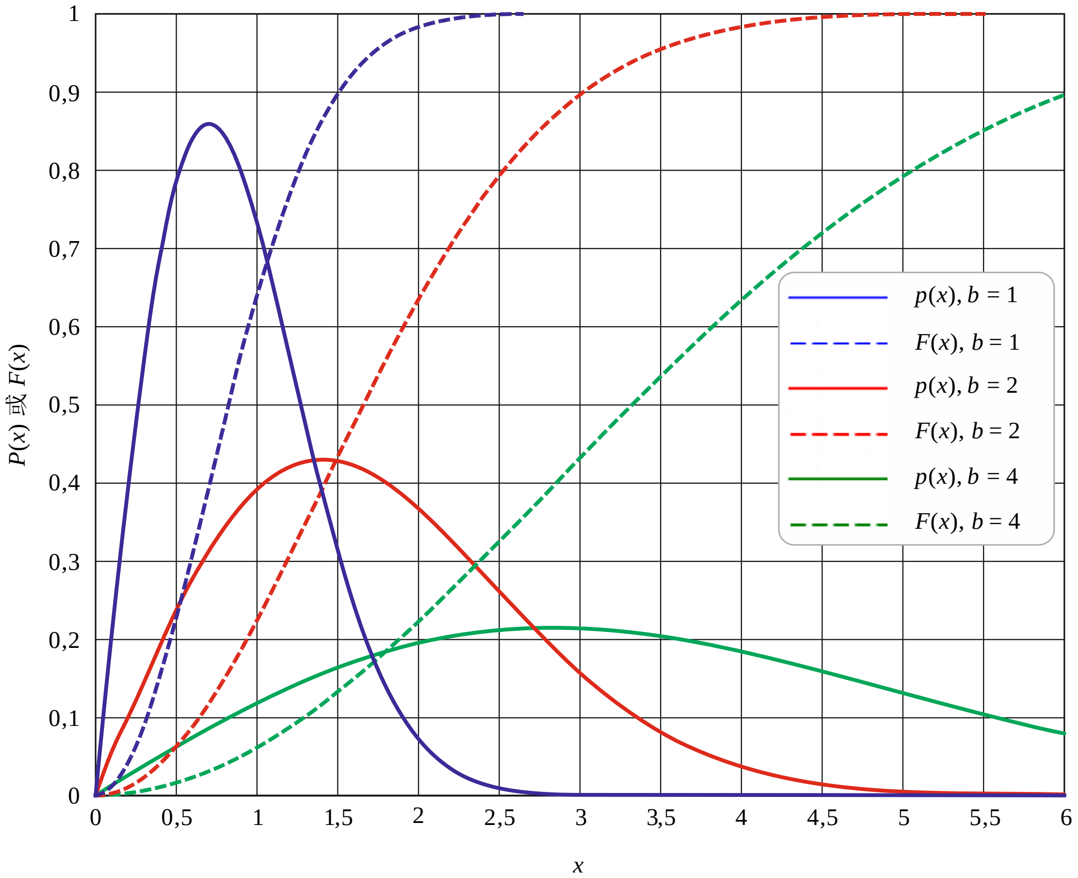
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

图2提供了三种不同b值下$p(x)$和$F(x)$的示例。

图2

瑞利概率分布



P.1057-0 2

定义$b = \sigma\sqrt{2}$，各类随机变量X的特征值如下：

– 最或然值：$\frac{b}{\sqrt{2}}$；

– 中值：$b\sqrt{\ln 2} = 0.833b$；

– 平均值：$\frac{b}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.886$b；

– 平方根值：b；

– 标准方差：$b\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} = 0.463b$。

瑞利概率分布通常适用于x的较小值。在这种情况下，累积分布函数$F(x)$接近：

$$F(x) \approx \frac{x^2}{b^2} \tag{11}$$

此公式可近似理解为：随机变量X的概率将有一个小于x的并与x的平方成正比的值。如果该兴趣变量为电压，则其平方表示信号的功率。换言之，以分贝为单位，每出现十种概率功率会下降10 dB。此属性通常被用于确定接收电平是否呈渐近性的瑞利概率分布。但应注意到，其它概率分布可能会有相同的表现。

在无线电传播中，瑞利概率分布发生在无主宰散射分量的多个独立和任意地点上的散射物造成的散射分析中出现，其中没有单个散射分量占主导地位。

6 对数正态分布和瑞利概率分布的组合

在某些情况下，随机变量的概率分布可视为两种概率分布，即长期变量（即慢）对数正态概率分布和短期变量（即快）瑞利概率分布的组合。此概率分布出现在无线电波传播分析中，当非均匀的媒介传播具有不可忽略的长期变量，例如：对流层散射的情况。

随机变量的瞬时概率分布可通过考虑瑞利概率分布来获取，其中变量平均值（平均平方值）本身为具备对数正态概率分布的随机值变量。

对数正态分布和瑞利概率分布组合的概率密度函数为：

$$\mathrm{p}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-kx^2\exp[-2(\sigma u+m)]-2(\sigma u+m_l)-\frac{u^2}{2}\right\}\mathrm{d}\,u \qquad (12a)$$

对数正态分布和瑞利概率分布组合的余补累积分布函数为：

$$1-F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-kx^2exp[-2(\sigma u+m)]-\frac{u^2}{2}\right\} \qquad (12b)$$

其中m和σ，用neper（奈培）表示，为正态概率分布与对数正态分布的平均值和标准方差。

k的值取决于对σ和m的解释：

1) 如果σ和m是最可能的瑞利概率分布值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k=1/2$；

2) 如果σ和m是瑞利概率分布中值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k=\ln 2$；

3) 如果σ和m是瑞利概率分布平均值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k=\pi/4$；

4) 如果σ和m是瑞利概率分布均方根值的自然对数的标准方差和平均值，那么$k\ =1$。

瑞利对数正态概率分布组合的平均值（E）、均方根（RMS）、标准方差（SD）、中值和最可能的值是：

平均值*E*：

$$E=\int_0^{\infty}x\sqrt{\frac{2}{\pi}}kx\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-kx^2[-2(\sigma u+m)]-2(\sigma u+m)-\frac{u^2}{2}\right)du\right]dx \qquad (13a)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right) \qquad (13b)$$

均方根值*RMS*：

$$RMS = \sqrt{\int_0^\infty x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right) du\right] dx} \qquad (13c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\,(m + \sigma^2) \qquad (13d)$$

标准方差*SD*：

$$SD = \sqrt{\frac{1}{k} \exp\left(2(m + \sigma^2)\right) - \frac{\pi}{4k} \exp\left(2\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)} \qquad (13e)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - \frac{\pi}{4}} \qquad (13f)$$

中值：

中值是下列方程式的解x的值：

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\left(-2(\sigma u + m)\right) - \frac{u^2}{2}\right) du \qquad (13g)$$

即

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp\left(-2(\sigma u + m)\right) - \frac{u^2}{2}\right) du \qquad (13h)$$

最可能的值：

最可能的值（即众数）是下列方程式的解x的值：

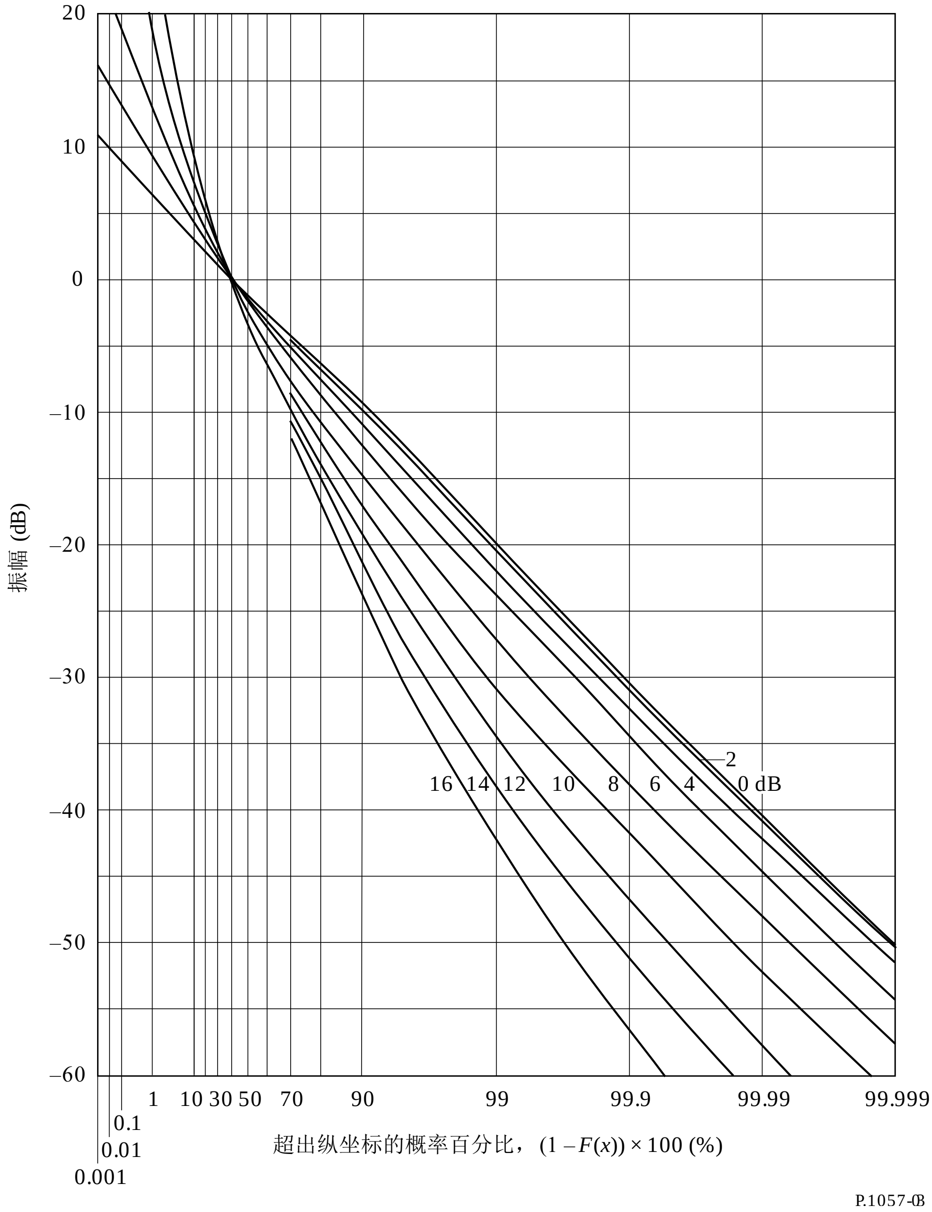
$$\int_{-\infty}^{\infty} \{1 - 2kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)]\} \exp\left\{-kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right\} \mathrm{d}u = 0 \qquad (13i)$$

图3中的图表显示了一些标准方差值的概率分布，其中$m = 0$，$k = 1$。

图3

对数正态分布和瑞利概率分布的组合

（将对数正态概率分布的标准方差作为一个参数）



7 Nakagami-Rice（Nakagami n）概率分布

与Nakagami m概率分布不同，Nakagami-Rice（Nakagami n）概率分布是对瑞利概率分布的概括。可将其看作是矢量长度的概率分布，其中所述矢量为固定矢量之和且其长度呈瑞利概率分布。

或者，在具有两个独立变量x和y且使用相同标准方差σ的二维正态概率分布中，与此概率分布中心外一固定点概率分布相交的矢量长度呈Nakagami-Rice概率分布。

如果a用于指定固定矢量的长度，且σ为瑞利矢量的最或然长度，则概率密度函数公式为：

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2}\right) \qquad (14)$$

式中I_0为经修订的第一类零阶贝塞尔函数（Bessel functions）。

此概率分布取决于固定矢量振幅与随机矢量平方根振幅$\sigma\sqrt{2}$系数，两类主要无线电波传播应用如下：

a) 固定矢量的功率为常数，但固定和随机分量的总功率是一个随机概率分布。

研究粗糙表面光反射的影响，或考虑固定分量外的多径分量时，平均功率的计算使用：$(a^2 + 2\sigma^2)$。该概率分布通常使用K定义：

$$K = 10 \log \left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{dB} \qquad (15)$$

即，固定矢量功率与随机分量之比。

b) 固定和随机分量的总功率为常数，但两个分量会发生变化

为研究大气中的多径传播问题，可认为固定矢量功率之和及随机矢量的平均功率为常数，因为随机矢量所载功率源来自固定矢量的功率。如果总功率为单一，则：

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1 \qquad (16)$$

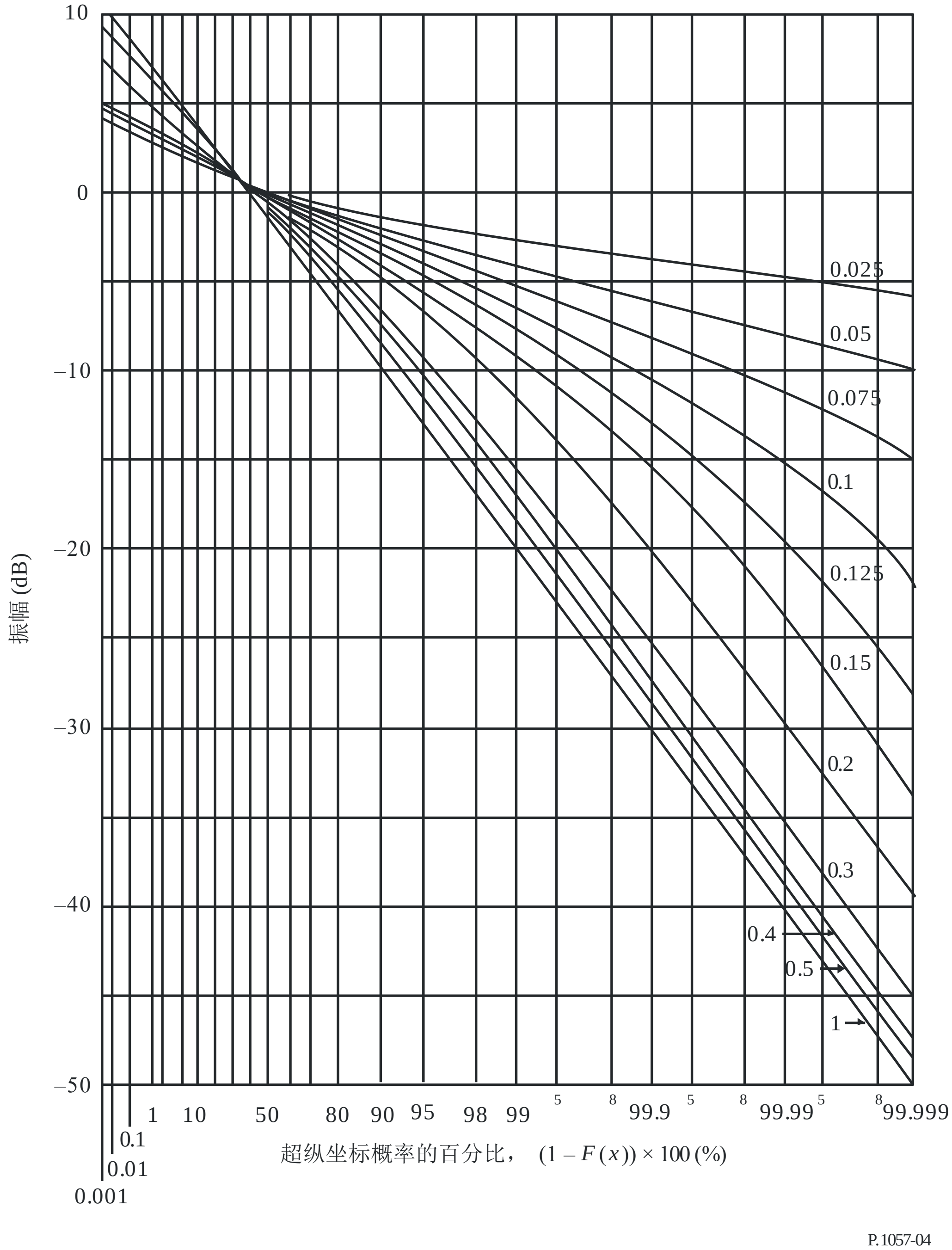
且随机矢量承载的那部分功率等于$2\,\sigma^2$。如果X为合成矢量随机变量，随机变量X的概率比x大：

$$\text{Prob}\ (X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \qquad (17)$$

图4所示为随机矢量承载的不同功率值的概率分布情况。

图4

恒定总功率的Nakagami-Rice概率分布
（随机矢量所载功率为参数）



为方便实际应用，振幅使用分贝计量，概率的计量方式应使瑞利分布可用直线表示。在随机矢量总功率那部分值大于近0.5时，曲线渐近接近于瑞利概率分布，由于固定矢量的振幅与随机矢量的振幅同阶，基本无法区分。相比之下，随机矢量那部分总功率较小值的振幅概率分布趋向于正态概率分布。

虽然振幅具有Nakagami-Rice概率分布，但相位概率密度函数为：

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a\cos\theta}{\sigma}\,e^{\frac{a^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\left[1 + erf\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\right\}\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

8 伽玛概率分布和指数概率分布

与此前源于高斯概率分布的各种概率分布不同，伽玛概率分布是对指数概率分布的概括，是一种正非限定性变量的概率分布。概率密度函数为：

$$p(x) = \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\,x^{\nu-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{19}$$

式中Γ为二阶尤拉函数（Euler's Function）。

此累积分布函数取决于两个参数α和ν。但α仅是变量x的计量参数。随机变量X的特征值如下：

– 平均值： $\frac{\nu}{\alpha}$

– 平方根值： $\frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– 标准方差： $\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

表达累积分布函数的整数无法用闭式评估，但ν的整数值除外。下述为两种特殊情况下的系列扩展表达式：

$x << 1$的极数逼近系列：

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^{\nu}\left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)\,(\nu+2)} + ...\right] \tag{20}$$

$x >> 1$的渐近逼近：

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,(\alpha x)^{\nu-1}\left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + ...\right] \tag{21}$$

ν等于1的情况，$F(x)$成为一种指数概率分布。对于整数ν，渐进扩展的项数是固定的，且明确的给出了伽玛概率分布。

无线电波传播中，ν的有用值为1×10^{-2}至1×10^{-4}阶中的很小值。零附近ν值的计算公式如下：

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu \tag{22}$$

此情形下，αx的值> 0.03：

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \tag{23}$$

实际计算时，可接近上述整数近似的值，如：

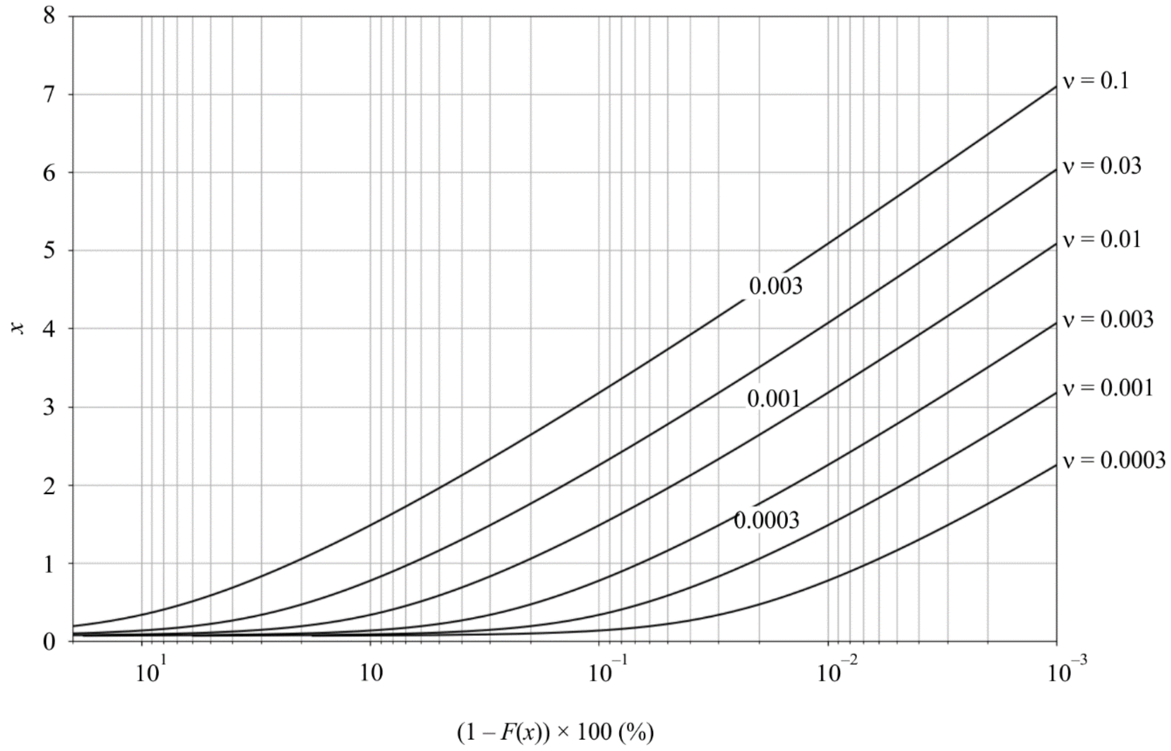
$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0.68 + \alpha x + 0.28 \log \alpha x} \tag{24}$$

在$\nu < 0.1$且$\alpha x > 0.03$的范围内有效。

用小ν值补充伽玛函数余补累积概率分布的情况如图5所示。比零大许多的X变量概率总是很小。鉴于降雨时间总百分比通常在2%至10%这一范围内，此现象专门解释了为何要使用伽玛概率分布表示降雨率。

图5

伽玛概率分布
$\alpha = 1, \nu \leq 0.1$



P.1057-05

9 Nakagami*m*分布

Nakagami *m*概率分布适用于非限定性正值。概率密度函数为：

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\,\Omega^m}\, x^{2m-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{25}$$

Ω为计量参数，为x^2的平均值，即：

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{26}$$

其中*m*表示Nakagami *m*概率分布的一个参数，并非本附件前几节中的平均值。

此概率分布与上文提到的概率分布存在着多种关系：

– 如果某随机变量呈Nakagami *m*概率分布，则此随机变量的平方呈伽玛概率分布；

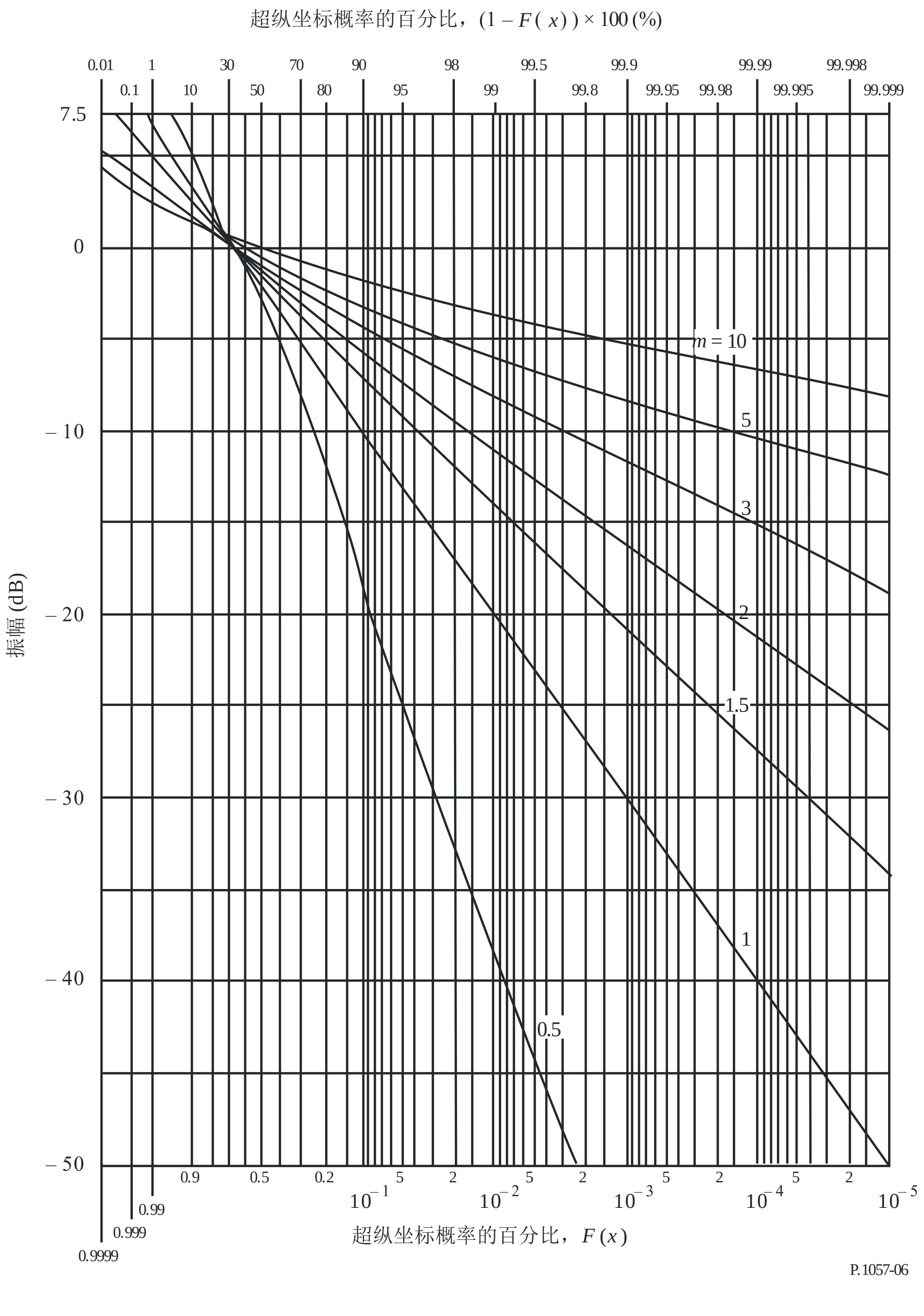
– 当$m = 1$时，得到的是Nakagami *m*概率分布呈瑞利概率分布；

– 当$m = 1/2$时，得到的是Nakagami *m*概率分布呈单侧正态概率分布。

因此可将Nakagami *m*概率分布和Nakagami-Rice概率分布为瑞利概率分布的两种不同概括。对于非常低的信号电平，Nakagami *m*概率分布的斜率接近取决于参数*m*的值，而与限值斜率不变的Nakagami-Rice概率分布不同（每十种概率为10 dB）。图6所示为参数*m*各值的累积Nakagami *m*概率分布。

图6

Nakagami-*m*概率分布（$\overline{x^2} = 1$）



10 皮尔森χ^2概率分布

皮尔森χ^2概率密度函数为：

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\, e^{\frac{-\chi^2}{2}}\,(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \tag{27}$$

其中χ^2为非限定性正变量，且正整数参数ν为概率分布自由度的度数。Γ表示Euler函数的第二阶。根据ν的奇偶性，可得到：

$$\nu\text{为偶数：}\quad \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)! \tag{28}$$

$$\nu\text{为奇数：}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{29}$$

累积分布函数的计算公式为：

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\, dt \tag{30}$$

平均和标准方差公式为：

$$m = \nu \tag{31}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \tag{32}$$

χ^2概率分布的一项基本属性为，当n个x_i\{i=1, 2, … , n\}变量的平均m_i和标准方差σ_i呈高斯概率分布时，变量值：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{33}$$

呈χ^2概率分布，自由度的角度为n。具体讲，小高斯变量的平方呈χ^2概率分布，自由度为1度。

如果若干独立变量呈χ^2概率分布，则其和亦呈χ^2概率分布，且自由度的度数等于变量自由度之和。

χ^2概率分布与伽玛概率分布并无本质区别。这两种概率分布关联如下：

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha\, x \tag{34}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{35}$$

与之相似，χ^2概率分布与Nakagami-*m*概率分布关联如下：

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega}\, x^2 \tag{36}$$

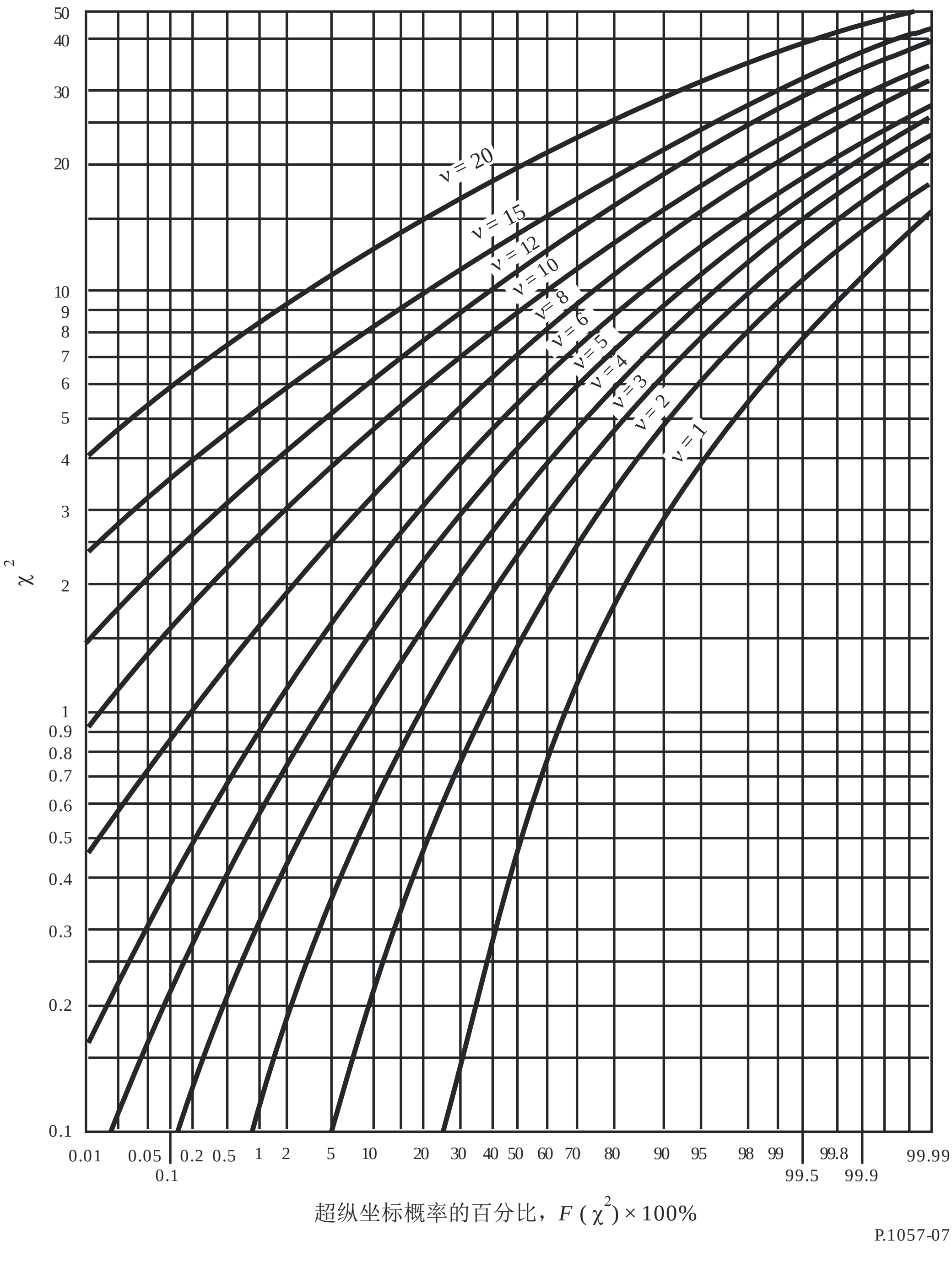
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{37}$$

统计测试中使用χ^2概率分布来确定某参量（例如降雨率、衰减等）的一系列试验值是否可通过统计概率分布建模。

图7给出了一些ν值的χ^2概率分布图。

图7

χ^2概率分布



11 威布尔概率分布

威布尔概率分布是正随机变量的连续概率分布。

威布尔概率分布的概率密度函数和累积分布函数由下式给出：

$$p(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad x \geq 0 \tag{38}$$

$$F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_0^x \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{39}$$

其中$k > 0$是形状参数，$\lambda > 0$是分布的比例参数。

其余补累积分布函数是一个拉伸指数函数：

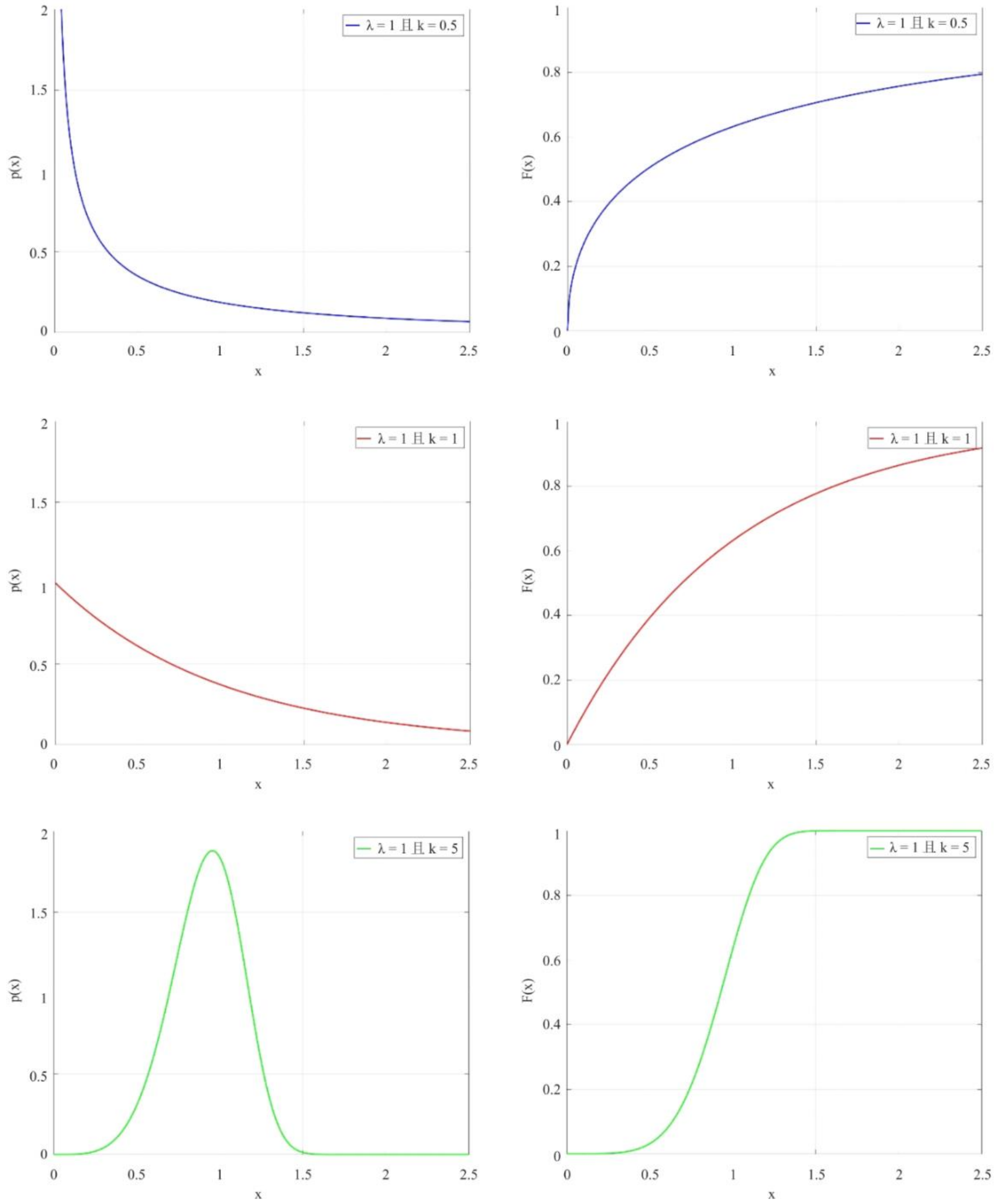
$$G(x) = 1 - F(x) = \frac{k}{\lambda}\int_x^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k} dt = e^{-(x/\lambda)^k} \tag{40}$$

威布尔分布介于指数分布($k = 1$)和瑞利分布($k = 2$和$\lambda = \sqrt{2}\sigma$)之间。

图8提供了$\lambda = 1$和三种不同k值时的$p(x)$和$F(x)$示例。

图8

威布尔概率分布



P.1057-08

服从威布尔概率分布的随机变量X的特征值为：

– 最可能值：$\begin{cases} \lambda\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/k} & k > 1 \\ 0 & k \le 1 \end{cases}$

– 中值：$\lambda(\ln 2)^{1/k}$

– 平均值：$\lambda\Gamma(1 + 1/k)$

– 均方根值：$\lambda\sqrt{\Gamma(1 + 2/k)}$

– 标准偏差：$\lambda\sqrt{\Gamma(1 + 2/k) - \left(\Gamma(1 + 1/k)\right)^2}$

在无线电波传播中，在氧气、水蒸气和风速的分析中可能出现威布尔概率分布。

附件 2

通过对数正态余补累积分布模拟余补累积分布的分步程序

1 背景

对数正态累积分布定义如下：

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{41}$$

或与之等效的：

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t \tag{42}$$

与此类似，对数正态余补累积分布定义如下：

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{43}$$

或与之等效的：

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t \\ &= Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right) \end{aligned} \tag{44}$$

其中$Q(.)$是正态余补累积概率积分。参数m和σ可以从系列n对(G_i,x_i)中估算得出，如下段所述。

2 步骤

对两个对数正态参数m和σ估算如下：

步骤1：建立一n对 (G_i,x_i) 集合，其中G_i是超过x_i的概率。

步骤2：将n对集合从 (G_i,x_i) 转换为 $(Z_i, \ln x_i)$，其中：

$$Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i) \text{ 或与之等效的，} Z_i = Q^{-1}(G_i)$$

步骤3：通过执行线性方程的最小平方拟合确定变量m和σ：

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

如下所示：

$$\sigma = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

附件3

通过威布尔余补累积分布模拟
余补累积分布的分步程序

1 背景

威布尔累积分布定义为：

$$F(x)=\frac{k}{\lambda}\int_{0}^{x}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(t/\lambda)^{k}}dt$$

$$F(x)=1-e^{-(x/\lambda)^{k}} \tag{45}$$

类似地，威布尔余补累积分布定义为：

$$G(x)=\frac{k}{\lambda}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(t/\lambda)^{k}}dt$$

$$G(x)=e^{-(x/\lambda)^{k}} \tag{46}$$

参数λ（比例）和k（形状）可以从n对 (G_i, x_i) 的集合中进行估算，如下段所述。

2 程序

估算两个威布尔参数λ（比例）和k（形状），如下所示：

步骤1：构建n对 (G_i, x_i) 的集合，其中G_i是超过x_i的概率。

步骤2：将n对的集合从 (G_i, x_i) 变换到 $(Z_i, \ln x_i)$，其中：

$$Z_i=\ln(-\ln G_i)$$

步骤3：通过对线性函数进行最小二乘法拟合来确定变量a和b：

$$\ln x_i=aZ_i+\mathrm{b}$$

如下所示：

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}Z_i\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}Z_i\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-\left[\sum_{i=1}^{n}Z_i\right]^2}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-a\sum_{i=1}^{n}Z_i}{n}$$

步骤4：计算参数λ和k，如下所示：

$$\lambda=e^{b}$$

$$k=\frac{1}{a}$$

____