РЕКОМЕНДАЦИЯ МСЭ-R P.1057-2

Распределения вероятностей, касающихся моделирования распространения радиоволн

(1994-2001-2007)

Сфера применения

Моделирование распространения радиоволн требует широкого использования статистических методов. В настоящей Рекомендации приводится общая информация по наиболее значимым распределениям вероятностей, с тем чтобы обеспечить общую основу для статистических методов прогнозирования распространения радиоволн, которые используются в Рекомендациях исследовательских комиссий по радиосвязи.

Ассамблея радиосвязи МСЭ,

учитывая,

a) что распространение радиоволн в основном происходит в случайным образом изменяющейся среде, что приводит к необходимости анализировать явления распространения с помощью статистических методов;

b) что в большинстве случаев изменения параметров распространения во времени и пространстве можно удовлетворительно описать с помощью известных статистических распределений;

c) что поэтому важно знать основные свойства распределения вероятностей, наиболее широко используемых при статистических исследованиях распространения радиоволн,

рекомендует,

1 что при планировании служб радиосвязи и прогнозировании параметров рабочих характеристик систем следует использовать статистические сведения, относящиеся к моделированию распространения радиоволн, представленные в Приложении 1;

2 что следует использовать поэтапную процедуру, представленную в Приложении 2, для аппроксимации дополнительного интегрального распределения посредством логарифмически нормального дополнительного интегрального распределения.

Приложение 1

Распределения вероятностей, касающихся моделирования распространения радиоволн

1 Введение

Практика показала, что информации о средних значениях уровней принимаемых сигналов недостаточно, для того чтобы получить параметры характеристик систем радиосвязи. Необходимо также учитывать их изменения во времени, пространстве и в зависимости от частоты.

Динамическое поведение как полезных сигналов, так и помех играет решающую роль при анализе надежности системы и при выборе параметров системы, таких как тип модуляции. Очень важно знать величину и скорость флуктуаций сигнала, для того чтобы правильно определить такие параметры, как тип модуляции, мощность передачи, коэффициент защиты от помех, способы разнесения, методы кодирования и т. д.

Для описания характеристик системы связи часто оказывается достаточно получить временной ряд значений флуктуаций сигнала и рассматривать его как стохастический процесс. Однако моделирование флуктуаций сигнала для целей прогнозирования характеристик радиосистемы требует также знания механизма взаимодействия радиоволн с атмосферой (нейтральной атмосферой и ионосферой).

Состав и физическое состояние атмосферы крайне изменчивы в пространстве и во времени. Поэтому для моделирования взаимодействия радиоволн необходимо широко использовать статистические методы, позволяющие описать различные физические параметры атмосферы, а также электрические параметры, определяющие поведение сигнала и характеризующие процесс взаимодействия, связывающий эти параметры.

Ниже приводится некоторая общая информация о наиболее важных законах распределения вероятностей. Эти законы могут служить общей основой для статистических методов прогнозирования распространения, предлагаемых в Рекомендациях исследовательских комиссий по радиосвязи.

2 Распределение вероятностей

Стохастические процессы, как правило, описываются либо с помощью функции плотности вероятности, либо с помощью интегральной функции распределения. Функция плотности вероятности для переменной x, обозначаемая здесь как $p(x)$, такова, что вероятность того, что x будет принимать значения в пределах бесконечно малого интервала от x до $x + dx$, равняется $p(x)\,dx$. Интегральная функция распределения, обозначаемая как $F(x)$, показывает вероятность того, что переменная принимает значение, меньшее x, т. е. эти две функции связаны следующим образом:

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

или:

$$F(x) = \int_c^x p(t)\ \mathrm{d}t\ ,$$

где c – наименьшее предельное значение, которое может принимать t.

Наиболее важными являются следующие распределения:

– нормальное или гауссово распределение;

– логарифмически нормальное распределение;

– рэлеевское распределение;

– комбинированное логарифмически нормальное и рэлеевское распределение;

– распределение Накагами-Райса (n-распределение Накагами);

– гамма-распределение и экспоненциальное распределение;

– m-распределение Накагами;

– распределение χ^2 Пирсона.

3 Гауссово или нормальное распределение

Это распределение применяется к непрерывной переменной любого знака. Плотность вероятности составляет:

$$p(x) = \mathrm{e}^{-T(x)}. \tag{1}$$

Причем $T(x)$ – является неотрицательным полиномом второго порядка. Если в качестве параметров мы используем среднее значение, m, и стандартное отклонение, σ, то $p(x)$ записывается обычным способом:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \tag{2}$$

следовательно:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right], \tag{3}$$

где:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Нормальное интегральное распределение $F(x)$ обычно табулируется в сокращенном виде, т. е. m берется равным нулю, а σ – равным единице. В таблице 1 приводятся соотношения между x и $F(x)$ для ряда округленных значений x или $F(x)$.

ТАБЛИЦА 1

x	$1 - F(x)$	x	$1 - F(x)$
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1{,}350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3{,}167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2{,}867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9{,}866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

Для практических расчетов функцию $F(x)$ можно представить в приближенном виде, например в виде нижеследующего уравнения, которое справедливо для положительных значений x с погрешностью менее $2{,}8 \times 10^{-3}$:

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}\left(0{,}661\,x + 0{,}339\sqrt{x^2 + 5{,}51}\right)}. \tag{5}$$

Гауссово распределение встречается в основном в тех случаях, когда значения рассматриваемого параметра являются результатом суммарного воздействия многочисленных случайных причин, каждая из которых имеет сравнительно небольшую значимость.

В распространении радиоволн большинство рассматриваемых физических параметров (мощность, напряжение, время замирания и т. д.) являются в основном положительными и потому не могут быть непосредственно представлены в виде гауссова распределения. В то же время это распределение используется в двух важных случаях:

– для описания флуктуаций параметра относительно его среднего значения (мерцания);

– для описания параметра, представленного в логарифмическом масштабе. В этом случае мы получим логарифмически нормальное распределение, о котором речь пойдет ниже.

Диаграммы, в которых одна из координат является так называемой гауссовой координатой, пригодны в практических целях, т. е. масштаб в них выбран такой, что гауссово распределение представляет собой прямую линию. Такие диаграммы используются очень часто даже для представления негауссовых распределений.

4 Логарифмически нормальное распределение

Это распределение положительной переменной, логарифм которой имеет гауссово распределение. Поэтому можно сразу записать плотность вероятности и интегральную плотность в виде:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{7}$$

Однако в этих соотношениях m и σ являются средним значением и стандартным отклонением не самой величины x, а ее логарифма. Характеристические значения переменной x можно легко найти. А именно:

– наиболее вероятное значение: $\exp\,(m - \sigma^2)$

– медианное значение: $\exp\,(m)$

– среднее значение: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

– среднеквадратичное значение: $\exp\,(m + \sigma^2)$

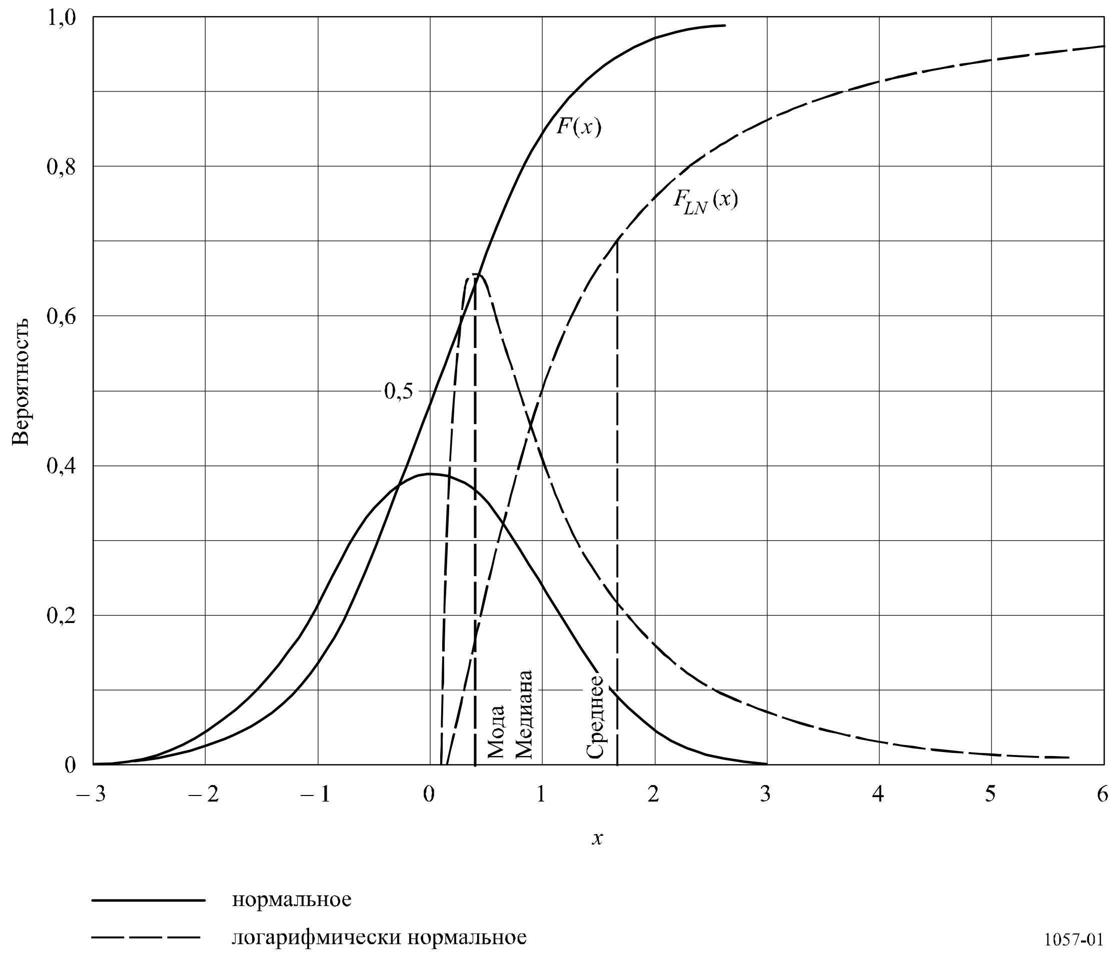
– стандартное отклонение: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\,(\sigma^2) - 1}\,.$

В отличие от гауссова распределения логарифмически нормальное распределение очень асимметрично. В частности, среднее значение, медианное значение и наиболее вероятное значение (часто называемое модой) не совпадают (см. рис. 1).

Логарифмически нормальное распределение очень часто используется в связи с распространением радиоволн, главным образом для описания параметров, связанных или с мощностью, или с напряженностью поля, или со временем. Мощность или напряженность поля выражаются в основном только в децибелах, так что в этом случае обычно говорят о нормальном распределении уровней. В случае параметров, связанных со временем (например, длительность замираний), логарифмически нормальное распределение используется в явном виде, поскольку переменной величиной является секунда или минута, а не их логарифм.

РИСУНОК 1

Нормальное и логарифмически нормальное распределения



Поскольку обратная величина переменной с логарифмически нормальным распределением также имеет логарифмически нормальное распределение, это распределение иногда вычисляется для скоростей (величин, обратных времени). Например, оно используется для описания распределения интенсивности дождей, по крайней мере, для низких и средних значений интенсивности.

По сравнению с гауссовым распределением можно считать, что логарифмически нормальное распределение означает, что численные значения переменной являются результатом мультипликативного действия многочисленных причин, каждая из которых в отдельности большого влияния не оказывает.

5 Рэлеевское распределение

Рэлеевское распределение применяется в случае положительной непрерывной переменной, величина которой не ограничена. Она связана с гауссовым распределением следующим образом. При заданных двухмерному гауссову распределению двух независимых переменных y и z нулевого среднего с одинаковым стандартным отклонением σ, случайная переменная

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

следует рэлеевскому распределению, а наиболее вероятное значение x равно σ. Поскольку x – это длина вектора, соединяющего какую-либо точку на двухмерном гауссовом распределении с центром этого распределения, можно сделать вывод, что рэлеевское распределение представляет собой распределение длины вектора, которая является суммой векторов с небольшими амплитудами, фазы которых имеют одинаковое распределение.

Плотность вероятности и интегральное распределение определяются как:

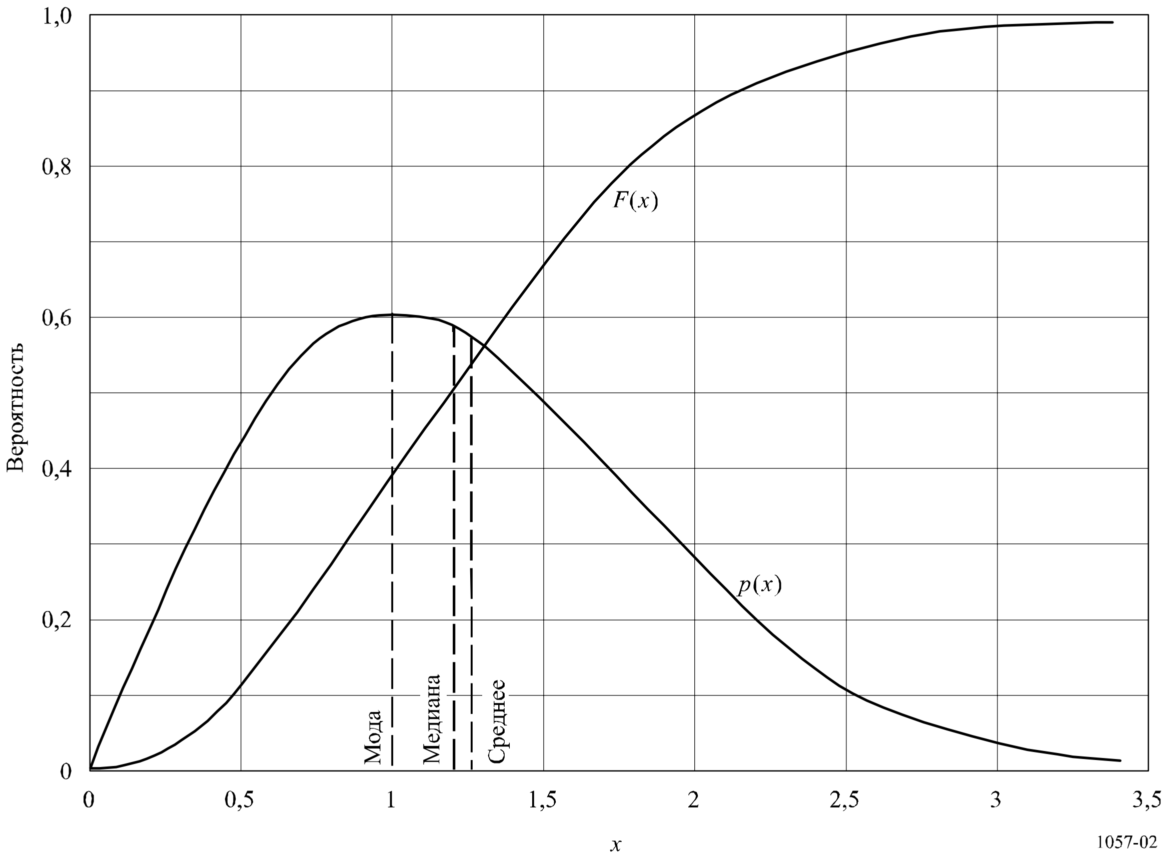
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{10}$$

На рис. 2 представлены функции $p(x)$ и $F(x)$.

РИСУНОК 2

Рэлеевское распределение



Характеристические значения переменной следующие:

– наиболее вероятное значение: σ

– медианное значение: $\sigma\sqrt{2\ln 2} = 1{,}18\,\sigma$

– среднее значение: $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}25\,\sigma$

– среднеквадратичное значение: $\sigma\sqrt{2} = 1{,}41\,\sigma$

– стандартное отклонение: $\sigma\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0{,}655\,\sigma$.

Отметим, что σ – это стандартное отклонение гауссова распределения, с которым связано рэлеевское распределение.

Рэлеевское распределение часто используется только вблизи начала координат, т. е. для низких значений x. В этом случае имеем:

$$F(x) \cong \frac{x^2}{2\sigma^2}. \tag{11}$$

Это можно интерпретировать следующим образом: вероятность того, что случайная величина X будет иметь значение, меньшее x, пропорциональна квадрату этого значения. Если рассматриваемой переменной является напряжение, то ее квадрат представляет собой мощность сигнала. Другими словами, на шкале децибелов мощность уменьшается на 10 дБ за каждую декаду изменения вероятности. Эта особенность часто используется для того, чтобы определить, следует ли уровень принимаемого сигнала рэлеевскому распределению, по крайней мере, асимптотически. Надо, однако, отметить, что и другие распределения могут иметь аналогичные свойства.

В частности, рэлеевское распределение имеет место в явлениях рассеяния.

6 Комбинированное логарифмически нормальное и рэлеевское распределение

В некоторых случаях распределение случайной переменной можно рассматривать как результат комбинирования двух распределений, а именно, логарифмически нормального для долгосрочных изменений и рэлеевского для быстрых изменений. Распределение мгновенных значений можно получить, если рассматривать рэлеевскую переменную, среднее (или среднеквадратичное) значение которой само является случайной величиной с логарифмически нормальным распределением.

Если m и σ используются для обозначения среднего значения и стандартного отклонения гауссова распределения, связанного с логарифмически нормальным распределением, то можно получить следующее распределение:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-x^2 \, e^{-2\sigma u} - \frac{u^2}{2} \right] du. \tag{12}$$

В этой формуле стандартное отклонение σ выражается в неперах. Если через σ' обозначить стандартное отклонение в децибелах, то получим:

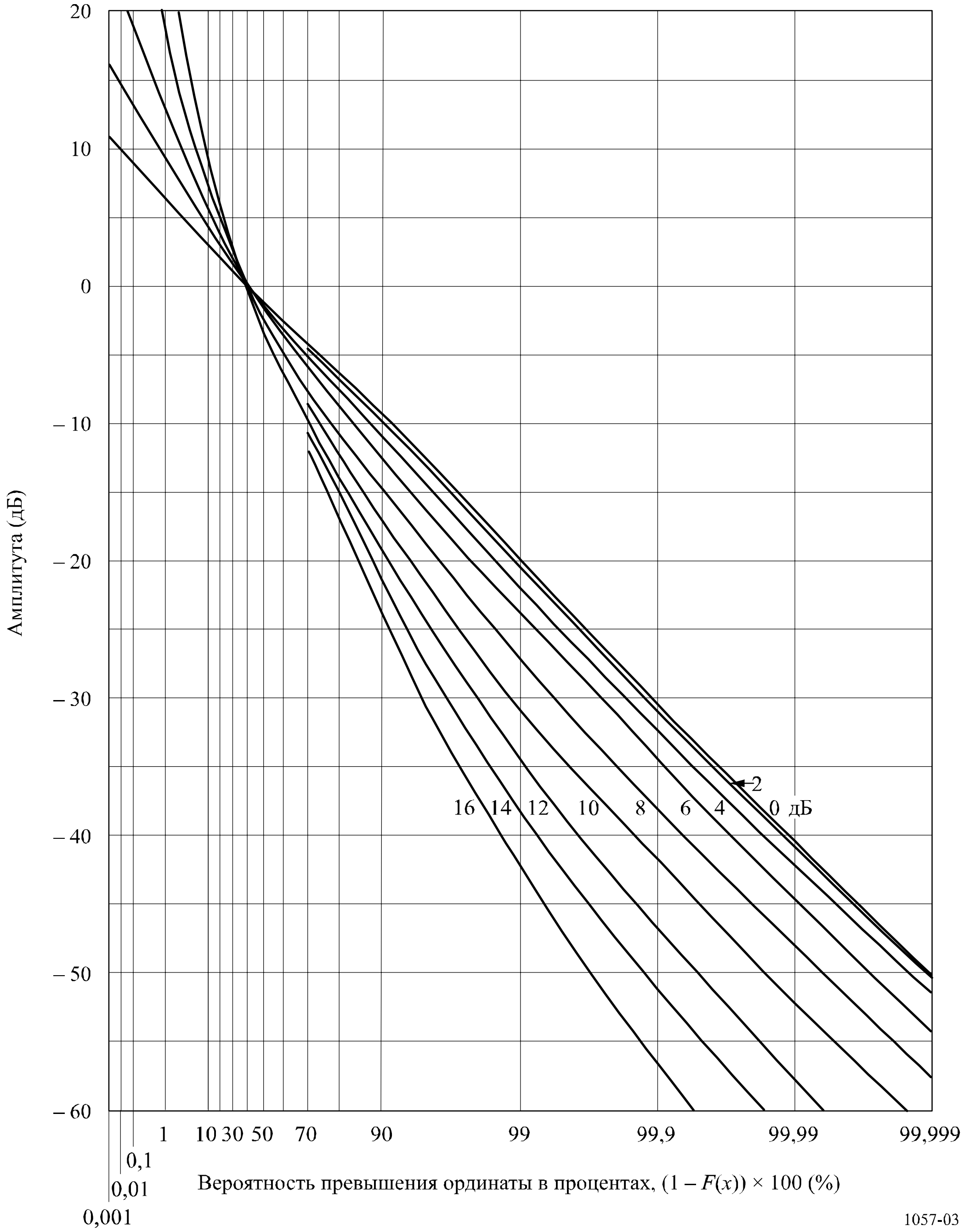
$$\sigma = 0{,}115 \, \sigma'. \tag{13}$$

На рис. 3 показан график этого распределения для ряда значений стандартного отклонения, причем среднее значение m принято равным нулю.

Такое распределение встречается, главным образом, при распространении радиоволн через неоднородности среды, когда характеристики последней подвержены ощутимым долгосрочным изменениям как, например, в случае тропосферного рассеяния.

РИСУНОК 3

Комбинированное логарифмически нормальное и рэлеевское распределение (со стандартным отклонением логарифмически нормального распределения в качестве параметра)



7 **Распределение Накагами-Райса** (*n*-распределение Накагами) (см. Примечание 1)

ПРИМЕЧАНИЕ 1. – Не путать с *m*-распределением Накагами.

Распределение Накагами-Райса также можно получить из гауссова распределения, и оно, кроме того, обобщает рэлеевское распределение. Его можно рассматривать как распределение длины вектора, который является суммой вектора фиксированной длины и вектора, длина которого подчиняется рэлеевскому распределению. Иными словами, при заданных двумерному гауссовому распределению двух независимых переменных x и y с одинаковым стандартным отклонением, σ, длина вектора, соединяющего точку в распределении с фиксированной точкой, находящейся не в центре распределения, будет следовать распределению Накагами-Райса.

Если через a обозначить длину фиксированного вектора, а через σ наиболее вероятную длину рэлеевского вектора, то плотность вероятности можно выразить как:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{a\,x}{\sigma^2} \right), \tag{14}$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода и нулевого порядка.

Это распределение зависит от двух параметров, но для целей, связанных с проблемами распространения радиоволн, следует выбрать правильное соотношение между амплитудой a фиксированного вектора и среднеквадратичной амплитудой $\sigma\sqrt{2}$ случайного вектора. Это соотношение зависит от предполагаемого применения. Ниже указываются два основных случая применения:

a) Мощность, определяемая фиксированным вектором, постоянна, но общая мощность, определяемая фиксированной и случайной составляющей, меняется.

При исследованиях, связанных с воздействием луча, отраженного от неровной поверхности, или при рассмотрении составляющих многолучевого распространения в дополнение к фиксированной составляющей, средняя мощность выражается как $(a^2 + 2\sigma^2)$. Распределение часто определяется на основании параметра K:

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \qquad \text{дБ}, \tag{15}$$

который представляет собой соотношение мощностей фиксированного вектора и случайной составляющей.

b) Общая мощность фиксированной и случайной составляющих постоянна, но обе составляющие изменяются.

Для целей, связанных с исследованием многолучевого распространения радиоволн, можно считать, что сумма мощности, определяемой фиксированным вектором, и средней мощности, определяемой случайным вектором, постоянна, поскольку мощность, определяемая случайным вектором, создается из мощности фиксированного вектора. Если общую мощность принять за единицу, то получим:

$$a^2 + 2\,\sigma^2 = 1, \tag{16}$$

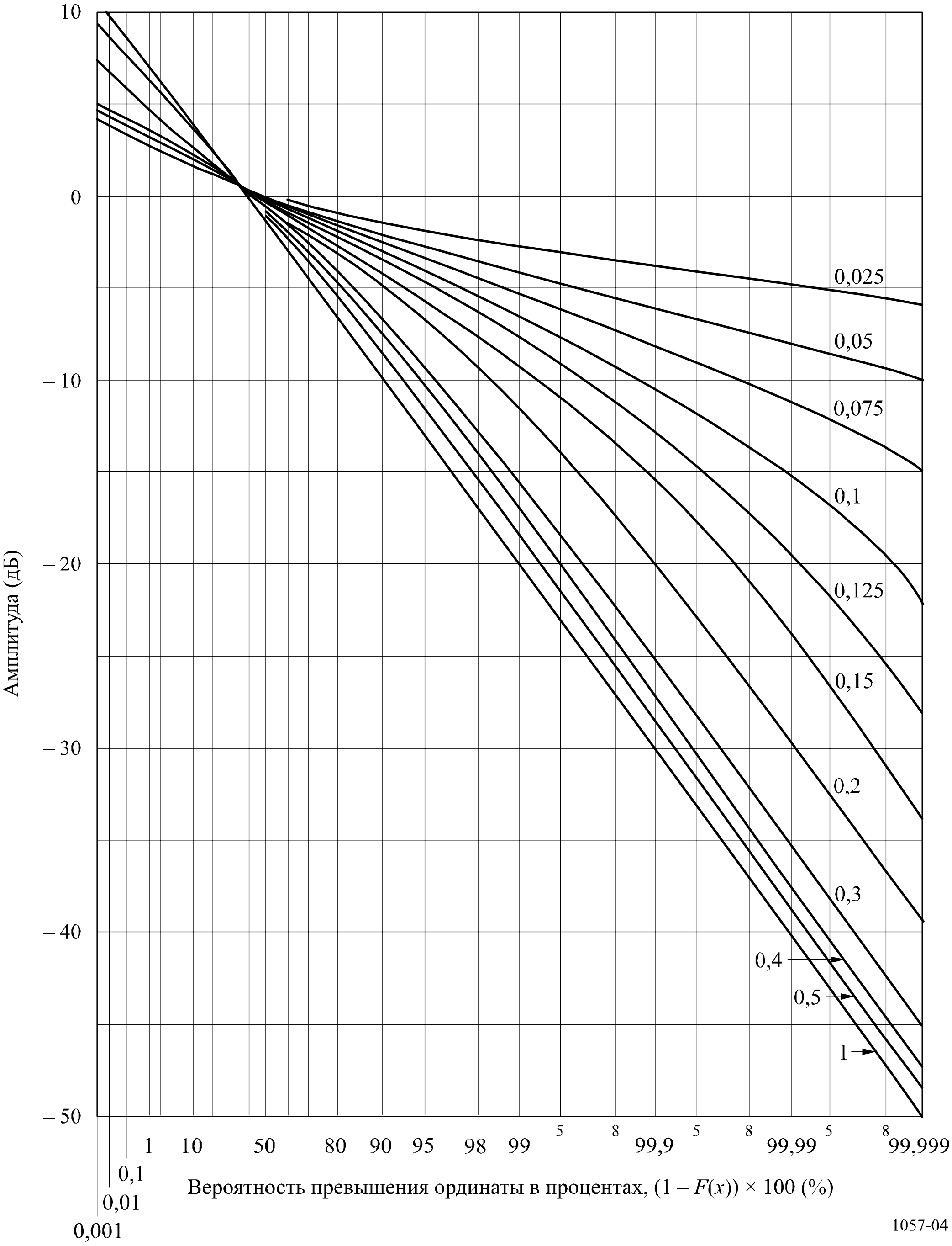
а доля общей мощности, определяемая случайным вектором, тогда равна $2\,\sigma^2$. Если через X обозначить мгновенное значение амплитуды результирующего вектора, а через x численное значение этой амплитуды, то вероятность того, что уровень мгновенной амплитуды превысит x, будет следующей:

$$\text{Prob}\ (X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2 \right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}\nu\,. \tag{17}$$

На рис. 4 показано это распределение для различных значений доли мощности, определяемой случайным вектором.

РИСУНОК 4

Распределение Накагами-Райса для постоянного уровня мощности (доля мощности, определяемая случайным вектором, использована в качестве параметра)



Для целей практического применения для амплитуд использовалась шкала в децибелах, а для вероятностей – такая шкала, в которой рэлеевское распределение представляется прямой линией. Можно видеть, что для значений доли мощности случайного вектора выше примерно 0,5, кривые стремятся к пределу, соответствующему рэлеевскому распределению. Это происходит из-за того, что в этом случае фиксированный вектор имеет амплитуду того же порядка величины, что и случайный вектор, и эти амплитуды практически неразличимы. Вместе с тем, можно показать, что для небольших значений такой доли мощности распределение амплитуд стремится к гауссову распределению.

8 Гамма-распределение и экспоненциальное распределение

В отличие от предыдущих распределений, которые выводятся из гауссова, гамма-распределение выводится из экспоненциального распределения и является его обобщением. Оно применяется к положительным неограниченным по величине переменным. Плотность вероятности составляет:

$$p(x) = \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \, e^{-\alpha x}, \tag{18}$$

где Γ – функция Эйлера второго порядка.

Это распределение зависит от двух параметров α и ν. Однако α является всего лишь масштабным параметром переменной x. Характеристические значения переменной следующие:

– среднее значение: $\dfrac{\nu}{\alpha}$

– среднеквадратичное значение: $\dfrac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– стандартное отклонение: $\dfrac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$.

Интеграл, выражающий интегральное распределение, нельзя определить в замкнутом виде, за исключением целых значений ν. В то же время возможны следующие разложения:

Разложение в ряд серий для $x << 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{\nu} \left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + ... \right]. \tag{19}$$

Разложение в асимптотический ряд при $x >> 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{\nu-1} \left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + ... \right]. \tag{20}$$

При ν, равном единице, получим экспоненциальное распределение. Для целых значений ν разложение в асимптотический ряд имеет ограниченное количество условий и дает гамма-распределение в явном виде.

В явлениях распространения радиоволн полезные значения ν имеют очень низкую величину, порядка $1 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-4}$. Для значений ν, близких к нулю, имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \simeq \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \simeq \nu. \tag{21}$$

Следовательно, для малых значений ν и не слишком малых значений αx можно записать:

$$1 - F(x) \simeq \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt. \tag{22}$$

Для практических расчетов для вышеуказанного интеграла можно найти аппроксимацию, например следующую:

$$1 - F(x) \simeq \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0{,}68 + \alpha x + 0{,}28 \log \alpha x}, \tag{23}$$

которая справедлива для $\nu < 0{,}1$ и $\alpha x > 0{,}03$.

Интегральное распределение дополнительной гамма-функции для малых значений ν показано на рис. 5. Можно заметить, что вероятность того, что переменная x будет намного больше нуля, всегда мала. Этот факт, в частности, объясняет возможность использования гамма-распределения для характеристики интенсивности дождей, поскольку общий процент продолжительности дождей, как правило, бывает 2–10%

9 ***m*-распределение Накагами** (см. Примечание 1)

ПРИМЕЧАНИЕ 1. – В настоящем разделе *m* обозначает параметр *m*-распределения Накагами; это не обозначение среднего значения, которое использовалось в предыдущих разделах данного Приложения.

Это распределение применяется к положительной неограниченной по величине переменной. Плотность вероятности следующая:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\,\Omega^m}\, x^{2m-1}\, e^{-\frac{m}{\Omega}x^2}. \tag{24}$$

Ω представляет собой масштабный параметр, равный среднему значению x^2.

$$\overline{x^2} = \Omega. \tag{25}$$

Данное распределение по-разному связано с рассмотренными ранее распределениями:

– если переменная описывается *m*-распределением Накагами, то ее квадрат имеет гамма-распределение;

– при $m = 1$ получаем рэлеевское распределение;

– при $m = 1/2$ получаем одностороннее нормальное распределение.

m-распределение Накагами и распределение Накагами-Райса можно, таким образом, рассматривать как два различных варианта обобщения рэлеевского распределения. Следует отметить, что при очень низких уровнях сигнала наклон *m*-распределения Накагами зависит от параметра *m* в отличие от распределения Накагами-Райса, которое имеет постоянное предельное значение наклона (10 дБ на десять единиц изменения вероятности). Интегральное распределение *m*-Накагами для различных значений параметра *m* показано на рис. 6.

РИСУНОК 5

Гамма-распределение (α = 1, $\nu \leq 0,1$)

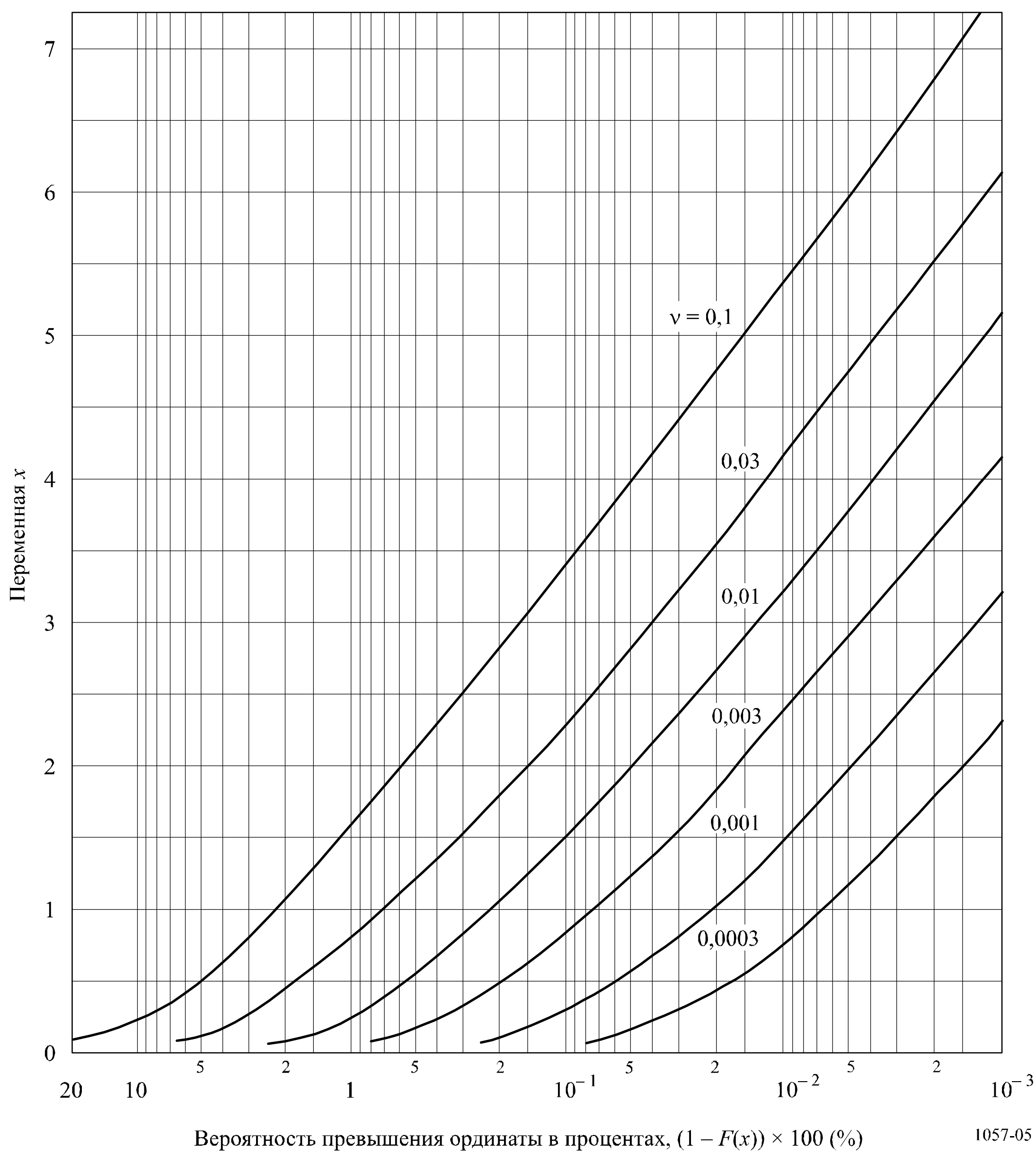
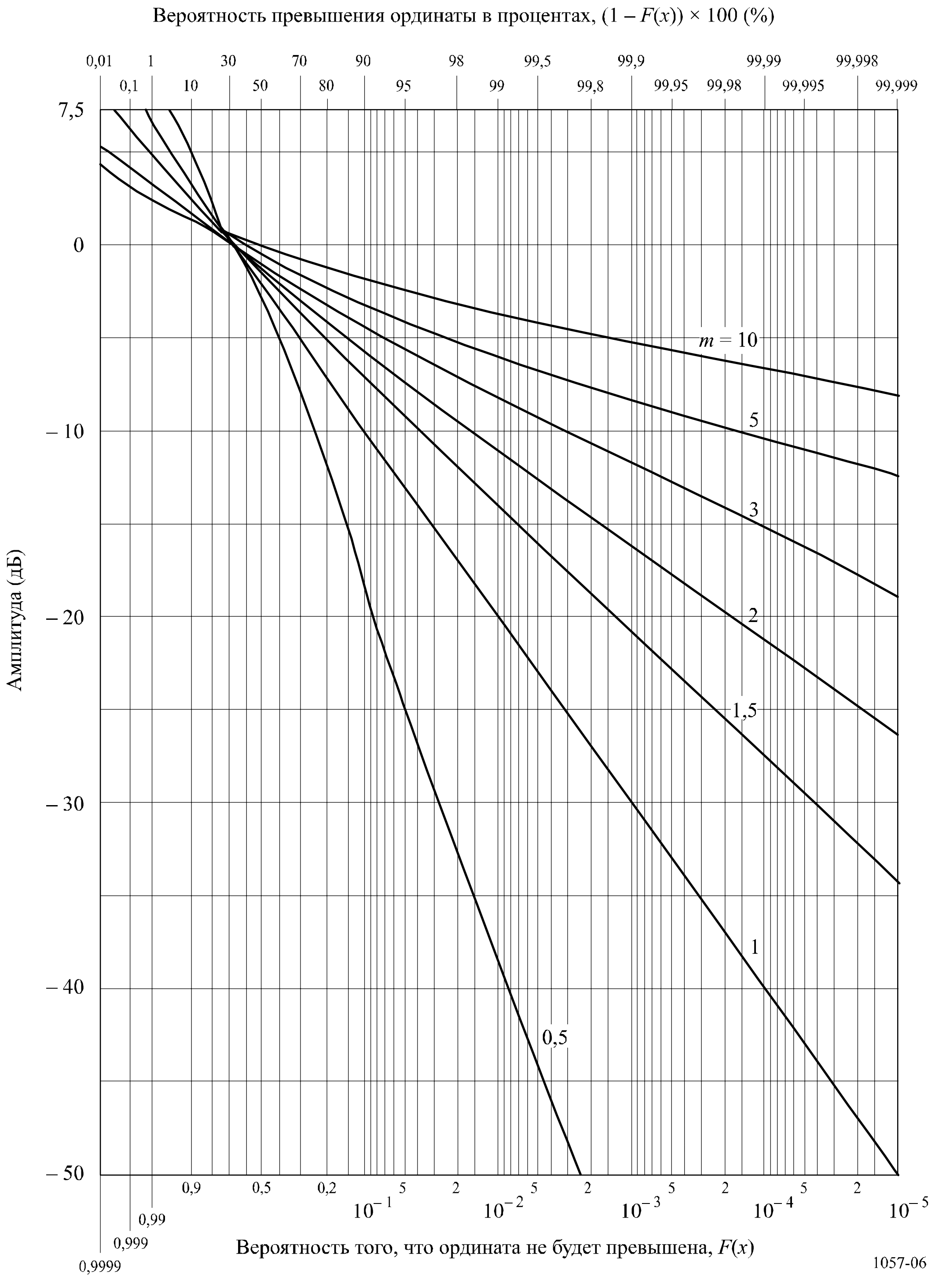


РИСУНОК 6

***m*-распределение Накагами ($\overline{x^2} = 1$)**



10 Распределение χ^2 Пирсона

В этом распределении плотность вероятности определяется уравнением:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\ \mathrm{e}^{\frac{-\chi^2}{2}}\ (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \ . \tag{26}$$

χ^2 – неограниченная по величине положительная переменная, а параметр ν, являющийся целым положительным числом, выражает число степеней свободы распределения. Γ представляет собой функцию Эйлера второго порядка. В зависимости от четности или нечетности ν она равна:

для четных ν:
$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)! \tag{27}$$

для нечетных ν:
$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \ . \tag{28}$$

Интегральное распределение определяется как:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\ t^{\frac{\nu}{2}-1}\ \mathrm{d}t \ . \tag{29}$$

Среднее значение и стандартное отклонение определяются как:

$$m = \nu \tag{30}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \ . \tag{31}$$

Важной особенностью распределения χ^2 является то, что если n переменных x_i имеют гауссово распределение со средними значениями m_i и стандартными отклонениями σ_i, то переменная:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{32}$$

имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. В частности, квадрат небольшой по величине гауссовой переменной имеет распределение χ^2 с одной степенью свободы.

Если несколько независимых переменных имеют распределение χ^2, то их сумма имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы, равным сумме степеней свободы каждой переменной.

Распределение χ^2 незначительно отличается от гамма-распределения. Преобразование из одного распределения в другое можно осуществить с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha x \tag{33}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \ . \tag{34}$$

Аналогично, переход от распределения χ^2 к m-распределению Накагами осуществляется с помощью уравнений:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2 \tag{35}$$

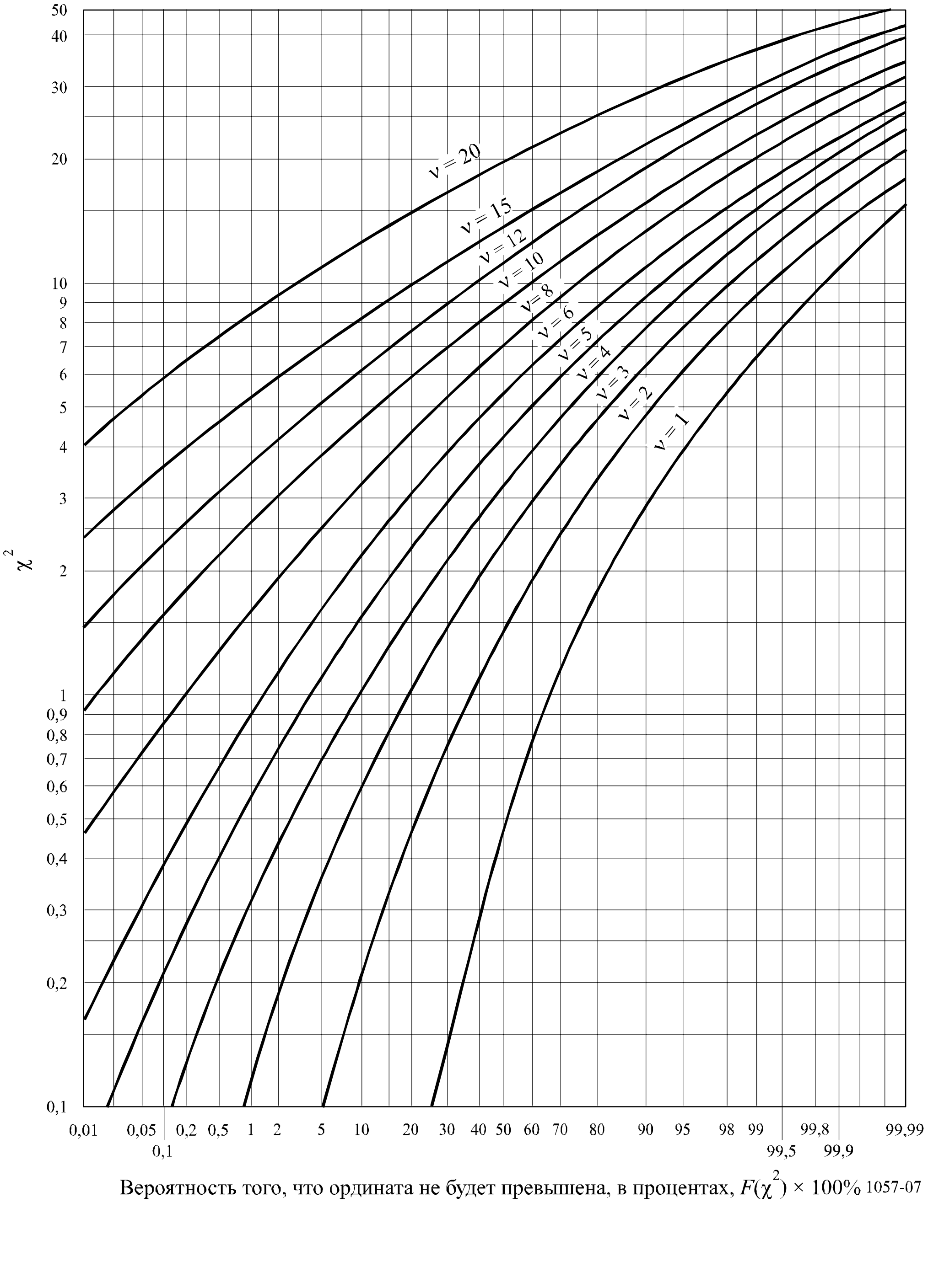
$$\frac{\nu}{2} = m \, . \tag{36}$$

Распределение χ^2 используется в статистических исследованиях для определения того, может ли ряд экспериментальных значений параметров (интенсивность дождей, ослабление и т. д.) моделироваться данным статистическим распределением.

На рис. 7 в графическом виде представлено описанное распределение для ряда значений ν.

РИСУНОК 7

Распределение χ^2



Приложение 2

Поэтапная процедура для аппроксимации дополнительного интегрального распределения посредством логарифмически нормального дополнительного интегрального распределения

1 Базовая информация

Логарифмически нормальное интегральное распределение определяется как:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{37}$$

или, что то же самое,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t \ . \tag{38}$$

Аналогичным образом, логарифмически нормальное дополнительное интегральное распределение определяется как:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{39}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] \mathrm{d}t \ , \\ &= Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right) \end{aligned} \tag{40}$$

где $Q(.)$ – интеграл нормальной дополнительной интегральной вероятности. Параметры m и σ сложно оценить на основе набора из n пар (G_i, x_i), как это описано в следующем пункте.

2 Процедура

Оценим два логарифмически нормальных параметра m и σ следующим образом:

Этап 1: Составим набор из n пар (G_i, x_i), где G_i – вероятность того, что значение x_i превышается.

Этап 2: Преобразуем набор из n пар из (G_i, x_i) в $(Z_i, \ln x_i)$, где:

$$Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i) \text{ или, что то же самое, } Z_i = Q^{-1}(G_i).$$

Этап 3: Определим переменные m и σ, приведя наименьшие квадраты в соответствие с линейной функцией:

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

следующим образом:

$$\sigma = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}.$$