التوصيـــة ITU-R P.1057-2

توزيعات الاحتمال المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

(2007-2001-1994)

مجال التطبيق

تتطلب نمذجة انتشار الموجات الراديوية استخداماً واسع النطاق للأساليب الإحصائية. وتوفر هذه التوصية معلومات عامة عن أهم توزيعات الاحتمال من أجل توفير معلومات أساسية عامة إلى الأساليب الإحصائية للتنبؤ بالانتشار المستخدمة في توصيات لجان دراسات الاتصالات الراديوية.

إن جمعية الاتصالات الراديوية للاتحاد الدولي للاتصالات،

إذ تضع في اعتبارها

أ) أن انتشار الموجات الراديوية يُصاحب خاصة مع وسط عشوائي، مما يجعل من الضروري تحليل ظواهر الانتشار باستعمال طرائق إحصائية؛

ب) أن في معظم الحالات، من الممكن القيام بوصف مرضٍ لتغيرات معلمات الانتشار في الزمان والمكان بواسطة توزيعات إحصائية معروفة؛

ج) أن من المهم إذاً معرفة الخصائص الأساسية لتوزيعات الاحتمال الأكثر استعمالاً المستخدمة للدراسة الإحصائية لظواهر الانتشار،

توصي

1 بوجوب استخدام المعلومات الإحصائية المتعلقة بنمذجة الانتشار الواردة في الملحق 1 في تخطيط خدمات الاتصالات الراديوية والتنبؤ بمعلمات أداء الأنظمة.

2 بوجوب استخدام الإجراء خطوة فخطوة الوارد في الملحق 2 من أجل تقريب التوزيع التراكمي التكميلي بواسطة توزيع تراكمي تكميلي لوغاريتمي عادي.

الملحـــق 1

توزيعات الاحتمال المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

1 مدخـــل

لقد أظهرت التجربة أن المعلومات حول القيم المتوسطة للإشارات المستقبلة لا تكفي لوصف أداء أنظمة الاتصالات الراديوية. ويجب كذلك أن تُؤخذ في الاعتبار التغيرات في الزمان والمكان والتردد.

إن السلوك الدينامي للإشارات المطلوبة والإشارات المسببة للتداخل يلعب دوراً حاسماً في تحليل اعتمادية الأنظمة واختيار معلمات الأنظمة، مثل نمط التشكيل. ومن الضروري معرفة مدى أهمية وسرعة تقلبات الإشارات للتمكن من تحديد بعض المعلمات مثل نمط التشكيل وقدرة الإرسال ونسبة الحماية من التداخلات وطريقة التشفير وإجراءات التنوع، إلخ.

ولوصف أداء أنظمة الاتصال، غالباً ما يكفي ملاحظة السلاسل الزمنية لتقلبات الإشارات ووصف هذه التقلبات كعملية عشوائية. لكن، إذا شئنا استعمال نمذجة تقلبات الإشارات للتنبؤ بأداء الأنظمة الراديوية، يجب كذلك معرفة آليات التفاعل البيني للموجات الراديوية مع الجو (جو متعادل وأيونوسفيري).

وتتغير التركيبة والحالة المادية للجو كثيراً بحسب المكان والزمان. لذلك فإن نمذجة التفاعل البيني للموجة تتطلب استعمالاً مكثفاً للطرائق الإحصائية لتمييز مختلف المعلمات المادية التي تصف الجو وكذلك المعلمات الكهربائية التي تحدد سلوك الإشارات وعمليات التفاعل البيني التي تربط هذه المعلمات فيما بينها.

سوف تُقدم فيما يلي بعض المعلومات العامة حول توزيعات الاحتمال الأكثر أهمية. وقد يوفر ذلك خلفية مشتركة للطرائق الإحصائية للتنبؤ بالانتشار المستعملة في توصيات لجان دراسات الاتصالات الراديوية.

2 توزيع الاحتمال

غالباً ما توصف العمليات العشوائية إما بدالة كثافة احتمال أو دالة توزيع تراكمية. وتكون دالة كثافة الاحتمال، المشار إليها هنا بالعلامة $p(x)$ للمتغير x، بحيث أن الاحتمال لكي يأخذ المتغير x قيمة في الفاصل المتناهي الصغر بين x و$(x + dx)$ يكون $p(x)\ dx$. وتعطي دالة التوزيع التراكمية المسماة $F(x)$ احتمال أن يأخذ المتغير قيمة أصغر من x. أي تكون العلاقة بين الدوال كما يلي:

$$p(x) = \frac{d}{dx}\,[F(x)]$$

أو

$$F(x) = \int_{c}^{x} p(t)\ \mathrm{d}t$$

حيث c هي الحد الأدنى للقيم التي يمكن أن تأخذها t.

تتمثل التوزيعات الأكثر أهمية فيما يلي:

- توزيع عادي أو من نمط غوسي،
- توزيع لوغاريتمي عادي،
- توزيع رايلي،
- توزيع مركب لوغاريتمي عادي ورايلي،
- توزيع ناكاغامي–رايس (توزيع n لناكاغامي)،
- توزيع غاما وتوزيع أسي،
- توزيع m لناكاغامي،
- توزيع χ^2 لبيرسون.

3 توزيع من نمط غوسي أو عادي

ينطبق هذا التوزيع على متغير مستمر بأي إشارة جبرية. تكون كثافة الاحتمال من نمط:

$$p(x) = e^{-T(x)} \tag{1}$$

مع كون $T(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية غير سالبة. فإذا استعملنا كمعلمات المتوسط m والانحراف المعياري σ، فإن $p(x)$ تُكتب بالطريقة المعتادة التالية:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

من ثم:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{3}$$

مع:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-t^2} \mathrm{d}t \tag{4}$$

غالباً ما يُجدول التوزيع التراكمي العادي $F(x)$ في شكل مختصر، أي بأخذ m تساوي صفراً و σ تساوي الواحد الصحيح. وفي هذه الحالة، يعطي الجدول 1 التقابل بين x و $F(x)$ لبعض القيم الصحيحة لـــ x أو $F(x)$.

الجدول 1

x	$1 - F(x)$	x	$1 - F(x)$
0	0,5	1,282	10^{-1}
1	0,1587	2,326	10^{-2}
2	0,02275	3,090	10^{-3}
3	$1,350 \times 10^{-3}$	3,719	10^{-4}
4	$3,167 \times 10^{-5}$	4,265	10^{-5}
5	$2,867 \times 10^{-7}$	4,753	10^{-6}
6	$9,866 \times 10^{-10}$	5,199	10^{-7}
		5,612	10^{-8}

لأغراض الحسابات العملية، يمكن تمثيل $F(x)$ بدوال تقريبية، فمثلاً تعتبر الدالة التالية صالحة لمتغير x موجب مع خطأ نسبي أقل من ($2,8 \times 10^{-3}$):

$$1 - F(x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}\left(0,661\, x + 0,339\sqrt{x^2 + 5,51}\right)} \tag{5}$$

ويُصادف التوزيع الغوسي أساساً عندما تكون قيم المقدار المدروسة ناتجة عن الأثر الإضافي لعدة مسببات عشوائية، كل منها ذات أهمية ضئيلة نسبياً.

وفي الانتشار، تكون معظم الكميات الفيزيائية المأخوذة في الاعتبار (القدرة، فرق الجهد، وقت الخبو، إلخ) كميات موجبة أساساً، وبالتالي لا يُمكن أن تُمثل مباشرة بتوزيع غوسي. ومن جانب آخر فإن هذا التوزيع يُستعمل في حالتين مهمتين:

– لتمثيل تقلبات مقدار ما حول قيمته المتوسطة (التلألؤ).

– لتمثيل لوغاريتم مقدار ما. عندئذ نحصل على توزيع لوغاريتمي عادي سترد دراسته فيما بعد.

وتوجد في شكل تجاري مخططات يُقال عن إحدى إحداثياتها إنها غوسية، أي التدريج بحيث يمثل التوزيع الغوسي بخط مستقيم. وتُستعمل هذه المخططات بصورة شائعة، حتى لتمثيل التوزيعات غير الغوسية.

4. التوزيع اللوغاريتمي العادي

هو توزيع متغير موجب يكون للوغاريتمية توزيع غوسي. ويمكن إذاً أن نكتب مباشرة دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمي كما يلي:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (6)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \qquad (7)$$

لكن m و σ في هاتين المعادلتين عبارة عن المتوسط والانحراف المعياري للوغريتم المتغير x وليس للمتغير x ذاته. ويمكن اشتقاق الكميات المميزة للمتغير x دون صعوبة. ونجد:

– القيمة الأكثر احتمالاً $\exp\,(m - \sigma^2)$

– القيمة المتوسطة: $\exp\,(m)$

– متوسط القيمة: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

– قيمة جذر متوسط التربيع: $\exp\left(m + \sigma^2\right)$

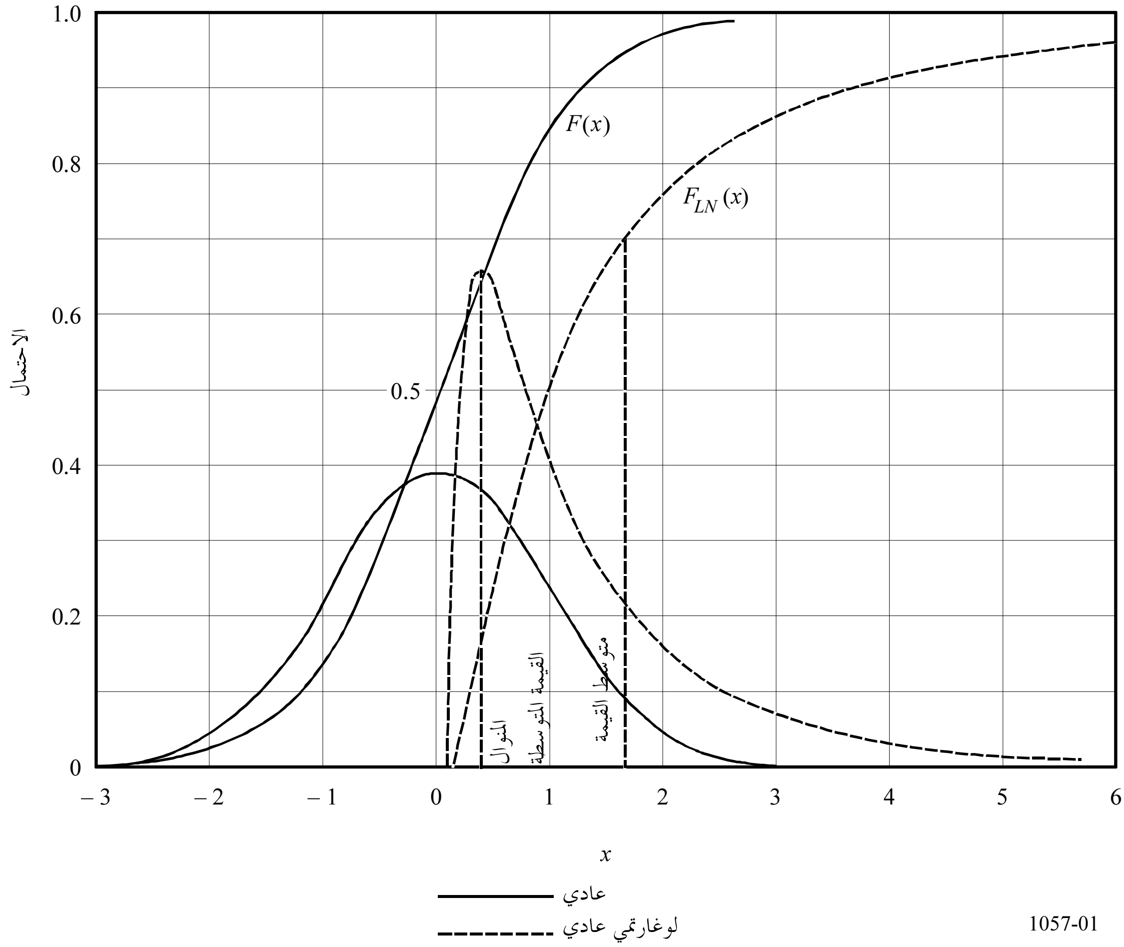
– الانحراف المعياري: $\exp\left(\mathrm{m} + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\exp\left(\sigma^2\right) - 1}$

وعلى عكس التوزيع الغوسي، يكون التوزيع اللوغاريتمي العادي لا تناظرياً إلى أقصى حد. وبوجه خاص، فإن متوسط القيمة والقيمة المتوسطة والقيمة الأكثر احتمالاً (التي تُسمى عادة المنوال) ليست متماثلة (انظر الشكل 1).

غالباً ما يُصادف توزيع اللوغاريتم العادي في الانتشار، أساساً لمقادير مرتبطة إما بسوية قدرة أو شدة مجال أو بزمن. وفي حالة سويات القدرة أو شدة المجال، يكون التعبير عنها عادة بالديسيبل ولذلك تكون الإشارة إلى التوزيع العادي للسويات هي الأكثر شيوعاً. وفي حالة الزمن (مثلاً فترات الخبو)، يُستعمل توزيع اللوغاريتم العادي بشكل صريح لأن المتغير الطبيعي يكون الثانية أو الدقيقة وليس لوغاريتمها.

الشكل 1

توزيع عادي ولوغاريتمي عادي



بما أن مقلوب المتغير الذي له توزيع لوغاريتم عادي يكون له توزيع لوغاريتمي عادي أيضاً، فإن هذا التوزيع يُصادف في بعض الحالات لمعدلات (القيم المقلوبة للزمن). فعلى سبيل المثال، يُستعمل هذا التوزيع لتمثيل توزيع معدل هطول المطر، على الأقل لمعدلات هطول المطر المنخفضة والمتوسطة.

وبالمقارنة مع التوزيع الغوسي، يمكن اعتبار أن التوزيع اللوغاريتمي العادي يعني أن القيم الرقمية للمتغير هي نتيجة عمل أسباب متعددة ذات أهمية مفردة ضئيلة، لكن ذات أثر تضاعفي.

5 توزيع رايلي

ينطبق توزيع رايلي على متغير مستمر موجب غير محدد. ويرتبط توزيع رايلي بالتوزيع الغوسي كما يلي. فعلى اعتبار وجود توزيع غوسي ثنائي الأبعاد لمتغيرين مستقلين y وz بمتوسط صفر ونفس الانحراف المعياري σ وعلى ذلك يكون المتغير العشوائي x كما يلي:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \tag{8}$$

ويكون لهذا المتغير العشوائي توزيع رايلي وتكون القيمة الأكثر احتمالاً للمتغير x تساوي σ. ونظراً لأن x يمثل متجهاً يربط بين نقطة في التوزيع الغوسي ثنائي الأبعاد ومركز هذا التوزيع، فيمكن استنتاج أن توزيع رايلي يمثل توزيع طول المتجه الذي يمثل مجموع عدد كبير من المتجهات ذات الاتساع الصغير والتي يكون لأطوارها توزيع منتظم.

وتُعطى دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمي بواسطة:

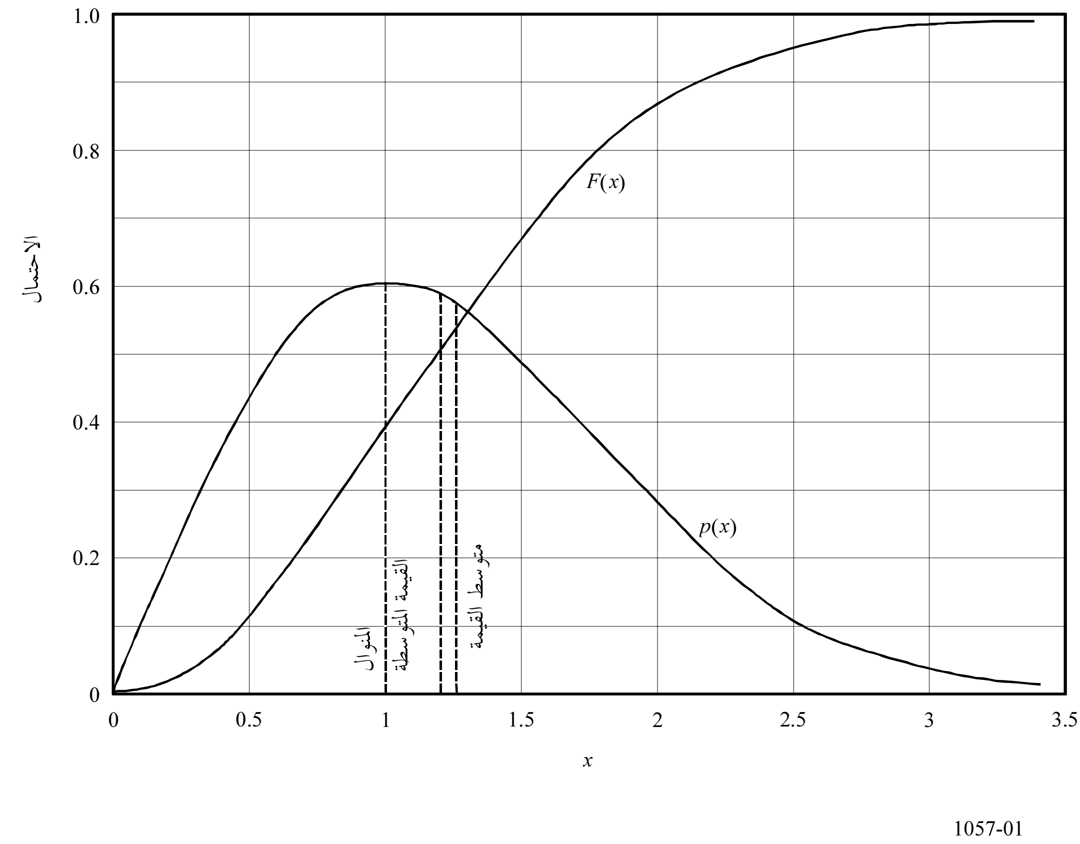
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

يمثل الشكل 2 هذين الدالتين $p(x)$ و$F(x)$.

الشكل 2

توزيع رايلي



تتمثل القيم المميزة للمتغير فيما يلي:

- القيمة الأكثر احتمالاً σ
- القيمة الوسطى $\sigma\sqrt{2\ln 2} = 1.18\,\sigma$
- متوسط القيمة $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.25\,\sigma$
- قيمة جذر متوسط التربيع: $\sigma\sqrt{2} = 1.41\,\sigma$
- الانحراف النمطي: $\sigma\sqrt{2-\frac{\pi}{2}} = 0.655\,\sigma$

ويلاحظ أن σ هي الانحراف المعياري للتوزيع الغوسي الذي يرتبط به توزيع رايلي.

وغالباً ما يُستعمل توزيع رايلي بالقرب من نقطة الأصل، أي لقيم x المنخفضة. وفي هذه الحالة يكون:

$$F(x) \cong \frac{x^2}{2\sigma^2} \tag{11}$$

ويمكن تفسير ذلك على النحو التالي: احتمال أن تكون للمتغير العشوائي X قيمة أصغر من x تتناسب مع مربع هذه القيمة. فإذا كان المتغير المعني عبارة عن فرق جهد، فإن مربعه يمثل قدرة الإشارة. بتعبير آخر، وبمقياس الديسيبل، فإن القدرة تتناقص بقيمة 10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال. غالباً ما تُستعمل هذه الخاصية لمعرفة ما إذا كان لسوية مستقبلة توزيع رايلي، على الأقل بصورة تقريبية. لكن يجب ملاحظة أن توزيعات أخرى يمكن أن يكون لها نفس السلوك.

ويحدث توزيع رايلي على الخصوص في ظواهر الانتشار.

6 التوزيع المركب من لوغاريتمي عادي ورايلي

في بعض الحالات، يمكن اعتبار أن توزيع متغير عشوائي ناتج عن تركيب توزيعين، أي توزيع لوغاريتم عادي للتغيرات على المدى الطويل وتوزيع رايلي للتغيرات على المدى القصير. ويتم الحصول على توزيع القيم اللحظية بافتراض متغير رايلي يكون متوسط قيمته (أو قيمة جذر متوسط التربيع) هو نفسه متغير عشوائي ذو توزيع لوغاريتمي عادي.

وإذا تم استعمال m و σ لتسمية المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الغوسي المصاحب للتوزيع اللوغاريتمي العادي، فإننا نحصل على التوزيع التالي:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-x^2 \, \mathrm{e}^{-2\sigma u} - \frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u \tag{12}$$

في هذه المعادلة، يُعبر عن الانحراف النمطي σ بالنيبرات. إذا استُعملت ′σ للإشارة إلى قيمته بالديسيبل، يكون لدينا:

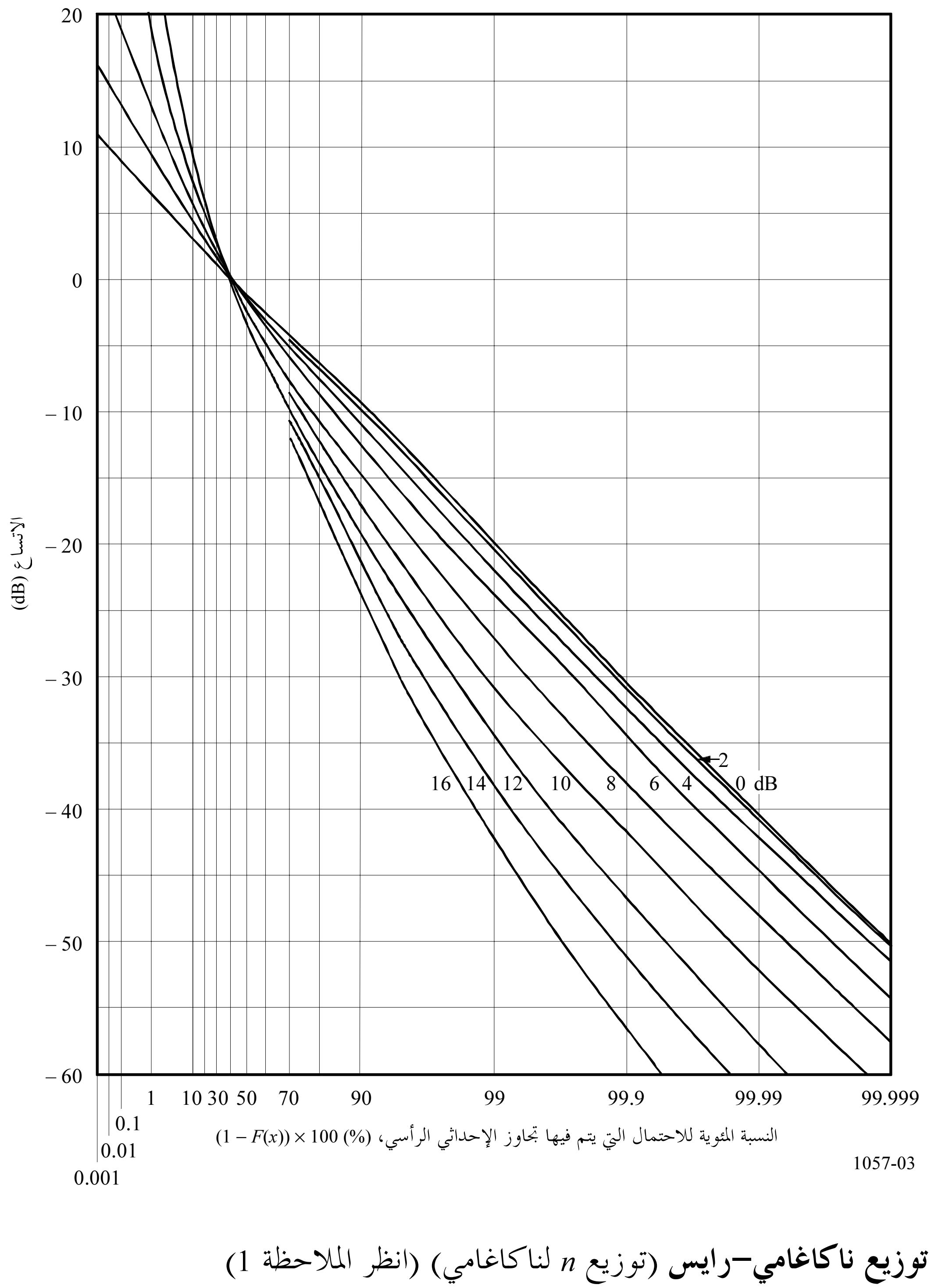
$$\sigma = 0{,}115\,\sigma' \tag{13}$$

يعطي الشكل 3 تمثيلاً بيانياً لهذا التوزيع لعدد من قيم الانحراف المعياري، مع أخذ قيمة m مساوية لصفر.

يحدث هذا التوزيع أساساً في الانتشار عبر لا تجانسات الوسط عندما يكون لخصائص هذا الوسط تغيرات لا يُستهان بها على المدى الطويل، كما يحدث في الانتشار التروبوسفيري مثلاً.

الشكل 3

التوزيع المركب من توزيع لوغاريتمي عادي ورايلي (مع اعتبار الانحراف المعياري للتوزيع الوغاريتمي العادي كمعلمة)



7 توزيع ناكاغامي–رايس (توزيع n لناكاغامي) (انظر الملاحظة 1)

الملاحظة 1 – يجب عدم الخلط بين هذا التوزيع وتوزيع m لناكاغامي.

يُشتق توزيع ناكاغامي–رايس كذلك من التوزيع الغوسي، وهو يعمم توزيع رايلي. ويمكن النظر إلى هذا التوزيع على أنه توزيع لطول متجه عبارة عن مجموع متجه ثابت ومتجه لطوله توزيع رايلي. بمعنى آخر بافتراض وجود توزيع غوسي ثنائي الأبعاد بمتغيرين مستقلين x وy ولهما نفس الانحراف المعياري σ، فإن طول المتجه الذي يصل بين نقطة على التوزيع بنقطة ثابتة خلاف مركز التوزيع يكون له توزيع ناكاغامي – رايس.

إذا تم استعمال a للإشارة إلى طول متجه ثابت، و σ الطول الأكثر احتمالاً لمتجه رايلي، فإن كثافة الاحتمال تُعطى بواسطة:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0 \left(\frac{ax}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

حيث I_0 هي دالة بيسيل المعدلة من النوع الأول ومن رتبة صفر.

ويتوقف هذا التوزيع على معلمتين لأغراض مشاكل الانتشار، من الضروري اختيار العلاقة بين الاتساع a للمتجه الثابت واتساع جذر متوسط التربيع $\sigma\sqrt{2}$ للمتجه العشوائي. وتتوقف هذه العلاقة على التطبيق المزمع. والتطبيقان الرئيسيان هما التاليان:

أ) القدرة في المتجه الثابت عبارة عن مقدار ثابت، لكن القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي متغيرة.

إذا درسنا تأثير شعاع معكوس بواسطة سطح غير منتظم، والنظر في مكونات متعددة المسير إضافة إلى مكون ثابت، فإن متوسط القدرة يساوي $(a^2 + 2\sigma^2)$. ويعرف التوزيع عادة بمعلمة K.

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dB} \tag{15}$$

وهذه المعلمة عبارة عن النسبة بين القدرة في المتجه الثابت والقدرة في المكون العشوائي.

ب) القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي ثابتة لكن كلا المكونين متغيران.

إذا درسنا الانتشار بمسيرات متعددة عبر الجو، يمكن اعتبار أن مجموع القدرة المنقولة بالمتجه الثابت ومتوسط القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي يكون ثابتاً، بما أن القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تأتي من قدرة المتجه الثابت. وإذا أخذنا القدرة الإجمالية على أنها تساوي الواحد الصحيح، عندئذ نحصل على:

$$a^2 + 2\sigma^2 = 1 \tag{16}$$

عندئذ تكون أجزاء القدرة الإجمالية المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تساوي $2\sigma^2$. و من جانب آخر، إذا استعملت X للإشارة إلى الاتساع اللحظي للمتجه الناتج واستعملت x للإشارة إلى قيمة رقمية لهذا الاتساع، فإننا نجد أن احتمال الحصول على سوية لحظية أكبر من x يُعطى بواسطة:

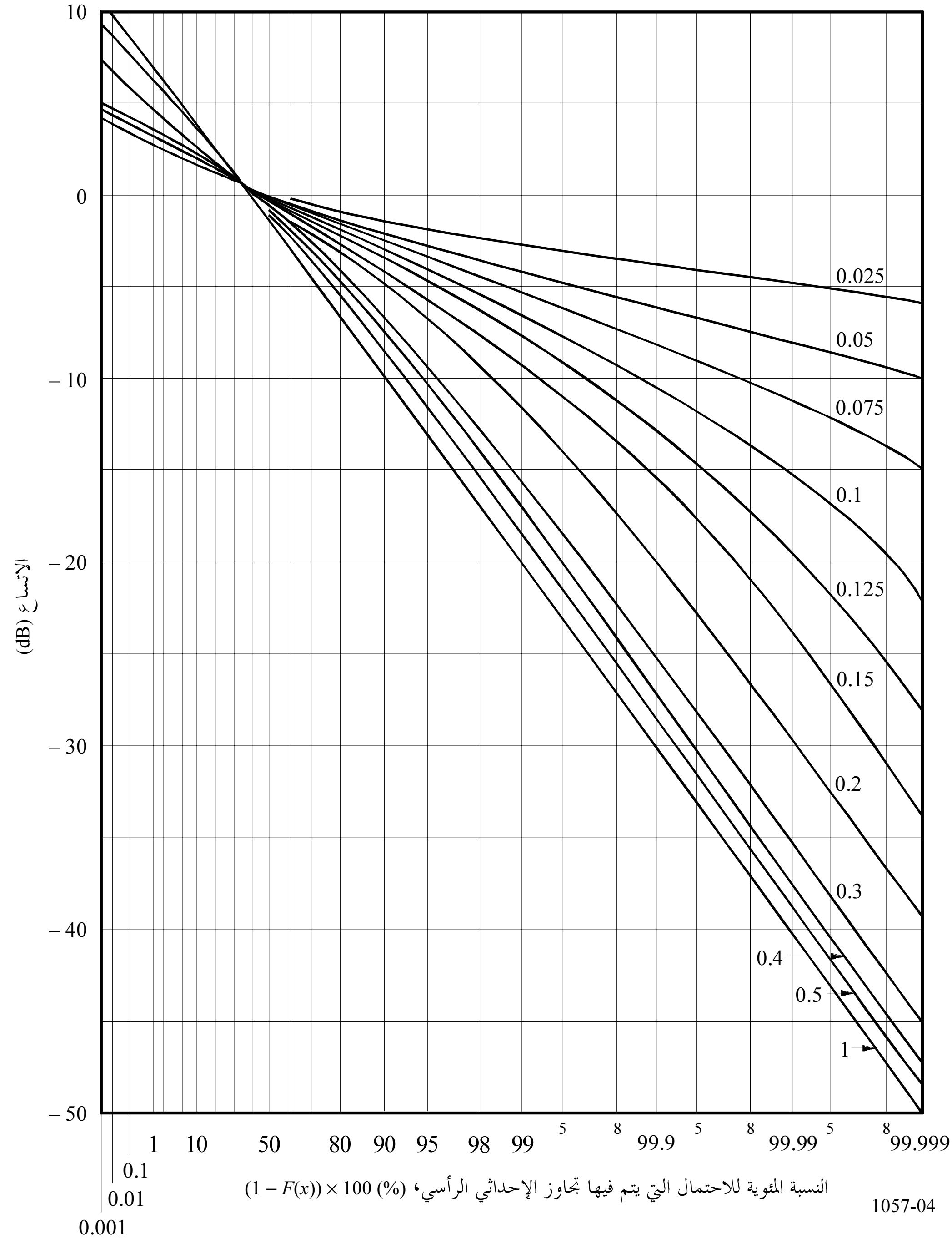
$$\text{Prob}\,(X > x) = 1 - F(x) = 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} \nu \exp\left(-\nu^2\right) I_0\left(\frac{2\nu a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}\nu \tag{17}$$

ويبين الشكل 4 هذا التوزيع لمختلف قيم أجزاء القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي.

الشكل 4

توزيع ناغاكامي–رايس لقدرة إجمالية ثابتة

(مع جزء القدرة المنقولة بواسطة المتجهة العشوائية كمعلمة)



ولأغراض التطبيقات العملية، تم استعمال مقياس ديسيبل للاتساعات، وبالنسبة للاحتمالات تم استعمال مقياس بحيث يُمثل توزيع رايلي بواسطة خط مستقيم. ونرى أنه بالنسبة لقيم جزء القدرة في المتجه العشوائي التي تزيد عن 0,5، تقترب المنحنيات من حد يقابل توزيع رايلي. والسبب في ذلك هو أن المتجه الثابت في هذه الحالة له اتساع بنفس رتبة اتساع المتجه العشوائي ولا يمكن التمييز بينهما عملياً. ومن جانب آخر، بالنسبة للقيم الصغرى من هذا الجزء، يمكن إظهار أن توزيع الاتساع يتجه نحو توزيع غوسي.

8 توزيع غاما والتوزيع الأسي

على عكس التوزيعات السابقة التي تشتق من التوزيع الغوسي، فإن توزيع غاما تشتق من التوزيع الأسي الذي يشكل تعميماً له. وهو يطبق على متغير موجب غير محدود. وتكون دالة كثافة الاحتمال هي:

$$p(x) = \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \, e^{-\alpha x} \tag{18}$$

وتمثل Γ دالة أولر من الدرجة الثانية.

ويتوقف هذا التوزيع على معلمتين α و ν. لكن α ليست سوى معلمة قياس للمتغير x. والقيم المميزة للمتغير هي التالية:

– القيمة المتوسطة: $\frac{\nu}{\alpha}$

– قيمة جذر متوسط التربيع $\frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{\alpha}$

– الانحراف المعياري: $\frac{\sqrt{\nu}}{\alpha}$

ولا يمكن تقييم التكامل المعبر عن التوزيع التراكمي بشكل صريح، ما عدا للقيم الصحيحة لـــ ν. ومن جهة أخرى تعتبر التمديدات التالية ممكنة:

التقريب التسلسلي للمتغير $x << 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \, e^{-\alpha x} (\alpha x)^{\nu} \left[1 + \frac{\alpha x}{\nu+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + ... \right] \tag{19}$$

والتقريب المقارب للمتغير $x >> 1$:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x} \, (\alpha x)^{\nu-1} \left[1 + \frac{\nu-1}{\alpha x} + \frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{(\alpha x)^2} + ... \right] \tag{20}$$

بالنسبة لــ ν تساوي الواحد الصحيح، نجد التوزيع الأسي. وبالنسبة لقيم ν الصحيحة، يكون للتمديد المقارب عدد محدود من الشروط ويعطي التوزيع غاما بشكل صريح.

وفي الانتشار، تكون القيم ذات الأهمية لــ ν قيماً منخفضة جداً، بين 10^{-2} و 10^{-4}. وبالنسبة لــ ν في جوار صفر، يكون:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \cong \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \cong \nu \tag{21}$$

عند ذلك يمكن أن نكتب بالنسبة لقيم ν صغير و α x ليست صغيرة جداً.

$$1 - F(x) \cong \nu \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \tag{22}$$

وللحسابات العملية، يمكن العثور على تقريب للتكامل السابق، كالآتي بعد على سبيل المثال:

$$1 - F(x) \cong \nu \frac{e^{-\alpha x}}{0{,}68 + \alpha x + 0{,}28 \log \alpha x} \tag{23}$$

وهو ما يعد صالحاً في حالة $\nu < 0{,}1$ و $\alpha\, x > 0{,}03$.

ويبين الشكل 5 التوزيع التراكمي لدالة غاما التكميلية لقيم ν الصغيرة. ويلاحظ أن هناك احتمالاً قليلاً أن يكون المتغيرة x أكبر بكثير من الصفر. وذلك ما يفسر على الخصوص استعمال توزيع غاما لتمثيل معدلات هطول المطر، إذ إن النسبة المئوية الإجمالية لوقت هطول المطر تتراوح على العموم بين 2 و 10%.

9 توزيع m لناكاغامي (انظر الملاحظة 1)

الملاحظة 1 – في هذه الفقرة، تدل m على معلمة لتوزيع m لناكاغامي وليس على متوسط قيمة مثلما هو الحال في الفقرات السابقة من هذا الملحق.

يطبق هذا التوزيع على متغير موجب غير محدود. وكثافة الاحتمال تساوي:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \tag{24}$$

Ω معلمة سلمية تساوي متوسط قيمة x^2.

$$\overline{x^2} = \Omega \tag{25}$$

لهذا التوزيع علاقات مختلفة مع التوزيعات السابقة:

– إذا كان لمتغير ما توزيع m لناكاغامي، فإن مربع هذا المتغير يكون له توزيع غاما.

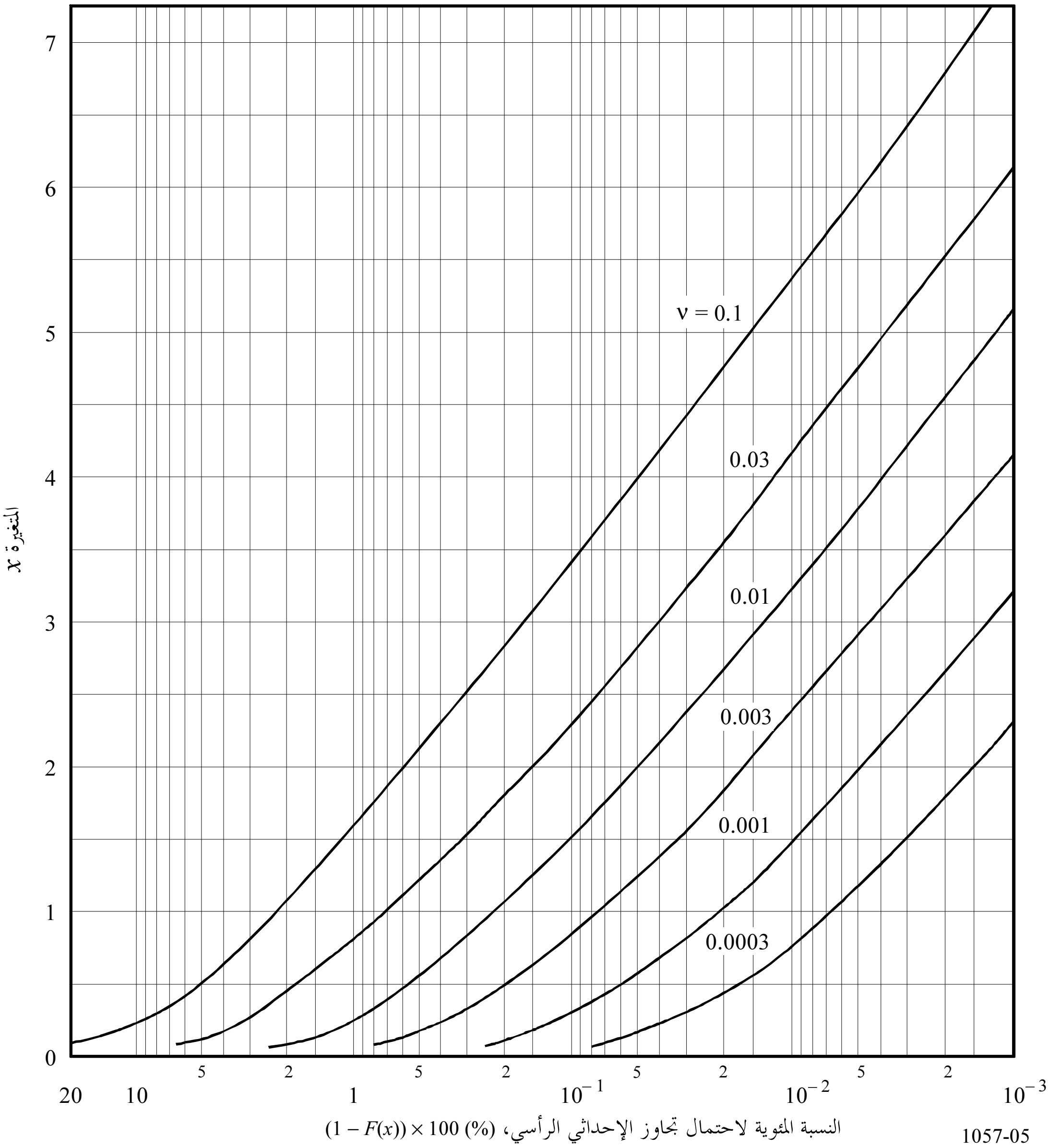
– عندما تكون $m = 1$، نحصل على توزيع رايلي.

– عندما تكون $m = 1/2$، نحصل على توزيع غوسي أحادي الاتجاه.

إذاً يمكن اعتبار التوزيع m لناكاغامي وتوزيع ناكاغامي–رايس كتعميمين مختلفين لتوزيع رايلي. وتجدر ملاحظة أنه، بالنسبة لسويات الإشارة المنخفضة جداً، يؤول التوزيع m لناكاغامي نحو قيمة تتوقف على المعلمة m، على عكس توزيع ناكاغامي–رايس الذي يكون الميل الحدي فيه متساوياً عادة (10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال). ويبين الشكل 6 دالة التوزيع التراكمي m لناكاغامي لمختلف قيم المعلمة m.

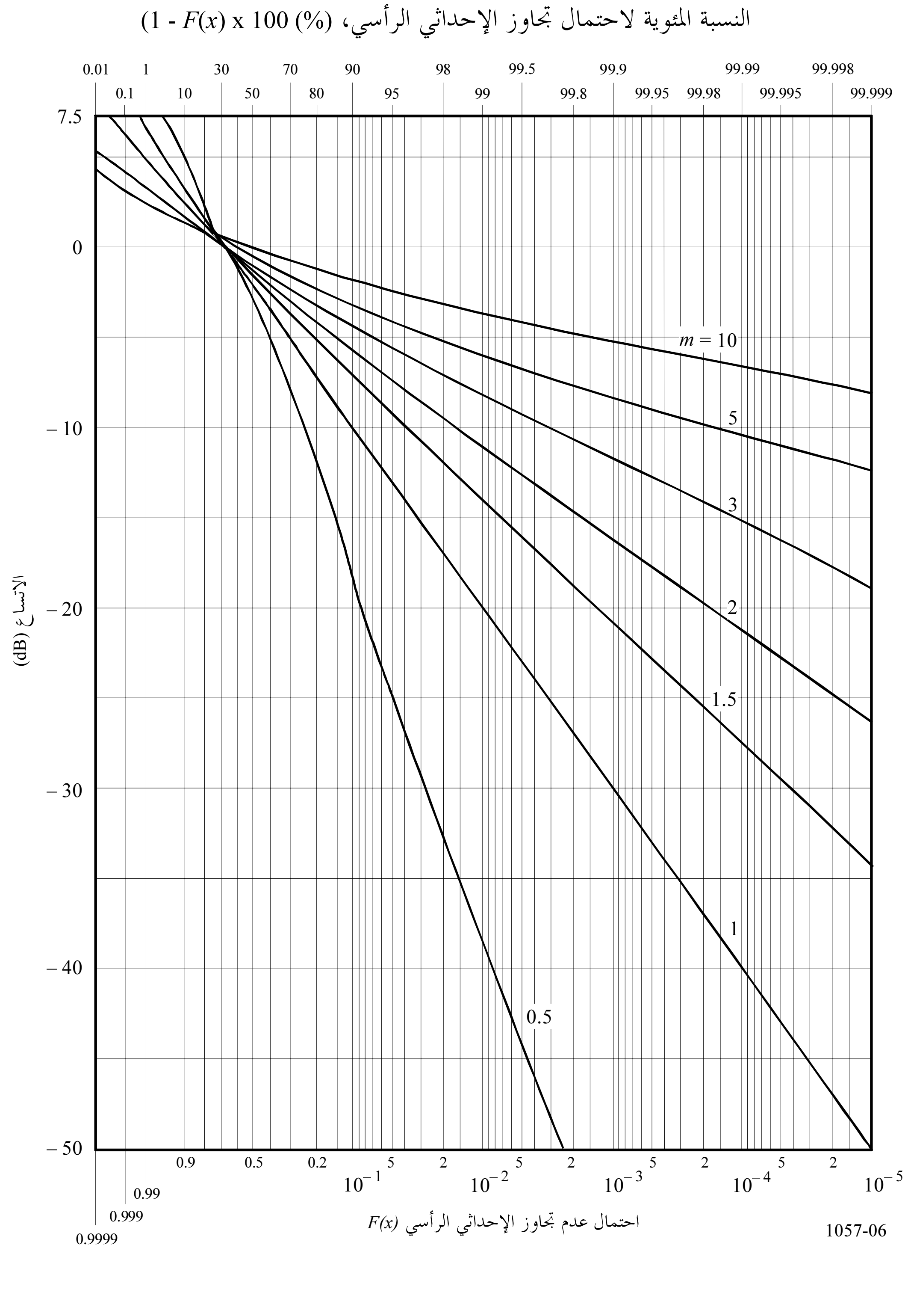
الشكل 5

توزيع غاما (α = 1, ν ≤ 0,1)



الشكل 6

التوزيع *m* لناكاغامي $\overline{x^2} = 1$



10 توزيع χ^2 لبيرسون

تُعطى كثافة الاحتمال بواسطة العلاقة:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{\frac{-\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2} - 1} \tag{26}$$

وتكون χ^2 عبارة عن متغير موجب غير محدد، والمعلمة ν، وهي عدد صحيح موجب، يُدعى عدد درجات حرية التوزيع Γ ويمثل الرمز دالة أولر من الدرجة الثانية. وحسب تعادلية ν، نحصل على:

ν زوجي:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)! \tag{27}$$

ν فردي:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right) \dots \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{28}$$

ويُعطى التوزيع التراكمي بواسطة:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\nu}{2} - 1} \mathrm{d}t \tag{29}$$

ويكون متوسط القيمة والانحراف المعياري كما يلي:

$$m = \nu \tag{30}$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \tag{31}$$

وهناك خاصية أساسية للتوزيع χ^2 وهي أنه: إذا كان لعدد n من المتغيرات x_i توزيعات غوسية بمتوسط m_i وانحراف معياري σ_i، فإن المتغير:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{32}$$

يكون له توزيع χ^2 بعدد n من درجات الحرية. وعلى الخصوص، يكون لمربع متغير غوسي صغير توزيع χ^2 بدرجة واحدة من الحرية.

وإذا كان لعدة متغيرات مستقلة توزيعات χ^2، يكون لمجموعها كذلك توزيع χ^2 بعدد درجات حرية يساوي مجموع درجات الحرية لكل المتغيرات.

ولا يختلف توزيع χ^2 أساساً عن توزيع غاما. ويتم التحول من الواحد إلى الآخر بواسطة المعادلتين:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha x \tag{33}$$

$$\frac{\nu}{2} = n \tag{34}$$

وبنفس الطريقة يتم التحول من توزيع χ^2 إلى توزيع m لناكاغامي بواسطة:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2 \tag{35}$$

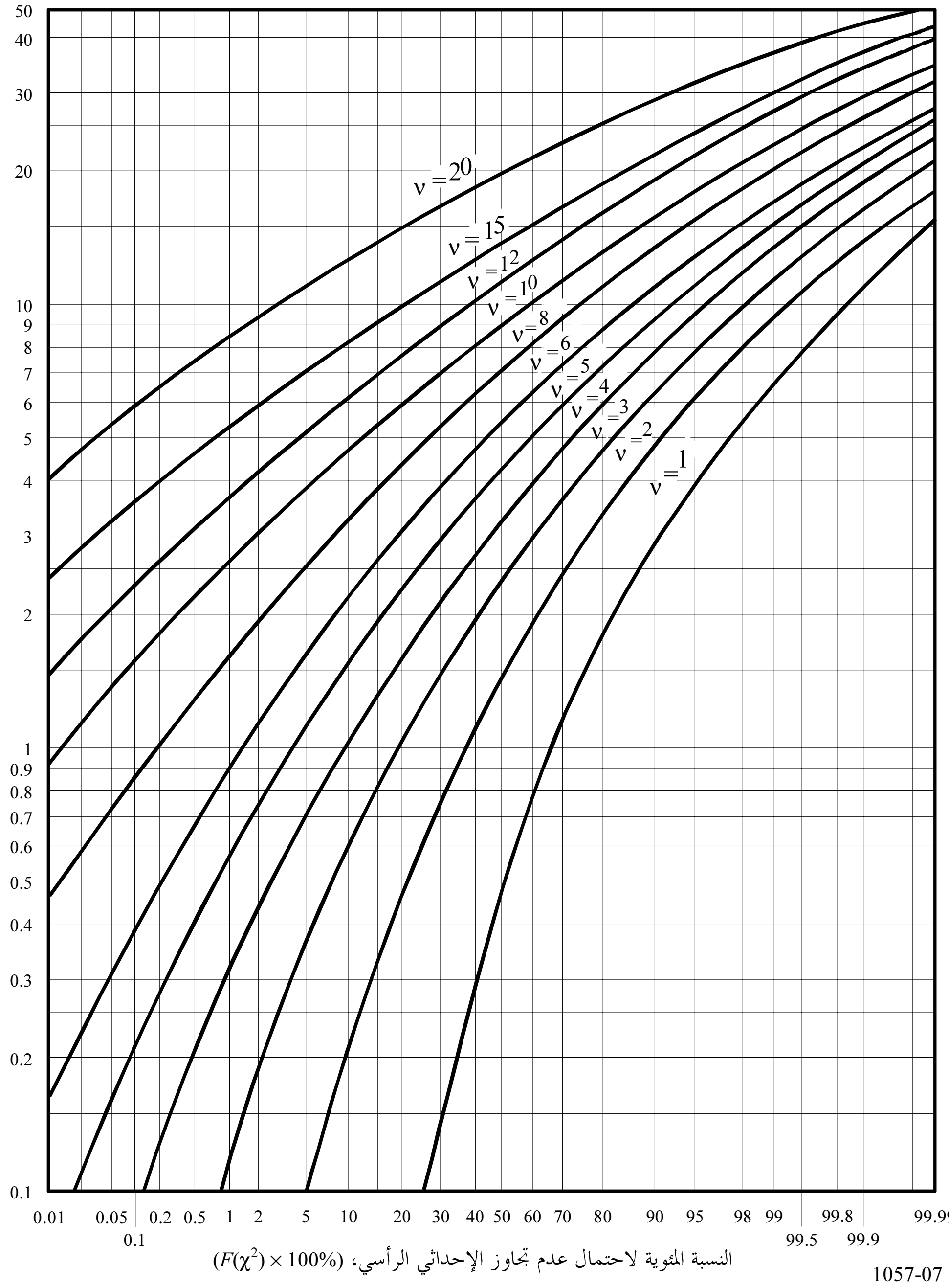
$$\frac{\nu}{2} = m \tag{36}$$

ويُستعمل التوزيع χ^2 في اختبارات إحصائية لتحديد ما إذا كانت مجموعة القيم التجريبية لمقدار (كثافة المطر، التوهين، إلخ) يمكن أن تُنمذج بواسطة توزيع احتمال معين.

ويقدم الشكل 7 تمثيلاً بيانياً لهذا التوزيع لعدد من قيم ν.

الشكل 7

توزيع χ^2



الملحـــق 2

إجراء الخطوة فخطوة من أجل تقريب التوزيع التراكمي التكميلي بواسطة توزيع تراكمي تكميلي لوغاريتمي عادي

1 معلومات أساسية

يعرف التوزيع التراكمي اللوغاريتمي العادي كما يلي:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \qquad (37)$$

أو على نحو مكافئ:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t \qquad (38)$$

وبالمثل، يعرف التوزيع التراكمي التكميلي اللوغاريتمي العادي كما يلي:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \qquad (39)$$

أو على نحو مكافئ:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \mathrm{d}t = Q\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) \qquad (40)$$

حيث $Q(.)$ هو تكامل الاحتمال التراكمي التكميلي العادي. ويمكن تقدير المعلمتين m وσ من مجموعة من أزواج n من (G_i, x_i) على النحو الموصوف في الفقرة التالية.

2 الإجراء

يُجرى تقدير المعلمتين اللوغاريتميتين العاديتين m وσ كما يلي:

الخطوة 1: إنشاء مجموعة أزواج n من (G_i, x_i) حيث G_i هي الاحتمال الذي تتجاوزه x_i.

الخطوة 2: تحويل مجموعة الأزواج n من (G_i, x_i) إلى $(Z_i, \ln x_i)$ حيث:

$Z_i = Q^{-1}(G_i)$، أو على نحو مكافئ، $Z_i = \sqrt{2}\,\mathrm{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(1-2G_i)$

الخطوة 3: تحديد المتغيرين m و σ من خلال إجراء المطابقة بالمربعات الصغرى للدالة الخطية:

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

كما يلي:

$$\sigma = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$